Przykład

Granica ciągu $a_n = \sqrt[n]{n}$ jest 1

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Użyteczny wzór (dwumian Newtona)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n} b^n \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1+\delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 + \ldots$$

gdzie $\delta_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Stąd

$$n > \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 \text{ i } \delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \qquad n > 1$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Czy istnieje N t. że $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ dla $n > N$. Wystarczy N wybrać tak aby $\sqrt{\frac{2}{N-1}} < \varepsilon$ czyli

$$N > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1.$$

Def Mówimy, że ciąg (a_n) jest ograniczony gdy zbiór $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony.

Przykład: $a_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony.

$b_n = \sqrt[n]{n}$ jest ograniczony bo $|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{2}$

$c_n = (-1)^n$ jest ograniczony ale nie jest zbieżny.

Stwierdzenie. Każdy zbieżny ciąg liczb rzeczywistych jest ograniczony.

Dowód: Skoro $a_n \to g$ to $\exists N$ t. że (2)

$|a_n - g| < 1$ dla $n > N$. Zatem

$a_n \in]g-1, g+1[$ dla $n > N$.

Niech $M = \max\{g+1, a_1, \ldots, a_n\}$

wtedy $\forall_{n \in \mathbb{N}}\, a_n \leq M$

Podobnie dla $m = \min\{g-1, a_1, \ldots, a_n\}$

mamy $\forall_{n \in \mathbb{N}}\, a_n \geq m$

Twierdzenie (arytmetyczne własności granic). Załóżmy, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do a i b odpowiednio.

Wówczas $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

$\lim (a_n b_n) = a \cdot b$.

Ponadto jeśli $\forall_{n \in \mathbb{N}}\, b_n \neq 0$ i $b \neq 0$ to

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

Dowód:

Suma: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Istnieją N_1, N_2 t. że $|a - a_n| < \tilde{\varepsilon}$ dla $n > N_1$

$|b - b_n| < \tilde{\varepsilon}$ dla $n > N_2$. Niech $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$.

wtedy $|a + b - a_n - b_n| \leq |a - a_n| + |b - b_n| \leq 2\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ dla $n > N_3$.

Iloczyn: (3)

$|ab - a_n b_n| = |(a-a_n)b + a_n b - a_n b_n|$

$\leq |b| \cdot |a-a_n| + |a_n| |b-b_n|$ Niech $M>0$ będzie górnym ograniczeniem zbioru $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\tilde{\varepsilon}_1 = \frac{\varepsilon}{2|b|}$ (zał. na chwilę, że $b \neq 0$) oraz $\tilde{\varepsilon}_2 = \frac{\varepsilon}{2M}$. Istnieją N_1 i N_2 t. że

$|a-a_n| \leq \tilde{\varepsilon}_1$ dla $n > N_1$

$|b-b_n| \leq \tilde{\varepsilon}_2$ dla $n > N_2$.

Niech $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Wówczas dla $n > N_3$ mamy

$|ab - a_n b_n| \leq |b| |a-a_n| + |a_n| |b-b_n| \leq$
$|b| \tilde{\varepsilon}_1 + |a_n| \tilde{\varepsilon}_2 \leq \frac{\varepsilon}{2|b|}|b| + \frac{\varepsilon |a_n|}{2M} \leq \varepsilon.$

Iloraz: wystarczy wykazać że $\frac{1}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{b}$. Zauważmy, że $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b \cdot b_n|}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech N będzie takie że dla $n > N$ $b_n \in]\frac{b}{2}, \frac{3}{2}b[$.

wtedy $\frac{|b-b_n|}{|b \cdot b_n|} \leq 2 \cdot \frac{|b-b_n|}{b^2}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$

Niech $\tilde{N}$ t. że $|b-b_n| \leq \tilde{\varepsilon}$ dla $n \geq \tilde{N}$ gdzie $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon b^2}{2}$

Weźmy $\tilde{\tilde{N}} = \max\{N, \tilde{N}\}$. Wówczas dla $n > \tilde{\tilde{N}}$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2}{b^2}|b - b_n| \leq \frac{2}{b^2}\cdot\tilde{\varepsilon} = \varepsilon. \blacksquare$$

Twierdzenie (o trzech ciągach.)
Niech $(a_n), (b_n), (c_n)$ będą ciągami liczb rzeczywistych takimi, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_n \leq b_n \leq c_n$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$ to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \geq g - \varepsilon$ dla $n > N_1$. Podobnie, istnieje N_2 że $c_n \leq g + \varepsilon$ dla $n > N_2$. Połóżmy $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Wówczas $g - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq g + \varepsilon$ dla $n > N_3$ czyli $|b_n - g| < \varepsilon$ $\blacksquare$

Przykłady (a) $c > 1$ $1 < \sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{n}$ dla $n > c$ stąd $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$. Podobnie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{c}} = 1$.

(b) $4 \leq \sqrt[n]{3^n + 4^n} \leq \sqrt[n]{2}\, 4 \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$

Czyli $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} = 4$

Ciągi monotoniczne (5)

<u>Definicja</u> Ciąg liczb rzeczywistych jest ① malejący jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} < a_n$

② rosnący jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} > a_n$

③ niemalejący jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} \geq a_n$

④ nierosnący jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} \leq a_n$

Jeśli ciąg (b_n) spełnia jeden z powyższych warunków to mówimy, że jest monotoniczny.

Twierdzenie

Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Dowód przeprowadzimy dla ciągu niemalejącego (a_n). Niech $M = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wykażemy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = M$.

istnieje $x \in \{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ t. że $x \geq M-\varepsilon$ dla pewnego $N\in\mathbb{N}$.

Niech $x = a_N$

Wówczas ~~dla $n > N$~~ mamy $M \geq a_n \geq x \geq M-\varepsilon$ dla wszystkich $n > N$ (czyli $|a_n - M| \leq \varepsilon$) $\square$

Przykład

Niech $a_1=\sqrt{6}$ i $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$ dla $n\in\mathbb{N}$

$a_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}$, $a_3=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$, $a_4=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$

Sprawdzić, że a_n jest jest ciągiem zbieżnym i wyznaczyć jego granicę.

1 Ciąg a_n jest rosnący:

$\sqrt{6+a_n} \overset{?}{>} a_n$. Jest jasne, że $a_n > 0$

$6+a_n \overset{?}{>} a_n^2 \Rightarrow 0 > a_n^2-a_n-6=(a_n+2)(a_n-3)$

czyli a_n jest rosnący jeśli $a_n\in(0,3)$

Z drugiej strony $a_1=\sqrt{6}<3$. i

jeśli $0<a_n<3$ to $a_{n+1} = a_n+6<9$

czyli $a_n<3$. Wniosek a_n rosnący i ograniczony. Jak wyznaczyć jego granicę:

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{6+a_n} \\ \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ g & = & \sqrt{6+g} \end{array} \Rightarrow g=3 \quad \blacksquare$$