Funkcje wykładnicze i logarytm c.d.

Dla $x \in \mathbb{R}$ definiujemy ciąg $a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Wiemy, że dla $n>|x|$ ciąg $a_n(x)$ jest rosnący.

Dla $x \le 0$: $0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le 1$. Zatem $a_n(x)$ jest zbieżny do granicy oznaczonej $a(x)$. Z uwagi na własności $a_n(x)$ widzimy, że $0<a(x)\le 1$. Dla $x>0$ rozważmy wyrażenie

$$\underbrace{a_n(x)\cdot a_n(-x)}_{\downarrow n\to\infty \quad a(-x)>0} = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = \left\{ \begin{array}{l} a_n = -\frac{x^2}{n^2}, \; n\cdot a_n = -\frac{x^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ (1+a_n)^n \longrightarrow 1 \end{array} \right\}$$

Wniosek $a_n(x)$ jest ciągiem zbieżnym oraz $a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \frac{1}{a(-x)}$

czyli $a(x)\cdot a(-x) = 1$.

Udowodnimy, że $a(x+y) = a(x)\cdot a(y)$.

W tym celu rozważmy

$$\frac{a_n(x)\,a_n(y)}{a_n(x+y)} = \frac{\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right]^n}{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n} =$$

$$= \left(\frac{1+\frac{x+y}{n}+\frac{x\cdot y}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{\frac{x\cdot y}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_n = \frac{\frac{x\cdot y}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}; \; n\tilde{a}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ (1+\tilde{a}_n)^n \longrightarrow 1 \end{array} \right\}$$

stąd $\frac{a(x)\,a(y)}{a(x+y)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(x)\,a_n(y)}{a_n(x+y)} = 1$.

(3) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\; a(x) \ge 1+x$ gdyż $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \overset{NB}{\ge} 1+x$ dla dost. dużych n.

(4) Z p. (3) $\frac{1}{a(x)} = a(-x) \ge 1-x$ i gdy $1-x>0$ to $a(x) \le \frac{1}{1-x}$.

(3) i (4) $\Rightarrow \forall_{x<1}\; 1+x \le a(x) \le \frac{1}{1-x}$.

(5) Ciągłość $a(x)$: przypuśćmy, że $x_n \longrightarrow x$, gdzie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

$$a(x_n)-a(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{z tw. 3 ciągach}} 0.$$

$$0 \xleftarrow{n\to\infty} a(x)(1+x_n-x-1) \le a(x)(a(x_n-x)-1) \le a(x)\left(\frac{1}{1-(x_n-x)}-1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

(6) $y>x$. Rozważmy $a(y)-a(x) = a(x)\left(a(y-x)-1\right) \overset{(3)}{\ge} a(x)\cdot(y-x) > 0$. $\blacksquare$

Od tej pory piszemy $\exp(x) = a(x)$.

$\exp(1) = e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\exp(m) = \exp(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m\text{-razy}}) = [\exp(1)]^m = e^m$ dla $m\in\mathbb{N}$

$\left[\exp\left(\frac{k}{l}\right)\right]^l = \exp(k) = e^k \Rightarrow \exp\left(\frac{k}{l}\right) = \sqrt[l]{e^k} = e^{\frac{k}{l}}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ będziemy pisać $\exp(x) = e^x$

Funkcje wykładnicze i logarytm c.d.

Uwaga: Dla $|x|<\frac{1}{2}$ $\exp(x) - 1 - x \leqslant \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{1-(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} \leqslant 2x^2$

Iloraz różnicowy dla $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\left| \frac{\exp(x+h_n) - \exp(x)}{h_n} - \exp(x) \right|$

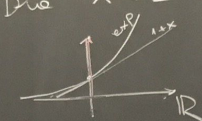
$= \exp(x) \cdot \left| \frac{\exp(h_n) - 1}{h_n} - 1 \right| = \exp(x) \left| \frac{\exp(h_n) - 1 - h_n}{h_n} \right| \leqslant \frac{\exp(x) \cdot 2 \cdot h_n^2}{h_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Podsumowując $\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$

Skoro $\exp(x) \geqslant 1 + x$ to $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$.

$\exp$ rośnie w $+\infty$ do $+\infty$.

Dla $x<1$ $\exp(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$ a zatem $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.



Innymi słowy $\exp$ jest bijekcją $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}_{>0}$

Funkcja odwrotna do $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ jest funkcja $\log : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$. Podstawowe własności

$\exp(\log(y)) = y$ dla $y \in \mathbb{R}_{>0}$; $\log(\exp(x)) = x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

② $\log y_1 y_2 = \log y_1 + \log y_2$

gdyż $\exp(\log(y_1 y_2)) = y_1 y_2$ a $\exp(\log(y_1) + \log(y_2)) =$

$= \exp(\log(y_1)) \exp(\log(y_2)) = y_1 \cdot y_2$.

③ Skoro $\exp(x) \geqslant 1 + x$ to biorąc $x = \log y$ $y \geqslant 1 + \log y$ $\forall_{y \in \mathbb{R}_{>0}}$

④ Skoro $\exp(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$ dla $x<1$ to gdy $\log y < 1$ i $y>0$

mamy $y \leqslant \frac{1}{1-\log y} \Rightarrow 1 - \log y \leqslant \frac{1}{y} \Rightarrow \log y \geqslant 1 - \frac{1}{y} = \frac{y-1}{y}$.

Zauważmy, że $\iff y<e$ ... dla $0<y<e$

$\frac{y-1}{y} \leqslant \log y \leqslant y - 1$. W szczególności dla $t = y - 1$

czyli dla $-1 < t < e-1$ mamy $\boxed{\frac{t}{1+t} \leqslant \log(1+t) \leqslant t. \quad \text{dla } -1<t<1}$

Wniosek $\log : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągły

$\mathbb{R}_{>0} \ni y_n \longrightarrow y \in \mathbb{R}_{>0}$ $\log(y_n) - \log(y) = \log\left(\frac{y_n}{y}\right) = \log\left(1 + \underbrace{\frac{y_n}{y} - 1}_{t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

w szczególności $\underbrace{\frac{t_n}{1+t_n}}_{0 \xleftarrow[n\to\infty]{}} \leqslant \log(1 + t_n) \leqslant t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Własności log. ① log jest ściśle rosnącą funkcją.

② $\log y_1 y_2 = \log y_1 + \log y_2$

gdyż $\exp(\log(y_1 y_2)) = y_1 y_2$ a $\exp(\log(y_1)+\log(y_2)) =$

$= \exp(\log(y_1)) \exp(\log(y_2)) = y_1 \cdot y_2$.

③ Skoro $\exp(x) \geq 1+x$ to biorąc $x = \log y$ $\quad y \geq 1+\log y \quad \forall_{y \in \mathbb{R}_{>0}}$

④ Skoro $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$ dla $x<1$ to gdy $\log y < 1$ i $y>0$

mamy $y \leq \frac{1}{1-\log y} \Rightarrow 1-\log y \leq \frac{1}{y} \Rightarrow \log y \geq 1-\frac{1}{y} = \frac{y-1}{y}$.

Zauważmy, że ⟺ $y<e$. Czyli dla $0<y<e$

$\frac{y-1}{y} \leq \log y \leq y-1$. W szczególności dla $t = y-1$

czyli dla $-1<t<e-1$ mamy $\boxed{\frac{t}{1+t} \leq \log(1+t) \leq t. \quad \text{dla } -1<t<1.}$

<u>Wniosek</u> $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ jest ciągły

$\mathbb{R}_{>0} \ni y_n \to y \in \mathbb{R}_{>0}$ $\quad \log(y_n) - \log(y) = \log\left(\frac{y_n}{y}\right) = \log\Big(1+\underbrace{\frac{y_n}{y}-1}_{t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

w szczególności $t_n \ldots \leq \log(1+t) \leq t \longrightarrow 0$

Szeregi liczb rzeczywistych.

<u>Definicja</u> Szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy parę ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ oraz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gdzie $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

wyrazy szeregu $\quad$ ciąg sum częściowych

Jeśli ciąg sum częściowych jest zbieżny do granicy $s \in \mathbb{R}$ to mówimy, że szereg zbieżny i piszemy $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Przykład: Weźmy $|q|<1$ i rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

Wyrazy szeregu $a_n = q^n$. Ciąg sum częściowych

$s_n = q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{(1-q^{n+1})}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

Czy szereg $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

Kartkówka. Niech $X = \{1,2,3,4,5\}$. Znaleźć najmniejszą relację równoważności $R \subset X \times X$ t. że $\{(1,3),(1,4),(2,5)\} \subset R$. Wypisać klasę abstrakcji el. $1 \in X$.