Podciągi i twierdzenie Bolzano-Weierstrasse ①

Definicja Jeśli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem a $k_1<k_2<k_3$ jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ określony wzorem $y_n = x_{k_n}$ $n=1,2,3,$ nazywany podciągiem ciągu (x_n)

Przykład $y_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$ jest podciągiem ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Uwaga: podciąg ciągu zbieżnego (x_n) do g jest ciągiem zbieżnym do g.

Lemat Każdy ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg monotoniczny.

Dowód: Dla $n\in\mathbb{N}$ połóżmy $A_n=\{a_m \ m\geq n\}$.

Dwa przypadki: ① W każdym A_n istnieje element największy
② W którymś A_n nie istnieje el. największy.

Przypadek ① Niech a_{k_1} będzie największy w A_1. Jak wybrać a_{k_2}?
Rozważmy zbiór $A_{k_1+1}=\{a_{k_1+1}, a_{k_1+2}, \ldots\}$. Niech $a_{k_2}\in A_{k_1+1}$ będzie największy w A_{k_1+1}. Oczywiście $k_2 \geq k_1+1$. Zauważmy, że $a_{k_1}\geq a_{k_2}$ bo $A_1 \supset A_{k_1+1}$. Podobnie wybieramy a_{k_3}.

② Przypuśćmy, że w A_m nie ma elementu największego. Niech $a_{k_1}=a_m$. Istnieje $k_2>k_1$ $a_{k_2}\geq a_{k_1}$. Istnieje $k_3>k_2$ $a_{k_3}\geq a_{k_2}$.

Twierdzenie (Bolzano-Weierstrassa) Każdy ciąg ograniczony $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych zawiera podciąg zbieżny.

Dowód $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma podciąg monotoniczny (a_{k_n}). Skoro $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograniczony to podciąg także, a więc a_{k_n} - zbieżny.

Definicja Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych spełnia warunek Cauchy'ego jeśli $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N} \ |a_n-a_m|<\varepsilon$.

Twierdzenie Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek Cauchy'ego.

$\Rightarrow$ Jeśli $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ i $\varepsilon>0$ to niech N będzie takie, że $|a_n-g|<\frac{\varepsilon}{2}$ dla $n>N$. Wtedy, dla $n,m>N$ mamy $|a_n-a_m|=|a_n-g+g-a_m|<$
$< |a_n-g|+|a_m-g|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

$\Leftarrow$ Przypuśćmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego.
Zauważmy, że (a_n) jest ciągiem ograniczonym. Rzeczywiście:
niech $\varepsilon = 1$ i $N \in \mathbb{N}$ t. że dla $n, m > N$ $|a_n - a_m| < 1$
W szczególności $|a_n - a_N| < 1 \Rightarrow a_n < 1 + a_N$. Jeśli
$M := \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, 1+a_N\}$ to $a_n < M$. Podobnie
dla $m = \min\{a_1, \dots, a_{N-1}, a_N - 1\}$ $a_N < m$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$
Niech a_{k_n} będzie zbieżnym podciągiem a_n oraz
$g = \lim_{n\to\infty} a_{k_n}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$ t. że
$|a_{k_n} - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $n > N_1$. Istnieje $N_2 \in \mathbb{N}$
t. że $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $n > N_2$. Niech $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Wtedy, $n > N_3$
i $n > N_3$. Ustalmy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $k_{n_0} > N_3$
$$|a_n - g| \leq \underbrace{|a_n - a_{k_{n_0}}|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ bo } n, k_{n_0} > N_2} + \underbrace{|a_{k_{n_0}} - g|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ bo } k_{n_0} > N_1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
Zatem $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ $\blacksquare$

- warunek Cauchy'ego pozwala stwierdzić, że jakiś ciąg jest zbieżny bez wskazywania granicy.
- można się posłużyć tym warunkiem aby skonstruować liczby rzeczywiste z wymiernych:
  W zbiorze ciągów liczb wymiernych wprowadzamy relację równoważności: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeśli
  $$\forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n>N} |a_n - b_n| < \varepsilon$$
  Liczba rzeczywista to klasa abstrakcji wymiernych ciągów Cauchy'ego względem tej relacji.

Twierdzenie Stolza:
Motywujący przykład: Ustalmy $k\in\mathbb{N}$ i rozważmy ciąg
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{gdzie } a_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k, \; b_n = n^{k+1}.$$
Zauważmy, że ciąg b_n jest ściśle monotoniczny $b_{n+1} > b_n$ oraz $b_n \to \infty$. Okazuje się, że przy tych warunkach
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

Twierdzenie ③

Przypuśćmy, że b_n jest ściśle monotoniczny oraz $b_n \neq 0$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem takim, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=g$

Jeśli zachodzi, któryś z warunków

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ to $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = g$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

<u>Dowód</u>: Można założyć, że ciąg b_n jest rosnący. Ustalamy $\varepsilon > 0$. Ponadto weźmy $\eta \in (0, \frac{1}{2}]$ i znajdźmy k. t. że $\forall s > k: g-\eta < \frac{a_{s+1}-a_s}{b_{s+1}-b_s} < g+\eta$. $s \geq k$ Stąd

$$(g-\eta)(b_{s+1}-b_s) < a_{s+1}-a_s < (g+\eta)(b_{s+1}-b_s) \text{ dla } s>k$$

$n > m \geq k$

Dodając stronami dla $s = m, m+1, \ldots, n$ a następnie dzieląc przez $b_n - b_m$ mamy

$$(g-\eta) \leq \frac{a_n-a_m}{b_n-b_m} \leq (g+\eta) \qquad (*)$$

Przypadek ① $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ oraz $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Przechodząc do granicy $n\to\infty$ w $(*)$ mamy $g-\eta \leq \frac{a_m}{b_m} \leq g+\eta$ dla $m \geq k$.
Możemy więc wziąć $\eta = \varepsilon$.

Przypadek ② Trudniejszy:

Obliczamy
$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}\right| = \left|\frac{a_n b_k - a_k b_n}{b_n(b_n-b_k)}\right| \leq \underbrace{\left|\frac{a_k}{b_n-b_k}\right|}_{\leq \eta} + \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \cdot \underbrace{\left|\frac{b_k}{b_n-b_k}\right|}_{\leq \eta}$$
dla dostatecznie dużych n.

W szczególności
$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}\right| + \left|\frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}\right| \leq \eta\left|\frac{a_n}{b_n}\right| + \eta + |g| + \eta.$$

Zatem $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{2\eta+|g|}{1-\eta}$ dla dost. d. n. Widzimy, że $\frac{|a_n|}{|b_n|}$ jest ciągiem ograniczonym. Ostatecznie.

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - g\right| \leq \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n-a_k}{b_n-b_k}\right| + \left|\frac{a_n-a_k}{b_n-b_k} + g\right| \leq M\cdot\eta + \eta + g + \eta = (M+g+1)\eta$$

dla dostatecznie dużych n. ∎