$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ciąg sum częściowych $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

wyrazy szeregu

Stwierdzenie (warunek konieczny zbieżności szeregu)

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód: $s_n - s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$s_n \xrightarrow{n\to\infty} s$, $s_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} s$, $s - s$

Wniosek Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny $\iff |q| < 1$.

Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

Stwierdzenie (Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregu):

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy

(*) $\forall_{\varepsilon>0} \exists N \in \mathbb{N}$: $n > m > N$ to $|a_m + a_{m+1} + \dots + a_n| < \varepsilon$

Dowód: Warunek (*) jest warunkiem Cauchy'ego dla ciągu s_n

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_N$ $n, m > N$ $|s_n - s_{m-1}| < \varepsilon$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $n > m$. Wtedy $s_n - s_{m-1} = \sum_{1}^{n} a_n - \sum_{1}^{m-1} a_n = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$

Przykład Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie spełnia war. Cauchy'ego.

Niech $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ustalony N i niech $m > N$.

Zauważmy, że $\underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m}}_{m+1} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m}}_{m+1} = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{1}{2} > \frac{1}{2} = \varepsilon$

Przykład Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

Ciąg sum częściowych s_n jest ciągiem rosnącym. Wystarczy więc pokazać, że s_n jest ograniczony. W tym celu zauważmy, że $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, a z tego wynika, że

$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$.

Tą granicę daje się policzyć: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Stwierdzenie Jeśli wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie to szereg ten jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy ciąg sum częściowych s_n jest ograniczony.

Dowód. Jeśli szereg jest zbieżny to ciąg sum częściowych, jako ciąg zbieżny jest ograniczony. W drugą stronę: Ciąg sum częściowych jest rosnący (bo wyrazy >0) a więc jeśli jest on ograniczony to jest zbieżny.

Stwierdzenie (Kryterium porównawcze wersja 1)

Niech $\sum_1^\infty a_n$, $\sum_{n=1}^\infty b_n$ będą szeregami o wyrazach dodatnich.

Przypuśćmy, że istnieje stała $c>0$ t. że $a_n \le c\, b_n$ (dla dost. dużych n wystarczy.)

Wówczas (i) jeśli szereg $\sum_{n=1}^\infty b_n$ jest zbieżny to $\sum_{n=1}^\infty a_n$ także.

(ii) jeśli szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest rozbieżny to $\sum_{n=1}^\infty b_n$ także.

<u>Dowód</u> Przypuśćmy, że $\sum_{n=1}^\infty b_n$ jest zbieżny oraz M będzie ograniczeniem ciągu sum częściowych $\sum_1^\infty b_n$. Wtedy $\sum_{k=1}^n a_k \le c\sum_{k=1}^n b_k \le cM$

Jeśli $\sum_{n=1}^\infty a_n$ nie jest zbieżny to ciąg $\sum^n a_k$ nie jest ograniczony.

Wtedy $\sum_{k=1}^n b_k \ge \frac{1}{c}\cdot\sum_{k=1}^n a_k$ a zatem $\sum_{k=1}^n b_k$ nie tworzą ciągu ograniczonego.

Wniosek 1.

Jeśli $a_n, b_n>0$ oraz $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} > 0$ (istnieje i jest większa od zera.) wówczas szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest $\sum_1^\infty b_n$.

Dowód: Istnieje C, że $\frac{1}{C} < \frac{a_n}{b_n} < C$ dla dost. dużych n.

0, $g=\lim\frac{a_n}{b_n}$, $\mathbb{R}$

Zatem $a_n \le C b_n$ i $b_n \le C\cdot a_n$ dla dost dużych n-ów. Korzystamy z kryt. porównawczego.

Wniosek 2. $a_n, b_n>0$ i przypuśćmy, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{b_{n+1}}{b_n}$ dla d. d. n-ów

Wtedy ① jeśli $\sum_{n=1} b_n$ jest zbieżny to $\sum_{n=1}^\infty a_n$ także.

② jeśli $\sum_1 a_n$ jest rozbieżny to $\sum_1^\infty b_n$ też.

Dowód: Bez straty ogólności zał. że $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$.

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1 \le \frac{b_{n+1}}{b_n}\cdots\frac{b_2}{b_1}\cdot a_1 = \underbrace{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)}_{=c} b_{n+1}$$

Tw (Kryterium zagęszczeniowe)

Niech $a_n>0$ będzie ciągiem malejącym i $a_{n+1}\le a_n$ $n\in\mathbb{N}$.

Wówczas szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1} b_n$ gdzie $b_n = 2^n\cdot a_{2^n}$.

Przykłady: (a) dla $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n = 2^n\cdot\frac{1}{2^n} = 1$.

(b) dla $a_n = \frac{1}{n\log n}$; $b_n = \frac{2^n}{2^n\log 2^n} = \frac{1}{n\log 2}$

rozbieżny gdyż rozbieżny

(c) dla $a_n=\frac{1}{n(\log n)^2}$; $b_n = \frac{2^n}{2^n(n\log 2)^2} = \frac{1}{n^2(\log 2)^2}$

zbieżny bo zbieżny.

(d) dla $p\in\mathbb{R}$ $a_n=\frac{1}{n^p}$; $b_n = \frac{2^n}{2^{np}} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n = q^n$

gdzie $q=\frac{1}{2^{p-1}}$; $q<1 \Leftrightarrow p-1>0 \Leftrightarrow p>1$.

Zatem $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p>1$.

Dowód: Bez straty ogólności zał. że $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ $\forall_{n \in \mathbb{N}}$.

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdots \frac{b_2}{b_1} \cdot a_1 = \underbrace{\frac{a_1}{b_1}}_{=c} b_{n+1}.$$

Tw (Kryterium zagęszczeniowe) Niech $a_n > 0$ będzie ciągiem malejącym i $a_{n+1} \leq a_n$ $n \in \mathbb{N}$.
Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg $\sum_{}^{\infty} b_n$ gdzie $b_n = 2^n \cdot a_{\dots}$

Przykłady: (a) dla $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$.

(b) dla $a_n = \frac{1}{n \log n}$; $b_n = \frac{2^n}{2^n \log 2^n} = \frac{1}{n \log 2}$

rozbieżny gdyż rozbieżny

(c) dla $a_n = \frac{1}{n (\log n)^2}$; $b_n = \frac{2^n}{2^n (n \log 2)^2} = \frac{1}{n^2 (\log 2)^2}$

zbieżny bo zbieżny.

(d) dla $p \in \mathbb{R}$ $a_n = \frac{1}{n^p}$; $b_n = \frac{2^n}{2^{np}} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n = q^n$

gdzie $q = \frac{1}{2^{p-1}}$; $q < 1 \iff p-1 > 0 \iff p > 1$

Zatem $\sum 1$ ...

Dowód Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że

$$(**) \quad \underbrace{a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \dots + a_{2^{n+1}}}_{2^n\text{-wyrazów}} \leq \overbrace{2^n a_{2^n}}^{b_n} = 2 \cdot 2^{n-1} a_{2^n} \leq 2\Big(\underbrace{a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}}_{2^{n-1}}\Big)$$

Sumujemy $(**)$ po $n \in \{1, \dots, N\}$

$$-a_1 - a_2 + \sum_{n=1}^{2^{N+1}} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n \leq 2 \cdot \sum_{n=1}^{2^N} a_n - 2a_1.$$

Z tego układu nierówności widać, że ciąg sum częściowych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy ogr. jest ciąg sum częściowych $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Zatem jeden jest zbieżny $\iff$ drugi jest zbieżny $\square$ zbieżny