W_1

Algebra i geometria

5.10.2011

Pawel.Kasprak@fuw.edu.pl

www.fuw.edu.pl/~pkasp
Hoża 74 3 piętro
2 dni później
podr. W:
- Stanisław Zakrzewski Algebra i geometria
- P. Urbański
- Andrz. Białynicki Algebra liniowa

ćw.
J. Jezierski
Od liczb zespolonych do kwadryk. zb. zad. z algebry z rozwiąz.

$\mathbb{N}$ $\{0,1,2,3,\dots\}$

równanie typu $t+2=7$ $\quad t\in\mathbb{N}$
$t=5$

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$

$t+7=2 \quad t\in\mathbb{Z}$

$2t+1=4 \quad t\in\mathbb{Q} \quad \mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$

$t^2=2 \quad t\in\mathbb{R} \quad \mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

ogólniej:

$at^2+bt+c=0 \qquad b^2-4ac\geq 0$

$t_{\pm}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

w szczególności $t^2=-1 \qquad t=\sqrt{-1}=i$

<u>Rozważmy r-nie 3-go stopnia</u>

$t^3+at^2+bt+c=0$

$t^3+\underbrace{3t\frac{a^2}{3^2}}+3t^2\cdot\frac{a}{3}+\underbrace{\left(\frac{a}{3}\right)^3}-3t\frac{a^2}{3^2}-\left(\frac{a}{3}\right)^3=$
$=t^3+t^2a$

$\left(t+\frac{a}{3}\right)^3+bt+c-\left(\frac{a}{3}\right)^3-3\left(\frac{a}{3}\right)^2t=0$

Jak rozw. równania postaci $y^3+py+q=0$ $(**)$

$(u+v)^3-u^3-v^3\underbrace{-3u^2v-3uv^2}_{-3uv(u+v)}=0 \qquad (u+v)^3-3uv(u+v)-u^3-v^3=0$

Jeśli znajdziemy takie v,u że $\begin{cases}-3uv=p\\-u^3-v^3=q\end{cases}$ to $u+v$ jest rozw. $(**)$
$y_0=u+v$

bo $y_0^3\underbrace{-3uv}_{p}\cdot y_0\underbrace{-u^3-v^3}_{q}$

Rozwiązujemy $\begin{cases}-3uv=p\\-u^3-v^3=q\end{cases} \Rightarrow v=-\frac{p}{3u}$

$-u^3+\left(\frac{p}{3u}\right)^3=q$

$\Rightarrow (u^3)^2+qu^3-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$

$u^3=z \qquad z^2+qz-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$

np.:

$y^3 - 3\sqrt[3]{2}\,y + 2 = 0$ $\qquad$ $y_0 = \sqrt[3]{4}$ jest rozw. równania

$p = -3\sqrt[3]{2}$

$q = 2$

$z^2 + 2z + 2 = 0 \qquad \Delta = -4 \qquad \sqrt{\Delta} = 2i$

$z_0 = -1 + i$

$u^3 = -1 + i$

$$(1+i)^3 = \left\{\begin{matrix} i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{matrix}\right\} = -2 + 2i \Rightarrow \left(\frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = -1 + i$$

$1^3 + 3i^2 + 3i + i^3$

$1 - 3 + 3i + i(-1)$

$-2 - 2i$

$$v = -\frac{p}{3u} = \frac{3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{3(1+i)} = \frac{\sqrt[3]{4}\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{\sqrt[3]{4}(1-i)}{2} = \frac{1-i}{\sqrt[3]{2}}$$

$$y_0 = u + v = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1-i}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$$

Definicja 1

- zamkniętość ze wzgl. na dod., mnożenie, br. el. przeciw., odwrot., ⇒ dają elementy tego podzbioru

Ciałem nazywamy piątkę $(\mathbb{K}, +, 0, \cdot, 1)$ składającą się ze

- zbioru $\mathbb{K}$
- odwzorowania $+ : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (dodawania)
- wyróżnionego elementu $0 \in \mathbb{K}$
- odwzorowania $\cdot$ $\mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (mnożenia
- wyróżnionego elementu $1 \in \mathbb{K}$

i spełniającą następ. war.:

$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (przemienność)

$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ (łączność) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$

$\alpha + 0 = \alpha$

$\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \exists_{\beta\in\mathbb{K}}\ \alpha + \beta = 0$ (element przeciwny)

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

$\alpha(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

$\alpha \cdot 1 = \alpha$

$\forall \alpha \neq 0\ \exists \beta \in \mathbb{K}\ \alpha\cdot\beta = 1 \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$

$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$

Przykłady 1. $(\mathbb{Q}, +, 0, 1, \cdot)$

2. $(\mathbb{R}, +, 0, 1, \cdot)$

3. $\{0, 1\}$ $1+1=0$ dodawanie i mnożenie modulo 2

Ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}^2$ Definiujemy dodawanie:

$(a,b), (c,d) \in \mathbb{K}$ $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

mnożenie:

$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

• wyróżnione elementy $0 = (0,0)$ $(a,b)\cdot(1,0) = (a,b)$
$1 = (1,0)$

• element przeciwny

$\forall (a,b) \in \mathbb{K}, \ (a,b) \neq 0$ $(a,b)\cdot(c,d) = (a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2}\right) =$

$\exists (c,d) \in \mathbb{K}: \ (a,b)\cdot(c,d) = 1$ $= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$

dowód: $(c,d) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Stwierdzenie $(\mathbb{R}^2, +, 0, \cdot, 1)$ jest ciałem

1.) Notacja, obserwacje

$\mathbb{R} \ni a \longmapsto j(a) = (a,0) \in \mathbb{C}$

Własciwości j $j(a_1+a_2) = j(a_1) + j(a_2)$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $j(a_1 \cdot a_2) = j(a_1)\cdot j(a_2)$

2.) $(0,1)^2 = (-1,0) = -1$ $(0,1) = i$

3.) $(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a\cdot 1 + b\cdot i = a+bi$

$i^2 = -1$

$(a+bi)(c+di) = \underline{ac} + adi + bci - \underline{bd} = (ac-bd) + (b\cdot c + ad)i$

4.) Od tej pory liczbę zespoloną oznaczamy symbolem $z \in \mathbb{C}$.
Jeśli $z = a+bi$ to a nazywamy częścią rzeczywistą z i oznaczamy $Re(z) = a$
b nazywamy częścią urojoną z i oznaczamy $Im(z) = b$

$y^3+ay^2+by+c=0 \longrightarrow x^3+px+q=0$ *

$y = x - \frac{a}{3}$ $\qquad (u+v)^3 - 3uv(u+v) - u^3 - v^3 = 0$

$(x+\frac{a}{3})^3 - x^3 - 3x\frac{a^2}{9} - 3x^2\frac{a}{3} - \frac{a^3}{27} = 0$

$(x+\frac{a}{3})^3 - x^3 - x\cdot\frac{a^2}{3} - x^2 a - \frac{a^3}{27} = 0$

$\begin{cases} -3uv = p \\ -u^3 - v^3 = q \end{cases}$ $\qquad x = u+v$ rozwiązanie *

$v = -\frac{p}{3u}$

$(u^3)^2 + qu^3 - (\frac{p}{3})^3 = 0$

$u^3 = z$

$z^2 + qz - (\frac{p}{3})^3 = 0$

z wzorów Vieta $u^3+v^3=-q$ $\qquad v^3$ rozwiązaniem

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$ $\qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$

$x^3 - 3\sqrt[3]{2}\cdot x + 2 = 0$ $\qquad p = -3\sqrt[3]{2}$

$q = 2$

$\Delta = q^2 + 4\cdot(\frac{p}{3})^3$

$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2+4(\frac{p}{3})^3}}{\sqrt{2^2}}$

$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$

$u^3 = -1 + \sqrt{1 - (\sqrt[3]{2})^3} = -1 + \sqrt{-1}$

$(1+i)^3 = 1 + 3\cdot i^2\cdot 1 + 3i\cdot 1 + i^3 = 1 - 3 + 3i + (-1)\cdot i = -2 + 2i = 2(-1+i) \Rightarrow \left(\frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = -1+i$

$v = -\frac{p}{3u} = \frac{3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{3\cdot(1+i)} = \frac{\sqrt[3]{4}}{1+i}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{\sqrt[3]{4}(1-i)}{1-i^2} = \frac{\sqrt[3]{4}(1-i)}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}(1-i)}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1-i}{\sqrt[3]{2}}$

$x_0 = u+v$ $\qquad x_0 = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1-i}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$

a_0

y^3+ay^2+by+c

$\downarrow$

x^3+px+q

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$(a+bi)(c+di)=ac+a\cdot di+b\cdot ci+i^2\cdot bd=ac-bd+(ad+bc)i$

$-(a+bi)=(-a)+(-b)i$

$(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$

0 (0,0)
1 (1,0)
i (0,1)

$(a,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$

12.10.2011 r.

W2

Ciało $(\mathbb{K},+,0,\cdot,1)$

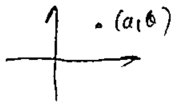
Przykłady (1) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ - ciała nieskończone

(2) p - l. pierwsza $\forall_p$, $k\in\mathbb{N}$ $\exists!$ (istnieje dokładnie jedno) ciało

$\exists!$ o liczbie elementów równej p^k

np. $Z_3=\{0,1,2\}$ dod. i mnoż. modulo 3 : $2+2=4 \bmod 3=1$
$2\cdot 2= \quad =1$

Liczby zespolone: $z=a+ib\in\mathbb{C}$

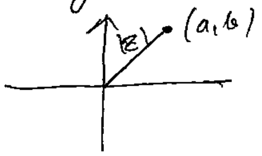


$i^2=-1$

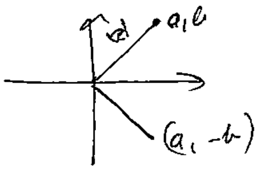
$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$

$z=a+ib$ $a,b\in\mathbb{R}$ $\mathrm{Re}\,z=a$, $\mathrm{Im}\,z=b$

Df: Niech $z\in\mathbb{C}$, $z=a+bi$. Modułem z nazywamy liczbę rzeczywistą dodatnią $\sqrt{a^2+b^2}$ i oznaczamy $|z|$



$a-ib$ nazywamy sprzężeniem zespolonym liczby z i oznaczamy symbolem $\bar{z}\in\mathbb{C}$



Własności:

1.) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar{z}}{2}$

2.) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

3.) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ $\qquad$ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ $\qquad$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

4.) $\bar{\bar{z}} = z$

5.) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ $\qquad$ $|z+w| \leqslant |z| + |w|$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

$n = 2011$

$$(1+i)^{2011} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot (i)^{n-k}$$

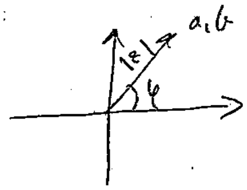
Przypuśćmy, że $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ $\qquad$ Wtedy $z = |z| \cdot \dfrac{z}{|z|}$, niech $w = \dfrac{z}{|z|}$

Zauważmy, że $|w| = 1$

$w = a + ib \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

$\Downarrow$

$\exists\, \varphi \in [0, 2\pi[\ : a = \cos\varphi,\ b = \sin\varphi$



$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$

współrzędne biegunowe liczby z.

$|z|$ nazywamy modułem liczby z

$\varphi \in [0; 2\pi[$ − argument (główny) liczby $z \in \mathbb{C}$

Mnożenie liczb zespolonych we współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} z, \ |z|, \ \varphi \\ w, \ |w|, \ \psi \end{cases} \Rightarrow z \cdot w = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |w| (\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$= |z| \cdot |w| \left(\underbrace{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi}_{\cos(\varphi+\psi)} + i \underbrace{(\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cdot\cos\varphi)}_{\sin(\varphi+\psi)} \right)$$

$$z \cdot w = |z \cdot w| \left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) \right)$$

$$\arg.(z w) = \arg(z) + \arg(w)$$

Notacja: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Powyższy rachunek pokazuje, że $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\psi+\varphi)}$

Funkcja wykładnicza $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^t \in \mathbb{R}$

Własność $e^t \cdot e^s = e^{t+s}$

Uwaga: $\exists$ funkcja wykładnicza $z \in \mathbb{C} \longmapsto e^z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

taka, że

(1.) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

(2.) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

(3.) $e^{i\varphi}$ – liczba o module 1

Używając e^z definiujemy $\mathbb{C} \ni z \longmapsto \cos z \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C} \ni z \longmapsto \sin z \in \mathbb{C}$

wzorami:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

Wtedy $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$

Równanie Eulera Wstawiając $\varphi = \pi$ dostajemy

$$e^{i\pi} = -1 \quad \Rightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$e \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$e \overset{def}{=} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$(1+i)^{2011} = \sum_{k=0}^{2011} \binom{2011}{k} 1^{k} (i)^{2011-k}$$

Jeśli $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ ← z w postaci wykładniczej

$$z^n = |z|^n \cdot e^{in\varphi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} \qquad (1+i) = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \frac{\pi \cdot 2011}{4} = \frac{3}{4}\pi + 251 \cdot 2\pi$$

Wtedy $(1+i)^{2011} = (\sqrt{2})^{2011} \cdot e^{\frac{i\pi 2011}{4}} = 2^{1005} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi} =$

$$= 2^{1005} \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{1005}(1+i)$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Def.: Niech $z \in \mathbb{C}$ pierwiastkiem stopnia n z liczby $z \in \mathbb{C}$ nazywamy każdą liczbę $w \in \mathbb{C}$ taką, że $w^n = z$

np. 1.) Znaleźć wszystkie pierwiastki stopnia 4 z liczby -4

$$-4 = 4(-1 + i \cdot 0) = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4e^{i\pi}$$

Szukamy $w = |w| \cdot e^{i\varphi}$ takie, że $w^4 = |w|^4 e^{i4\varphi} = 4e^{-i\pi}$

$$|w|^4 = 4, \quad 4\varphi = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$|w| = \sqrt[2]{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}$ Wystarczy wziąć wszystkie pierwiastki z $k = 0, 1, 2, 3$

$w = \sqrt[2]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)} \in \underbrace{\{1+i, -1-i, -1+i, 1-i\}}$

wszystkie pierw. 4-go stopnia z -4

Stw. Niech $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Wtedy $\exists$ dokładnie n pierwiastków n-tego stopnia z liczby z.

Jeśli $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ to pierwiastki są postaci

$|z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ gdzie $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

D: $w = |w| \cdot e^{i\psi}$ - pierwiastek

Jeśli $w^n = |w|^n \cdot e^{in\psi} = |z| \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow |w| = |z|^{\frac{1}{n}}$ $\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

$\square$

Wielomiany (Od tej pory $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$)

Def.: Wielomianem o współczynnikach w $\mathbb{K}$ nazywamy każdą funkcję $f: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ postaci $\cancel{f(x)} = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, gdzie $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ $\cancel{a_n \neq 0}$

Inaczej f - funkcja wielomianowa

Notacja: Zbiór wielomianów o współczynnikach $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ oznaczamy symbolem $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$)

Uwaga: $\mathbb{K}[x]$ jest zbiorem z dodatkową strukturą. Wielomiany możemy dodawać, mamy 0, możemy mnożyć, mamy 1. Ale nie mamy odwrotności: $\mathbb{K}[X]$ <u>nie jest ciałem</u> (pierścienie)

Oprócz tego $\forall f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ $a_n \neq 0$ def. stopień $f = n$ i oznaczamy go symbolem <u>$\deg f = n$</u>

Dla $f = 0$ definiujemy $\deg f = -\infty$

Stw. $\mathbb{K}$ – ciało, $f, g \in \mathbb{K}[x]$. Wówczas:

(1) $\deg(f+g) \leq \cancel{\deg(f)+\deg(g)}\ \max\{\deg(f), \deg(g)\}$

(2.) $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$

Lemat: Jeśli $f \in \mathbb{K}[x]$ ($f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$), $f(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{K}$ to $a_0 = \ldots = a_n = 0$

D. – indukcja ze względu na stop. wielomian

$0 = f(t+1) - f(t)$ – wielomian stopnia $(n-1)$, który przy najwyższej potędze ma współczynnik $n \cdot a_n$

Indukcja $\Rightarrow n \cdot a_n = 0 \Rightarrow a_n = 0$

$\deg f = n-1$, $f = 0 \Rightarrow a_n = \ldots = a_{n-1} = 0$

Kolokwium 12 grudnia, 9–13 Smyczkowa, SB, S9

www.fuw.edu.pl/~pkasp

zadania pod koniec miesiąca

W3 19.10.2011 r.

$f(x) = x^4 + x^2 + 1 \qquad g(x) = x+2$

$$\begin{array}{l} x^3 \ldots \\ \hline x^4 + x^2 + 1 \div x+2 \\ -x^4 - 2x^3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^3(x+2) - 2x^3 + x^2 + 1 = \\ &= x^3(x+2) - 2x^2(x+2) + 5x^2 + 1 = 0 \\ &= x^3(x+2) - 2x^2(x+2) + 5x(x+2) - 10x + 1 = \\ &= x^3(x+2) - 2x^2(x+2) + 5x(x+2) - 10(x+2) + 21 = \\ &= (x^3 - 2x^2 + 5x - 10)(x+2) + 21 \end{aligned}$$

Niech $q = x^3 - 2x^2 + 5x - 10 \qquad r = 21$

Wtedy $f = q \cdot g + r \qquad \deg r < \deg g$

Stwierdzenie

Niech $f, g \in \mathbb{K}[X]$. Wtedy istnieje $q, r \in \mathbb{K}[X]$ takie, że

$f = q \cdot g + r$, oraz $\deg r < \deg g$.

Ponadto q oraz r są jednoznacznie wyznaczone przez powyższe warunki.

Dowód: Jeśli $\deg f < \deg g$ to przyjmujemy $q = 0 \quad f = r$

Jeśli $\deg f \geq \deg g$ to stos. indukcję ze względu na stopień f.

$f(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_n X^n \qquad g(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \ldots + \beta_m X^m \qquad n \geq m$

$\alpha, \beta \neq 0$

$$\deg\left(f(X) - \frac{\alpha_n X^{n-m}}{\beta_m} g(X)\right) < \deg f$$

Na mocy rozumowania indukcyjnego

$\exists\ r', q'$ takie, że $\deg r' < \deg g$ oraz

$$f(x) - \frac{\alpha_n X^{n-m}}{\beta_m} g(x) = q'(x)\cdot g(x) + r'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{\left(q'(x) + \frac{\alpha_n}{\beta_m} X^{n-m}\right)}_{q(x)} g(x) + r'(x)$$

$$r'(x) = r(x)$$

dostajemy istnienie q i r spełniające warunki twierdzenia.

<u>Jednoznaczność</u>: Przypuśćmy, że $\tilde{q}, \tilde{r}$ też speł. warunki tw. Wtedy $qg + r = \tilde{q}g + \tilde{r}$ $\quad (q-\tilde{q})g = \tilde{r} - r$. Jeśli $q - \tilde{q} \neq 0$

to ~~stopień~~ $\deg (q-\tilde{q})g \geq \deg g$

$\deg(g) > \deg(r - \tilde{r})$ $\quad$ sprzeczność!

W takim razie $q = \tilde{q}$ a wtedy $\tilde{r} - r = 0$ $\square$

Def. Niech $f \in \mathbb{K}[X]$. Każdą liczbę $\xi \in \mathbb{K}$ taką, że $f(\xi) = 0$ nazywamy pierwiastkiem f.

<u>Tw. Bezout</u>

Niech $f \in \mathbb{K}[X]$. Wówczas $\xi \in \mathbb{K}$ jest pierwiastkiem $f \Leftrightarrow$ gdy $\exists\ g \in \mathbb{K}[X]$ takie, że $f(x) = (x - \xi)\cdot g(x)$

Dowód:

$\Leftarrow$ Jeśli q istnieje to $f(\xi)=0$

$\Rightarrow$ 1.) Dzielimy f przez $x-\xi$ $\Rightarrow$ $q\in\mathbb{K}[X]$

oraz $r\in\mathbb{K}[X]$, $\deg r<\deg(x-\xi)$ takie, że

$f(X)=q(x)(x-\xi)+r$ \ stała

Ponieważ

$f(\xi)=0$ to $r=0$

<u>Def (Krotność pierwiastka)</u>

Niech $\xi\in\mathbb{K}$ będzie pierwiastkiem $f\in\mathbb{K}[X]$.
Krotnością ξ nazywamy największą liczbę naturalną $n\in N$ taką że $\exists\, q\in\mathbb{K}[X]$ speł. $f(x)=g(X)(x-\xi)^n$

Wniosek:

Niech $f\in\mathbb{K}[X]$. Wtedy f ($\deg f=n$) ma co najwyżej n pierwiastków (licząc z krotnością, 2 razy ten sam jako 2)

<u>Wielomiany stopnia 3, wzory Cardano</u>

$x^3+px+q=0$ $\quad p,q\in\mathbb{C}$

Metoda Cardano: Szukając $u,v\in\mathbb{C}$ które spełniają r-nie

$$\begin{aligned}-3uv&=p\\ -u^3-v^3&=q\end{aligned}$$

dostajemy pierwiastek $\xi=u+v$

Podstawiając $v = \frac{-p}{3u}$ do 2-go r-nia

dostajemy $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

gdzie $\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ jest jednym z dwóch możliwych pierw.

Wyznaczając u z powyższego r-nia otrzymujemy 3 rozw.:

$u_0, u_0 e^{\frac{2\pi i}{3}}, u_0 e^{\frac{4\pi i}{3}}$

Przyjmując $v_0 = \frac{-p}{3u_0}$ dostajemy odpowiednio 3 rozw.

$v_0, v_0 \cdot e^{\frac{4}{3}\pi i}, v_0 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$

Oraz 3 rozwiązania wyjściowe r-nia:

$\xi_1 = u_0 + v_0 \quad \xi_2 = u_0 e^{\frac{2\pi i}{3}} + v_0 e^{\frac{4\pi i}{3}}, \quad \xi_3 = u_0 e^{\frac{4\pi i}{3}} + v_0 e^{\frac{2\pi i}{3}}$

<u>Czy $x^3 + px + q = (x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)$? tak</u>

1.) Każdy wielomian 3-go stopnia ma 3 pierw. zespolone (z krotn.)

Jeśli nawet $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ to $f(X) = (X - \xi_1)\underbrace{q(X)}_{\text{wiel. st. 2}}$

2.) Jeśli ξ jest pierwiastkiem to $\exists\, u, v$:

$v \cdot u = \frac{-p}{3}$ oraz $\xi = u + v_0 = u - \frac{p}{3u}$

$\Downarrow$

$u^2 - \xi u - \frac{p}{3} = 0$

na ćw

~~Załóżmy~~ Załóżmy, że $p, q \in \mathbb{R}$ oraz istnieją

<u>3 rzeczywiste</u> pierwiastki $x^3 + px + q$ to u i v wyjdą zespolone (dopiero ich suma $\in \mathbb{R}$)

$u, v \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad u = \bar{v}$

Zasadnicze twierdzenie algebry.

Niech $f \in \mathbb{C}[X]$, $\deg f \geq 1$. Wtedy $\exists\, \xi \in \mathbb{C}$ taki, że $f(\xi) = 0$.

Wniosek:

$f \in \mathbb{C}[X]$, $\deg f = n$ ma dokładnie n-pierwiastków zespolonych licząc wraz z krotnościami!

Dowód wniosku: Niech $\xi \in \mathbb{C}$ - pierwiastek. Z tw. Bezout:

$\exists\, q \in \mathbb{C}[X]$, $\deg q = n-1$: $f(X) = (X - \xi)\, q_1(X)$

Niech $\xi_2 \in \mathbb{C}$ - pierw. $q_1 \Rightarrow \exists\, q_2 \in \mathbb{C}$, $\deg q_2 = n-2$ itd.

$f(X) = \alpha_n (X - \xi_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (X - \xi_k)^{n_k}$ gdzie $n_1 + \ldots + n_k = n$

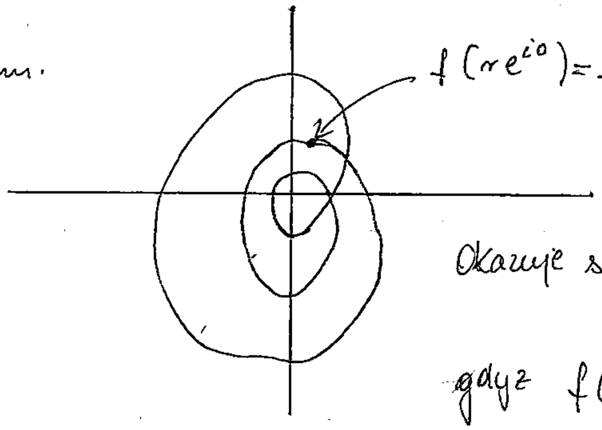
Szkic dowodu: (Zas. tw. algebry)

Przyjmiemy, że $f \in \mathbb{C}[X]$, $\deg f = n \geq 1$ i $f(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{C}$

$\forall r \geq 0$ rozważmy krzywą $\gamma_r = \{ f(re^{i\varphi}) : \varphi \in [0; 2\pi] \}$

γ_r krzywa na pł. $\mathbb{C}$ nie przechodząca przez 0

r - st. wielom.



$f(re^{i0}) = f(re^{i2\pi})$

Krzywa γ_r otoczyła 0 k-razy

Okazuje się, że (1.) dla $r \to \infty$ γ_r okrąża 0 n-krotnie

gdyż $f(X) = \alpha_n X^n \left(1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n X} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\alpha_n X^n}\right)$

$\gamma_r \approx \{ \alpha_n r^n e^{in\varphi} : \varphi \in [0; 2\pi] \}$

(2.) Liczba drażeń nie zależy od r

(3.) Gdy $r \to 0$ bo $\gamma_r \to \alpha_0$

Czyli dla pewnego $r \geq 0$ $\exists \varphi : (re^{i\varphi}) = 0$

więc $z = re^{i\varphi}$ jest pierwiastkiem

Algorytm Euklidesa i NWD $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Def. (1) $f, g \in \mathbb{K}[X]$. Mówimy, że g dzieli f jeśli

$\exists\ w \in \mathbb{K}[x] : f = w \cdot g$

(2) Mówimy, że w jest największym wspólnym dzielnikiem f, g ~~f_1, f_2~~ $\in \mathbb{K}[X]$ jeśli w dzieli f oraz g i gdy ~~f~~ u dzieli f i g to u dzieli w.

Notacja $w = NWD(f, g)$ $\quad w | f \quad w | g$

Tw. Niech $f, g \in \mathbb{K}[X]$. Wtedy istnieje $w = NWD(f, g)$ i dany jest przez ostatnią resztę w następującym algorytmie.

~~f/g~~ $\quad f = q_1 g + r_1 \quad r_1 \neq 0 \quad \deg r_1 < \deg g$

$g = q_2 r_1 + r_2 \quad r_2 \neq 0 \quad \deg r_2 < \deg r_1$

$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad r_3 \neq 0 \quad \deg r_3 < \deg r_2$

...

$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$

$r_{k-1} = q_{k+1} + r_k \quad \Rightarrow NWD(f, g) = r_k$

5.12. analiza
12 grudnia - kolokwium z algebry

Największy wspólny dzielnik, algorytm Euklidesa $\quad \mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Def.: Niech $f, g, w \in \mathbb{K}[x]$

(1) Mówimy, że w dzieli f (lub g) jeśli $\exists\, u \in \mathbb{K}[x]: f = w \cdot v$ (lub $g = w \cdot u$)

Jeśli tak jest to piszemy $w | f$ (-"- $w | g$)

(2) Mówimy, że w jest największym wspólnym dzielnikiem f i g jeśli $w | f$ i $w | g$ oraz jeśli $u \in \mathbb{K}[x]$ $u | f$ i $u | g$ to $u | w$. Jeśli w spełnia powyższe warunki to piszemy $w = NWD(f, g)$

Obserwacja: Jeśli $NWD(f, g)$ istnieje to jest wyznaczony z dokładnością do stałej multiplikatywnej, tzn jeśli w_1 i w_2 są $NWD(f, g)$ to $\exists\ \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ t, że $w_1 = \lambda w_2$

Dowód: $w_1 | w_2$ i $w_2 | w_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \deg w_1 \leq \deg w_2 \\ \deg w_2 \leq \deg w_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \deg w_1 = \deg w_2$

Ponieważ $w_1 | w_2$ to $\exists\ v \in \mathbb{K}[x]: w_1(x) = v(x) \cdot w_2(x)$
Teraz, ponieważ $\deg w_1 = \deg w_2$ to $\deg v = 0 \Rightarrow v \in \mathbb{K}$

Przyjmując $v = \lambda$ dostajemy $w_1 = \lambda w_2$

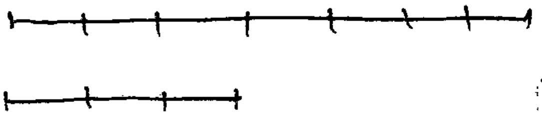
Tw. Niech $f, g \in \mathbb{K}[x]$ Wtedy $\exists\, w \in \mathbb{K}[x]$ t, że

- $w \mid f$ oraz $w \mid g$
- jeśli dla pewnego $u \in \mathbb{K}[X]$ mamy $u \mid f$ i $u \mid g$ to

$u \mid w$ (a więc $w = NWD(f, g)$)

Idea dowodu

n_1



n_2

$n_1 = q_1 n_2 + r_1$ $\quad q_1 = 2$

$r_1 = 1$

$n_2 = q_1 r_1 + r_2$

Jeśli $r_2 = 0$ to $NWD(n_1, n_2) = r_1$

Rozważmy następujący algorytm:

(1) Dzielimy f przez g

$f = q_1 g + r_1 \quad r_1 \neq 0 \quad \deg r_1 < \deg g$

(2) Dzielimy g przez r_1

$g = q_2 r_1 + r_2$

$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad r_3 \neq 0 \quad \deg r_3 < \deg r_2$

$\vdots$

$r_{k-3} = q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1} \quad r_{k-1} \neq 0 \quad \deg r_{k-2} < \deg r_{k-3}$

$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$

$r_{k-1} = q_{k+1} \cdot r_k$

Pokażemy, że $NWD(f, g) = r_k$

Dlaczego: Zauważmy, że $r_k \mid r_{k-1}$ i $r_k \mid r_{k-2}$

stąd $r_k \mid r_{k-3}$ i $r_k \mid r_{k-2}$

„Wędrując" w górę algorytmu dojdziemy do f i g:

$r_k \mid f$ i $r_k \mid g$

Pozostało wykazać, że jeśli $u \in \mathbb{K}[X]$ dzieli f oraz g to u dzieli r_K

Zauważmy, że $u | r_1$ bo $r_1 = f - q_1 g$

Podobnie $u | r_2$ bo $r_2 = g - q_2 r_1$ oraz $u | g$ i $u | r_1$

„Wędrując" w dół algorytmu dostajemy $u | r_k$

Stwierdzenie

Niech $f, g \in \mathbb{K}[X]$ i niech $w = NWD(f, g)$

Wtedy $\exists\, a, b \in \mathbb{K}[X]$ t, że $w = a \cdot f + b \cdot g$

np.

Jeśli $1 = NWD(f, g)$. Wtedy $\exists\, a, b \in \mathbb{K}[X] : 1 = af + bg$

więc f i g nie mają żadnego wspólnego pierwiastka bo jeśli $f(\xi) = g(\xi) = 0$ to

$$1 = a(\xi) f(\xi) + b(\xi) g(\xi) = 0 \qquad 1 \neq 0$$

Dowód stwierdzenia

Wędrujemy w górę algorytmu w następujący sposób

$$NWD(f, g) = r_K = r_{K-2} - q_K r_{K-1} = r_{K-2} - q_K (r_{K-3} - q_{K-1} \cdot r_{K-2}) =$$

$$= (1 + q_K q_{K-1}) r_{K-2} - q_K q_{K-3} = \dots = af + bg$$

Det.: Niech $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[X]$ i niech $w \in \mathbb{K}[X]$

Mówimy, że w jest największym wspólnym dzielnikiem $f_1, \dots, f_n$ ($w = NWD(f_1, \dots, f_n)$) jeśli

1. $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad w | f_i$

2. Jeśli dla $u \in \mathbb{K}[X]$ mamy $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $u | f_i$ to $u | w$

Uwagi:

1. w jest wyznaczone jednoznacznie z dokł. do stałej multiplikatywnej

2. w istnieje i jest zadane w sposób indukcyjny

$$w = NWD(f_1, NWD(f_2, \dots, f_n))$$

np. $NWD(f_1, f_2, f_3) = NWD(f_1, NWD(f_2, f_3))$

Stwierdzenie: Niech $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[X]$ i niech $w = NWD(f_1, \dots, f_n)$

wtedy $\exists\, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K}[X]$ t. że: $w = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \dots + u_n f_n$

Dowód (Indukcyjny): Skoro $w = NWD(f_1, NWD(f_2, \dots, f_n))$ to $\exists\, a, b \in \mathbb{K}[X]$

takie, że $w = a f_1 + b \cdot NWD(f_2, \dots, f_n)$

Stosując krok indukcyjny dostajemy $\tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n \in \mathbb{K}[X]$ t. że $NWD(f_2, \dots, f_n) = \tilde{u}_2 f_2 + \dots + \tilde{u}_n f_n$.

Przyjmując $u_1 = a$, $u_2 = b\tilde{u}_2$, $u_n = b\tilde{u}_n$ dostajemy teze stwierdzenia.

$\square$

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste.

Przypadek $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

Definicja: Niech $f, g \in \mathbb{K}[X]$. Funkcja wymierna to f. postaci $\frac{f}{g}$

$\frac{f}{g}$ jest ułamkiem właściwym jeśli $\deg f < \deg g$

Funkcje wymierne postaci $\frac{\alpha}{(z-\xi)^n}$ nazywamy uł. prostym $\xi \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

Stwierdzenie:

Każda f wymierna właściwa jest sumą ułamków prostych

Dowód:

$f, g \in \mathbb{K}[X]$. Niech $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{C}$ będą zerami $g \in \mathbb{K}[X]$

o krotnościach $n_1, \dots, n_k$ odpowiednio.

W takim razie ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$!) $\exists a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$g(z) = a(z-\xi_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (z-\xi_k)^{n_k}$$

Zauważmy, że $NWD\left((z-\xi_1)^{n_1}, (z-\xi_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (z-\xi)^{n_k}\right) = 1$

więc $\exists\, u_1, u_2 \in \mathbb{C}[X]$

$$1 = u_1(z-\xi_1)^{n_1} + u_2(z-\xi_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (z-\xi_k)^{n_k}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{u_1 f}{a(z-\xi_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (z-\xi_k)^{n_k}} + \frac{u_2 f}{a(z-\xi_1)^{n_1}}$$

$= \exists\, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n \in \mathbb{K}[X]$ t, że $\} = \frac{\tilde{u}_1}{(z-\xi_1)^{n_1}} + \frac{\tilde{u}_2}{(z-\xi_2)^{n_2}} + \dots + \frac{\tilde{u}_k}{(z-\xi_k)^{n_k}}$

np. $\tilde{u}_1 = \frac{u_2 f}{a}$

Można przyjąć, że $\deg \tilde{u}_1 < n_1, \dots, \deg \tilde{u}_k < n_k$

Dlaczego: bo $\deg f < \deg g$ i zawsze można zastąpić

$\tilde{u}_i$ przez $\tilde{\tilde{u}}_i$ gdzie $\tilde{u}_i = q_i (z-\xi_i)^{n_i} + \tilde{\tilde{u}}_i$

Wystarczy więc wyrazić $\dfrac{\tilde{u}_i}{(z-\xi_i)^{n_i}}$ przez sumę ułamków prostych.

Obserwacja:

$\tilde{u}_i \in \mathbb{K}[X]$, $\deg \tilde{u}_i < n_i$. A więc $\exists \alpha_0, \dots, \alpha_l \in K$

~~gdzie $l \le n_i$~~

gdzie $l < n_i$ t, że

$$\tilde{u}_1(z) = \alpha_0 + \alpha_1 (z-\xi_i) + \alpha_2 (z-\xi_i)^2 + \dots + \alpha_l (z-\xi_i)^{n_l}$$

Wtedy
$$\frac{\tilde{u}_i}{(z-\xi_i)^{n_i}} = \frac{\alpha_0}{(z-\xi_i)^{n_i}} + \frac{\alpha_1}{(z-\xi_i)^{n_i-1}} + \dots + \frac{\alpha_l}{(z-\xi_i)^{n_i-l}}$$

W_5 2.11.2011 r.

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ f-cja wymierna $\frac{f}{g}$ gdzie $f, g \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f < \deg g$

Ułamek prosty: $\dfrac{a}{(x-\xi)^n}$, $\xi \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$

Jeśli $\xi_1, \dots, \xi_k$ - pierwiastki wielomianu $g \in \mathbb{C}[x]$ o krotnościach $n_1, \dots, n_k$ to $\exists$
$$a_{11}, \dots, a_{1n_1}$$
$$a_{21}, \dots, a_{2n_2} \in \mathbb{C}$$
$$\vdots$$
$$a_{k1}, \dots, a_{kn_k}$$

t. że
$$\frac{f}{g} = \frac{a_{11}}{(x-\xi_1)} + \frac{a_{12}}{(x-\xi_1)^2} + \dots + \frac{a_{1n_1}}{(x-\xi_1)^{n_1}} +$$
$$+ \frac{a_{21}}{(x-\xi_1)} + \dots + \frac{a_{2n_2}}{(x-\xi_1)^{n_2}} +$$
$$+ \frac{a_{k1}}{(x-\xi_k)} + \dots + \frac{a_{kn_k}}{(x-\xi_k)^{n_k}}$$

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Przypadek $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

Lemat: Niech $f(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$, gdzie $\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}}: a_i\in\mathbb{R}$.
Jeśli $\xi\in\mathbb{C}$ jest pierwiastkiem f to $\overline{\xi}\in\mathbb{C}$ też jest pierwiastkiem f

Dowód: Sprzęgając równanie $f(\xi)=a_0+a_1\xi+\ldots+a_n\xi^n=0$ dostajemy $a_0+a_1\overline{\xi}+\ldots+a_n\overline{\xi}^n=0$ a więc $\overline{\xi}\in\mathbb{C}$ również jest pierwiastkiem f.

Niech $f,g\in\mathbb{R}[X]$. Rozważmy f-cję wymierną $\frac{f}{g}$ (zał. $\deg f<\deg g$)

Potraktujmy g jakby to był wielomian zespolony
Niech $t_1,\ldots,t_l$ - pierwiastki rzeczywiste g o krotnościach $n_1,\ldots,n_l$ oraz niech $\xi_{l+1},\overline{\xi}_{l+1},\ldots,\xi_k,\overline{\xi}_k$ będą pierwiastkami które nie są rzeczywiste, o krotnościach $n_{l+1},\ldots,n_k$.

Rozkładając $\frac{f}{g}$ na ułamki proste nad $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ dostajemy sumę wyrażeń postaci:

$$\frac{a}{(x-t_i)^j}\qquad \begin{matrix} i\in\{1,\ldots,l\} \\ j\in\{1,\ldots,n_i\}\end{matrix}\qquad \text{- wyrażenia rzeczywiste}$$

oraz następującej postaci $\dfrac{a}{(x-\xi_i)^j}+\dfrac{\overline{a}}{(x-\overline{\xi}_i)^j}$

$i\in\{l+1,\ldots,k\}$
$j\in\{1,\ldots,n_i\}$

Bierzemy wspólny mianownik i mamy:

$$\frac{a(x-\overline{\xi_i})^j + \overline{a}(x-\xi_i)^j \overset{\text{ozn}}{=} w}{(x^2 - 2\mathrm{Re}(\xi_i)\cdot X + |\xi|^2)^j = p}$$

$(x-\xi_i)(x-\overline{\xi}) =$
$= x^2 - x\overline{\xi} - \xi x + \xi \cdot \overline{\xi} =$
$= x^2 - x(\overline{\xi}+\xi) + |\xi|^2 =$
$= x^2 - x\,2\mathrm{Re}\,\xi + |\xi|^2$

W liczniku dostajemy wielomian $w \in \mathbb{R}[X]$, $\deg w \leq j$

W mianowniku mamy $p \in \mathbb{R}[X]$, $\deg p = 2$, $\Delta < 0$

Przyglądamy się wyrażeniu $\frac{w}{p^j}$ $(*)$

Dzieląc w przez p dostajemy $q, r \in \mathbb{R}[X]$

$(w = q\cdot p + r \quad \deg r < 2 \leq 1$ oraz $\deg q = \deg w - 2)$

wstawiając do $(*)$ otrzymujemy:

$$\frac{w}{p^j} = \frac{qp+r}{p^j} = \frac{q}{p^{j-1}} + \frac{r_1}{p^j}$$

Stosując to samo rozumowanie do $\frac{q}{p^{j-1}}$ (jak w $\frac{w}{p^j}$)

otrzymujemy:

$$\boxed{\frac{w}{p^j} = \frac{q}{p^{j-1}} + \frac{r_1}{p^j} = \frac{r_1}{p^j} + \frac{r_2}{p^{j-1}} + \ldots + \frac{r_{j-1}}{p^1}}$$ gdzie $r_i \in \mathbb{R}[X]$, $\deg r_i \leq 1$

W takim razie $\frac{r_i}{p^i}$ jest postaci $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^i}$ $(**)$ gdzie $A, B \in \mathbb{R}$, $b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$

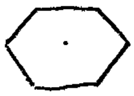
Def: Ułamkiem prostym dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nazywamy wyrażenie postaci $(**)$ lub wyrażenie $\frac{a}{(x-t)^k}$ gdzie $a, t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

Twierdzenie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Każdy ułamek właściwy $\frac{f}{g}$ jest sumą ułamków prostych.

Dowód: powyżej.

Teoria Grup

np.  sześciokąt foremny — obrót o $\frac{\pi}{3}$ (w obie str.) — Każda figura ma swoją grupę symetrii

przekształcenia nie zmieniające figury

Definicja grupy:

Grupą nazywamy trójkę (G, m, e) gdzie G jest zbiorem, m jest odwzorowaniem z $G \times G \to G$ oraz e jest elementem G $(e \in G)$ która spełnia następujące własności:

(1) $\forall s,t,r \in G$ mamy $m(m(s,t), r) = m(s, m(t,r))$ łączność

(2) $\forall s \in G$ mamy $m(e,s) = m(s,e) = s$

(3) $\forall s \in G \; \exists \; t \in G$ takie, że $m(s,t) = m(t,s) = e$

Uwagi:

(1) Odwzorowanie $m: G \times G \to G$ nazywamy mnożeniem grupowym i $m(s,t)$ będziemy oznaczać symbolem $s \cdot t$. (nie musi być przemienne)
Jeśli $s \cdot t = t \cdot s$ dla wszystkich $s, t \in G$ to mówimy że G jest grupą abelową. łączność $s \cdot (t r) = t (s \cdot r)$

(2) Element $e \in G$ nazywamy elementem neutralnym.
$\exists!$ element neutralny
Jeśli e, e' spełniają (2) (że $\forall s \in G \; m(e,s) = m(s,e) = s$) to
$e = e \cdot e' = e'$

(3) Niech $s \in G$ $\exists! \, t \in G$: $st = ts = e$ (tylko jeden element odwrotny)

D: Jeżeli $s \cdot t' = t' \cdot s = e$ to

$$t = te = t(st') = (ts) \cdot t' = e \cdot t'$$

Element odwrotny do s oznaczany s^{-1}

Grupa: $(G, \cdot, e)$: $s(t \cdot r) = (s \cdot t) \cdot r \quad \forall s, t, r \in G$

$s \cdot e = e \cdot s = s \quad \forall s \in G$

$\forall s \in G \; \exists t \in G : st = t \cdot s = e$

Przykłady:

(1) Niech W - dowolny zbiór

Niech S_W - zbiór bijekcji W w siebie

injekcja - różnowar.
surjekcja - każdy element przyjm. do każd. wart.
bijekcja - odwzorowanie na całą przeciwdziedzinę + + różnowart.

~~$\pi \in S_W$ to $\pi : W \to W$ to~~ bijekcja

Niech $\pi_1, \pi_2 \in S_W$. Zdefiniujemy $\pi_1 \circ \pi_2 \in S_W$

$(\pi_1 \circ \pi_2)(x) = \pi_1(\pi_2(x))$ dla $\pi \in S_W$ $\exists \rho \in S_W$

$\pi \circ \rho = \rho \circ \pi = id_W$ (identyczność)

W takim razie $(S_W, \circ, id_W)$ jest grupą. Jeśli $|W| > 2$ to grupa S_W nie jest abelowa.

(2) Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem z działaniami $+, \cdot$ wtedy $(\mathbb{K}, +, 0)$ jest grupą przemienną. (grupa addytywna ciała $\mathbb{K}$)

Podobnie $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ jest grupą przemienną (gr. multiplikatywna)

(3) Niech $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ Wtedy $(T, \cdot, 1)$ jest grupą przemienną. $\cancel{(T, \cdot, 1)} \not\subset$

przemienna = abelowa

<u>Df.</u> Niech G będzie grupą oraz $H \subseteq G$. Mówimy, że H jest podgrupą G jeśli:
$H \neq \emptyset$

(1) $\forall s, t \in H$ mamy $s \cdot t \in H$ (mnożenie nie wyprowadza poza grupę)

(2) $\forall g \in H$ mamy $g^{-1} \in H$

z (1) i (2) $\Rightarrow e \in H$. Ustalmy $g \in H$. Wtedy (2) $g^{-1} \in H$ i z (1) $g \cdot g^{-1} = e \in H$

$T \subset \mathbb{C} \setminus \{0\} \overset{ozn}{=} \mathbb{C}^{\times}$ bez zera

<u>Stw.</u> Niech $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ będzie rodziną podgrup grupy G.
Wtedy $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_{\lambda \in \Lambda}$ też jest podgrupą grupy G. (suma nie jest)

<u>Dowód:</u>

$s, t \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \Rightarrow s, t \in H_\lambda \quad \forall_{\lambda \in \Lambda} \Rightarrow s \cdot t \in H_\lambda \quad \forall x \in \Lambda$.

$\Rightarrow s \cdot t \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$

Jeśli $s \in \bigcap H_\lambda \Rightarrow \forall_{\lambda \in \Lambda} \; s \in H_\lambda \Rightarrow \forall_{\lambda \in \Lambda} \; s^{-1} \in H_\lambda \Rightarrow s^{-1} \in \bigcap H_\lambda$

<u>Wniosek:</u>
Niech G - grupa oraz $X \subseteq G$. Wtedy istnieje najmniejsza podgrupa H grupy G taka, że $X \subseteq H$.

<u>Dowód:</u> Niech $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ - rodzina wszystkich podgrup zawierających X.
Wtedy $H = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$

np. $G(\mathbb{Z}, +, 0) \qquad X = \{1\} \Rightarrow H = \mathbb{Z}$

Def.:

Niech G_1, G_2 będą grupami oraz $\phi: G_1 \to G_2$.

Mówimy, że ϕ jest homomorfizmem jeśli

jeśli $\forall s,t \in G_1: \ \phi(s \cdot t) = \phi(s) \cdot \phi(t)$

Jeśli ϕ jest injektywne to ϕ nazywamy: monomorfizmem,

Jeśli ϕ jest bijekcją to ϕ nazywamy izomorfizmem.

9.11.2011

W5
Przypomnienie

Niech G, H będą grupami. Odwzorowanie $\phi: G \to H$ nazywamy <u>homomorfizmem</u> jeśli $\forall s,t \in G$ mamy $\phi(s \cdot t) = \phi(s)\phi(t)$

np. 1.) $\forall s \in G$ kładziemy $\phi(s) = e_H \in H$

2.) $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Jeśli ϕ jest różnowartościowe to mówimy, że ϕ jest <u>monomorfizmem</u>

Jeśli ϕ - surjekcja – ϕ - <u>epimorfizmem</u>.

Jeśli ϕ - bijekcja to ϕ nazywamy <u>izomorfizmem</u>.

<u>Stw.</u> Niech $\phi: G \to H$ będzie homomorfizmem

Wówczas: 1.) Zbiór $\{\phi(g) : g \in G\} \subseteq H$ jest podgrupą grupy H. Podgrupę tą będziemy nazywali obrazem ϕ. (i ozn. $\phi(G)$)

2.) $\{g \in G : \phi(g) = e_H\} \subseteq G$ jest podgrupą grupy G. Podgrupę tą nazywamy jądrem homomorfizmu ϕ i oznaczamy $\ker \phi$

D1.) Niech $s, t \in \phi(G)$. $\exists p, q \in G$: $s = \phi(p)$, $t = \phi(q)$

Wówczas $s \cdot t = \phi(p) \cdot \phi(q) = \phi(p \cdot q) \in \phi(G)$

Ponadto $\phi(e_G) = e_H$ bo $\underbrace{\phi(e_G \cdot e_G)}_{= \phi(e_G)} = \phi(e_G) \cdot \phi(e_G)$

$$e_H = \phi(e_G)^{-1} \cdot \phi(e_G) = e_H \cdot \phi(e_G) = \phi(e_G)$$

Podobnie $\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}) \Rightarrow s \in \phi(G) \Rightarrow s^{-1} \in \phi(G)$

D2.) $s, t \in \ker \phi \Rightarrow \phi(s \cdot t) = \phi(s) \cdot \phi(t) = e_H \cdot e_H = e_H$

Ponadto $\phi(e_G) = e_H \Rightarrow e_G \in \ker \phi$

patrz dowód 1.)

$\phi(s^{-1}) = \phi(s)^{-1}$ czyli jeśli $\phi(s) = e_H$ to

$$\phi(s^{-1}) = \phi(s)^{-1} = e_H^{-1} = e_H$$

Uwaga: Łatwo pokazać, że obraz podgrupy w G przy odwzorowaniu ϕ jest podgrupą H oraz przeciwobraz podgrupy w H przy odwzorowaniu ϕ jest podgrupą G.

Stw. Niech G będzie grupą oraz niech S_G będzie grupą permutacji zbioru G. Wtedy:

(s się zmienia)

1.) $\forall g \in G$ odwzorowanie $G \ni s \longrightarrow g \cdot s \in G$ jest bijekcją. Odwzorowanie to oznaczany symbolem $\lambda_g \in S_G$

2.) Odwzorowanie $G \ni g \longmapsto \lambda_g \in S_G$ jest monomorfizmem.

D2) $g_1, g_2 \in G$ oraz niech $s \in G$

$$\lambda_{g_1 \cdot g_2}(s) = (g_1 \cdot g_2) \cdot s = g_1 \cdot (g_2 \cdot s) = \lambda_{g_1}\left(\lambda_{g_2}(s)\right)$$

czyli $\lambda_{g_1 \cdot g_2} = \lambda_{g_1} \circ \lambda_{g_2}$

Jeśli $\lambda_{g_1} = \lambda_{g_2}$ to $\lambda_{g_1}(e) = \lambda_{g_2}(e)$ co oznacza, że

$g_1 = g_1 \cdot e = g_2 \cdot e = g_2$ (różnowartościowość λ)

λ_g jest permutacją, bo $\lambda_g^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$ bo

$\lambda_{g^{-1}} \cdot \lambda_g(s) = g^{-1}(\lambda_g(s)) = g^{-1}(g \cdot s) = s$

A więc $\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g = id$. Podobnie $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = id$

Grupy permutacji zbiorów skończonych

Niech $X=\{1,2,\dots,n\}$. Grupę permutacji S_X będziemy oznaczali S_n.

Niech $\pi\in S_n$. Wtedy $\pi:\{1,2,\dots,n\}\longrightarrow\{1,2,\dots,n\}$

Wprowadzimy następującą notację $\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots, & n\\ \pi(1), & \pi(2), & \dots, & \pi(n)\end{pmatrix}$

$\pi\cdot\delta$

$x_0 \to \delta \to \pi$

Przykład: $\pi,\delta\in S_5$ gdzie $\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$

$\delta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&3&1\end{pmatrix}$

Wtedy $\pi\cdot\delta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&3&5\end{pmatrix}$ $\quad x_0 \to \overset{\text{wart dla}}{\delta} \to \overset{\text{wart do}}{\pi}$

$\delta\cdot\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&5&2&4\end{pmatrix}$ $\quad x_0\to\pi\to\delta$

$\pi\cdot\delta\neq\delta\cdot\pi \Rightarrow S_n$ – nieprzemienna dla $n\geq 3$

Def. Niech $\pi\in S_n$ oraz $x_0\in\{1,2,\dots,n\}$. Orbitą permutacji π przechodzącą przez x_0 nazywamy podzbiór X złożony z elementów postaci $\{x_0,\pi(x_0),\pi^2(x_0),\dots\}$

Notacja $\{x_0,\pi(x_0),\pi^2(x_0),\dots\}=\mathrm{Orb}^{\pi}(x_0)$

Stw. Niech $\pi\in S_n$. Wówczas:

(1) $\mathrm{Orb}^{\pi}(x_0)=\mathrm{Orb}^{\pi}(y_0)\Leftrightarrow y_0\in\mathrm{Orb}^{\pi}(x_0)$

(2) $\mathrm{Orb}^{\pi}(x_0)\cap\mathrm{Orb}^{\pi}(y_0)\neq\emptyset \Rightarrow \mathrm{Orb}^{\pi}(x_0)=\mathrm{Orb}^{\pi}(y_0)$

D: Zauważmy, że $\mathrm{Orb}^{\pi}(x_0)=\{x_0,\pi(x_0),\dots,\pi^{k-1}(x_0)\}$

gdzie k jest najmniejszą liczbą taką że $x_0=\pi^k(x_0)$

D: ~~Punkt~~ (1) $\Rightarrow$ oczywiste

$\Leftarrow$ Jeśli $y_0 \in Orb^{\pi}(x_0)$ to $\exists\, l \in \{0, \dots, k-1\}$ że $y_0 = \pi^l(x_0)$.

Wtedy ~~$y_0 = \pi^l(x_0)$~~ $x_0 = \pi^{-l}(y_0) \Rightarrow \underset{x_0}{\underset{\parallel}{\pi^k(x_0)}} = \pi^{k-l}(y_0)$

~~Orbita~~ Stąd $Orb^{\pi}(x_0) \subseteq Orb^{\pi}(y_0)$

Zawieranie w drugą stronę: $y_0 = \pi^l(x_0) \Rightarrow \pi^i(y_0) = \pi^{l+i}(x_0) \in Orb^{\pi}(x_0)$

Stąd $Orb^{\pi}(y_0) \subseteq Orb^{\pi}(x_0)$ co daje w sumie równość orbit

D (2) Niech $x \in Orb^{\pi}(x_0) \cap Orb^{\pi}(y_0)$. Na mocy (1) ~~$Orb^{\pi}(x_0) = Orb^{\pi}(y_0)$~~

$Orb^{\pi}(x) = Orb^{\pi}(x_0)$ i podobnie

$Orb^{\pi}(x) = Orb^{\pi}(y_0)$ i ~~stąd~~ $\boxed{Orb^{\pi}(x_0) = Orb^{\pi}(y_0)}$

suma nieprzecinających się zbiorów $\sqcup$

Uwaga: Powyższe stw. pokazuje, że $X = \bigsqcup_{i=1,\dots,m} Orb^{\pi}(x_i)$

Def.: Orbitę jednopunktową nazywamy orbitą trywialną.

Punkt $x_0 \in X$ t, że $\pi(x_0) = x_0$ nazywamy punktem stałym permutacji.

Jeśli π ma tylko jedną nietrywialną orbitę to π nazywamy cyklem.

Notacja: Przypuśćmy, że π jest cyklem. Niech $\{x_0, \pi(x_0), \pi^2(x_0), \dots, \pi^{k-1}(x_0)\}$ będzie jedyną nietrywialną orbitą. Cała informacja o π jest zawarta w uporządkowanym ciągu $\{x_0, \pi(x_0), \pi^2(x_0), \dots, \pi^{k-1}(x_0)\}$

$$\pi(y) = \begin{cases} y & \text{jeśli } y \notin \{x_0, \dots, \pi^{k-1}(x_0)\} \\ \pi^{i+1}(x_0) & \text{jeśli } y = \pi^i(x_0) \end{cases}$$

Uwaga. Każda permutacja rozkłada się na iloczyn rozłącznych cykli.

D: Dla $\pi \in S_n$ znajdujemy rozkład $X = \bigsqcup_{i=1,\dots,l} Orb(x_i)$ na rozłączne orbity.

~~A więc~~ $\cancel{\pi = (x_1, \pi(x_1), \pi^2(x}$

A więc $\pi = (x_1, \pi(x_1), \dots, \pi^{k_1-1}(x_1)) \cdot \dots \cdot (x_l, \pi(x_l), \dots, \pi^{k_l-1}(x_l))$

Def.: Cykl długości 2 nazywamy transpozycją.

Uwaga: (Każda permutacja przedstawia się jako złożenie transpozycji)

Wystarczy ~~wykazać~~ pokazać, że cykle rozkładają się na transpozycje.

$$(x_0, \dots, x_{k-1}) = (x_0, x_1)(x_1, x_2) \cdot \dots \cdot (x_{k-2}, x_{k-1})$$
$$= (x_0, x_{k-1}) \cdot \dots \cdot (x_0, x_2)(x_0, x_1)$$

Tw. Liczba transpozycji występująca w danym rozkładzie permutacji $\pi \in S_n$ ma określoną parzystość ~~niezależną od rozkładu~~. (niezależną od rozkładu)

Lemat: Złożenie permutacji z transpozycją zmienia liczbę orbit o 1.

D: Sprawdzamy dla cykli

$$(x, x_1, \dots, x_{l-1}, y, x_{l+1}, \dots, x_{k-1}) \circ (x, y) =$$
$$= (x, x_{l+1}, \dots, x_{k-1})(y, x_1, \dots, x_{l-1})$$

Podobnie ~~$(x, x_{l+1}, \dots, x_{k-1})(y, x_1, \dots$~~

$$(x, x_{l+1}, \dots, x_{k-1})(y, x_1, \dots, x_{l-1}) \circ (x, y) = (x, x_1, \dots, x_{l-1}, y, \dots, x_{k-1})$$

D: $\pi = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k = \tau_1' \cdot \dots \cdot \tau_l'$

liczba orbit dla permutacji id jest $= n$

liczba orbit $\pi = k + n \mod 2 = l + n \mod$ czyli $k = l \mod 2$

$\square$

Def.: $\pi \in S_n$. Wprowadzamy $sgn(\pi) = (-1)^k = (-1)^l$

Własności $sgn(\pi \cdot \sigma) = sgn(\pi) \cdot sgn(\sigma)$

W6

$sgn(\pi) = (-1)$ liczba transpozycji występujących w rozkładzie π

czyli $\pi = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k$ gdzie τ_i - transpozycja

to $sgn(\pi) = (-1)^k$

Własności sgn: $sgn: S_n \to \{+1, -1\}$ - grupa ze względu na mnożenie

homomorfizm grup

tzn. $sgn(\pi\sigma) = sgn(\pi) \cdot sgn(\sigma)$

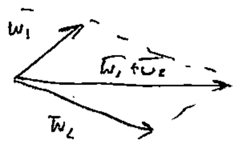
Jeśli $\pi = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k$, $\sigma = \tau_1' \cdot \ldots \cdot \tau_l'$

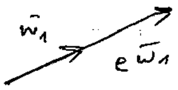
to $\pi \cdot \sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k \cdot \tau_1' \cdot \ldots \cdot \tau_l'$

$$sgn(\pi\sigma) = (-1)^{k+l} = (-1)^k \cdot (-1)^l = sgn(\pi) \cdot sgn(\sigma)$$

Def. Niech $\pi \in S_n$. Mówimy, że π jest permutacją parzystą jeśli $sgn(\pi) = +1$. Zbiór permutacji parzystych jest podgrupą w S_n którą oznaczamy symbolem A_n i nazywamy grupą alternującą zbioru n-elementowego.

Przestrzenie wektorowe





mnożenie przez skalar

Def: Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem. Przestrzenią wektorową nazywamy czwórkę $(X,+,0,\cdot)$ składającą się z:

- zbioru X
- odwzorowania $+: X\times X \longrightarrow X$
- wyróżnionego elementu $0\in X$
- odwzorowania $\cdot$ $\mathbb{K}\times X \longrightarrow X$

spełniające nast. warunki:

(1) $\forall\, x,y,z\in X$ mamy $x+(y+z)=(x+y)+z$

$\forall\, x,y\in X \quad x+y=y+x$

$\forall\, x\in X \quad x+0=x$

$\forall\, x\in X\ \exists\, y\in X$ t. że $x+y=0$

(2) $\forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{K},\ x\in X$ mamy $\alpha(\beta\cdot x)=(\alpha\cdot\beta)\cdot x$

$\forall\, x\in X$ mamy $1\cdot x=x$

(3) $\forall\, \alpha\in\mathbb{K}$ i $\forall\, x,y\in X$ mamy $\alpha(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$

$\forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{K}$ i $\forall\, x\in X$ mamy $(\alpha+\beta)x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$

Uwagi: 1.) Elementy zbioru X nazywamy wektorami a elementy $\mathbb{K}$ skalarami

2.) Własność 3a nazywamy rozłącznością mnożenia przez skalary wzgl. dodawania wektorów...

3) Własność 3b. rozłączność mnożenia wektorów przez skalary

Np.

(1) Przestrzeń zerowa: X - zbiór 1-elementowy (ozn. symbolem 0)

$\mathbb{K}$ - dowolne ciało $\boxed{\begin{matrix} 0+0=0 \\ \alpha\cdot 0=0 \end{matrix}}$ $\forall \alpha\in\mathbb{K}$

(każde ciało prz. wekt.)

(2) Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem $(\mathbb{K},+,0,\cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$.

(3) $X=C[0,1]$ - f-cje ciągłe na $[0,1]$ o wartościach $\mathbb{C}$

Definiujemy dodawanie w X

$$f,g\in X \Rightarrow (f+g)(t)=f(t)+g(t)$$

Mnożenie przez skalary $\lambda\in\mathbb{C}$

$$(\lambda\cdot f)(t)=\lambda\cdot f(t)$$

(4) $\mathbb{K}$ - ciało, $n\in\mathbb{N}$, $X=\mathbb{K}^n=\underbrace{\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\ldots\times\mathbb{K}}_{n\text{-razy}}$

Wprowadzamy dodawanie

Niech $x=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\in X$, $y=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$ notacja kolumnowa

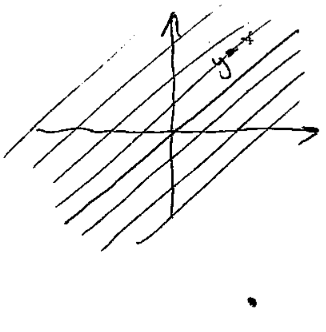
Wtedy $x+y=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}$

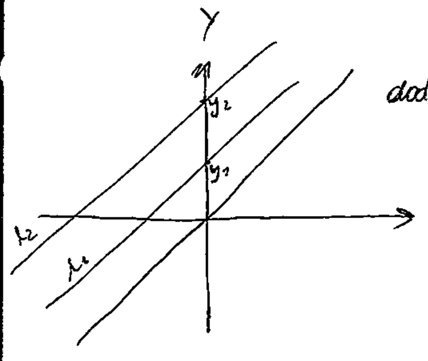
Mnożenie przez skalary $\alpha\in\mathbb{K} \Rightarrow \alpha\cdot x=\alpha\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\alpha_1\\ \alpha\alpha_2\\ \vdots\\ \alpha\cdot\alpha_n\end{bmatrix}$

Wtedy $0=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ i $(\mathbb{K}^n,+,0,\cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

(5) Bardziej abstrakcyjny przykład.

$X=$ zbiór prostych w $\mathbb{R}^2$ równoległych do prostej $L=\{(x,y): y-x=0\}$





dodawanie $l_1, l_2 \in X$ $\quad y_1, y_2$

$l_1 + l_2 = l$ prosta przechodząca przez $y_1 + y_2$

Mnożenie przez skalary: $t \in \mathbb{R}$ $\quad t \cdot l_1$ - prosta przechodząca przez $t \cdot y_1 \in 0Y$

Def. Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Mówimy, że podzbiór niepusty $E \subseteq X$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni X jeśli:

(i) $\forall x, y \in E$ mamy $x + y \in E$

(ii) $\forall x \in E$ oraz $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ mamy $\alpha x \in E$

Stwierdzenie

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$ oraz $(E_i)_{i \in J}$ będzie rodziną podprzestrzeni.

Wtedy $\bigcap_{i \in J} E_i$ jest podprzestrzenią przestrzeni X

Dowód: $\forall i \in J \quad 0 \in E_i$ bo $E_i \neq \emptyset \Rightarrow x - x = 0 \in E_i$

czyli $0 \in \bigcap_{i \in J} E_i \neq \emptyset$

spr. (i) z def. przecięcia:

$x, y \in \bigcap_{i \in J} E_i$ Wtedy $\forall i \in J \quad x, y \in E_i \Rightarrow \forall_i \, x + y \in E_i \Rightarrow x + y \in \bigcap_{i \in J} E_i$

(ii) - podobnie

Wniosek: Niech $Z \subseteq X$ będzie podzbiorem.

Niech ~~dla~~ $(E_i)_{i \in J}$ - rodzina wszystkich podprzestrzeni zawierających Z: $Z \subseteq E_i$. Wtedy $\bigcap_{i \in J} E_i$ - najmniejsza podprzestrzeń wektorowa X zawierająca Z. Będziemy ją oznaczać symbolem $\langle Z \rangle$ lub span Z

Np.

(1) $Z=\phi \quad \langle Z\rangle=\{0\}$

(2) $Z=\{x\} \quad \langle Z\rangle=\{t\cdot x: t\in\mathbb{K}\}$

(3) $Z=\{x_1, x_2\} \quad \underbrace{\langle Z\rangle}_{\text{przestrzeń generowana przez 2 elementy}}=\{t_1x_1+t_2x_2 : t_1, t_2\in\mathbb{K}\}$

Def.: Niech $x_1,\dots,x_n\in X$. Kombinacją liniową $x_1,\dots,x_n$ nazywamy wektor postaci $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n\in X$ gdzie $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$, α_i – nazywamy współczynnikami kombinacji liniowej.

Jeśli $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_2=0$ to kombinację nazywamy trywialną.

np. (4) $\operatorname{span} Z=\left\{\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n \;\middle|\; \begin{array}{l} n\in\mathbb{N}\\ x_1,\dots,x_n\in Z\\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}\end{array}\right\}$

Def.:

Niech $S\subseteq X$. Mówimy, że S jest podzbiorem wektorów liniowo niezależnych jeśli dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ i dowolnego podzbioru $\underbrace{\{x_1,\dots,x_n\}}_{\text{elementy nie powtarzają się}}\subseteq S$ i $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ mamy implikację

$\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$

Uwaga: dot. powyższej def. ↑ : mówimy o układzie wektorów liniowo niezależnych

Stw.

Niech $S\subseteq X$. Następujące warunki są równoważne:

(1) S jest układem liniowo zależnym

(2) $\exists x\in S$ t, że x jest kombinacją liniową elementów z $S\setminus\{x\}$

<u>Dowód</u>: $1\Rightarrow 2$ $\quad\exists\, x_1,\dots,x_n\in S$ oraz $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$, t. że

$\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=0$ oraz $\alpha_i\neq 0$ dla pewnego $i\in\{1,\dots,n\}$

Wtedy $\quad x_i = \sum_{k \neq i} \frac{-\alpha_k}{\alpha_i} x_k$

$2 \Rightarrow 1$

$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \qquad x_i \neq x$

$x - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \ldots - \alpha_n x_n = 0$ i współczynnik przy x jest równy 1

S – liniowo zależny układ wektorów.

Definicja:

Niech $B \subseteq X$ będzie układem liniowo niezależnym. Jeśli $\operatorname{span} B = X$ to B nazywamy bazą przestrzeni wektorowej X.

Np. $X = \mathbb{R}^n$

$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq X$ gdzie $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ← i-ty poziom

Def.

Niech X będzie przestrzenią nad $\mathbb{K}$. Mówimy, że X jest skończenie wymiarową p-nią wekt. jeśli istnieje skończona baza X.

W 23.11.2011

Stwierdzenie 1

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$ oraz $B \subseteq X$.

Wtedy następujące warunki są równoważne:

(1) B jest bazą X

(2) Każdy element X ma jednoznaczne przedstawienie jako kombinacja liniowa elementów z B

D: $1 \Rightarrow 2$

B jest bazą. Niech $x \in X$. Przypuśćmy, mamy dwa przedstawienia x:

$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_n y_k$ gdzie $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in B$

Bez straty ogólności zał., że $k \geq n$

Niech $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \cap \{y_1, \ldots, y_n\} = \{z_1, \ldots, z_L\}$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = y_1 = x_1 \\ \dots \\ z_l = y_l = x_l \end{array}\right\}$$ Po odpowiednim uporządkowaniu powyższych zbiorów

$$\underbrace{\text{wszystkie elementy}}, \text{które powtórzyły się}$$

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) z_1 + \dots + (\alpha_l - \beta_l) z_l + \alpha_{l+1} x_{l+1} + \dots + \alpha_k x_k - \beta_{l+1} y_{l+1} - \dots - \beta_n y_n$$

B - układ liniowo niezależny $\Rightarrow$ wszystkie współczynniki wynoszą 0.

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_l = \beta_l$$

$$\alpha_{l+1} = \dots = \alpha_k = \beta_{l+1} = \dots = \beta_n = 0$$

więc dostajemy jednoznaczność rozkładu

$2 \Rightarrow 1$ (trzeba pokazać, że ukł. jest liniowo niezależny $\to$ jest baza)

~~Wystarczy sprawdzić~~

Przypuśćmy, że $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 = 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n$ dla pewnych elementów

$x_1, \dots, x_n \in B$ oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

Z jednoznaczności mamy $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

To oznacza, że B jest układem wekt. liniowo niezależnych. Ponieważ

$\langle B \rangle = \operatorname{span} B = X$ to B jest baza.

~~Stwierdzenie 2~~

~~X - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{K}$, dim X~~

Def. Mówimy, że p. wektorowa X jest skończenie wymiarowa jeśli posiada bazę złożoną ze skończonej liczby elementów.

X - przestrzeń wekt., sk. wymiarowa

$\{y_1, \dots, y_k\} \subset X$ układ liniowo niezależny

Wówczas $\{y_1, \dots, y_k\}$ można uzupełnić do bazy X

Dowód:

Niech $\{x_1, \dots, x_n\}$ - baza X.

Rozważamy układ $\{y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n\}$

Jeśli powyższy układ jest liniowo zależny to $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_{k+n} \in \mathbb{K}$

nie wszystkie zero, t., że $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k + \alpha_{k+1} x_1 + \dots + \alpha_{k+n} x_n = 0$

Ponieważ $\{y_1, \dots, y_k\}$ jest liniowo niezależny to $\exists j \in \{k+1, \dots, n\}, \alpha_j \neq 0$

$\cancel{x_j = \frac{\alpha_1}{\alpha_j}}$

Bez straty ogólności (zmieniając porządek $(x_1, \dots, x_n)$) można założyć, że $j = k+1$. To oznacza, że:

$$x_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}} y_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} y_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+2}} x_2 - \dots - \frac{\alpha_{k+n}}{\alpha_{k+1}} x_n$$

Dzięki temu $\operatorname{span}\{y_1, \dots, y_k, x_2, \dots, x_n\} = X$

Kontynuując „wyrzucanie" wektorów otrzymamy uzupełnienie $\{y_1, \dots, y_k\}$ do bazy ☒

Stwierdzenie 3

X - pr. skończenie wymiarowa

Niech $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ będzie bazą X

Jeśli układ $B' = \{y_1, \dots, y_n\}$ jest liniowo niezależny to B' jest bazą X.

dowód:

pyt: dlaczego $\operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\} = X$?

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}: y_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ (Któryś jest niezerowy np. przy x_1)

Możemy założyć, że $\alpha_1 \neq 0$ $\quad x_1 = \frac{1}{\alpha_1} y_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} x_i$

To oznacza, że $\operatorname{span}\{y_1, x_2, \dots, x_n\} = X$

Indukcja: Przypuśćmy, że

$\mathrm{span}\{y_1, y_2, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n\} = X$

$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}: \quad y_{k+1} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_k y_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_n x_n$

Wszystkie α_{k+1} aż do α_n nie mogą być jednocześnie 0

bo wtedy $y_{k+1} - \alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_k y_k = 0$ - sprzeczne z liniową niezal. $\{y_1, \dots, y_n\}$

Zakładając, że $\alpha_{k+1} \neq 0$ mamy $x_{k+1} \in \mathrm{span}\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\}$

W takim razie $\mathrm{span}\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\} = \mathrm{span}\{y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n\} = X$

Po n-krokach dostajemy $\mathrm{span}\{y_1, \dots, y_n\} = X$ a

więc $\{y_1, \dots, y_n\}$ jest bazą ☒

Twierdzenie

X - przestrzeń skończenie wymiarowa nad $\mathbb{K}$

$B = \{x_1, \dots, x_n\}$ - baza X

Jeśli $\{y_1, \dots, y_m\}$ jest bazą X to $n = m$

Przypuśćmy, że $n < m$. Wtedy ze stwierdzenia 3 wynika, że $\{y_1, \dots, y_n\}$ też jest bazą. Ale wówczas $y_m = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \Rightarrow \{y_1, \dots, y_m\}$ - ukł. ~~A więc~~ liniowo zależny a założyliśmy że jest bazą. Sprzeczność.

Symetryczny daje sprzeczność przy zał. że $m < n$

Czyli $\boxed{m = n}$

☒

Def. Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Jeśli X jest skończenie wymiarowe to liczbę elementów dowolnej bazy nazywamy wymiarem X i oznaczamy symbolem $\dim X$. Jeśli X nie jest sk. wym. to $\dim X = \infty$

Uwaga: (1) Jeśli $\dim X = n$ to każdy układ n liniowo niezależnych wektorów jest bazą.

(2) Jeśli $m > n$ to każdy układ m wektorów jest liniowo zależny

Przykłady:

(1) $X = \mathbb{K}_n[\cdot]$ (ukł. wielomianów)

$\dim X = n+1$ Układ $\{1, t, \ldots, t^n\}$ jest bazą X

(2) $X = \mathbb{R}^n$, $\dim X = n$ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ - baza standardowa

Pokazać, że $\dim(C(\mathbb{R})) = \infty$ C - ciągłe f.

? $\dim(C[0;1]) = \infty$

~~Iloczyn kartezjański przestrzeni wektorowych~~

Suma prosta przestrzeni wektorowych

Def. Niech $V_1, \dots, V_n$ będą p-niami wektorowymi nad $\mathbb{K}$

W zbiorze $V = V_1 \times \dots \times V_n$ wprowadzamy działania $+ : V \times V \to V$

oraz $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ wzorami:

$$(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \quad v_i, w_i \in V_i$$

$$\alpha (v_1, \dots, v_n) = (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n) \quad \alpha \in \mathbb{K} \quad v_i \in V_i$$

$$0 = (0, \dots, 0) \in V.$$

Czwórka $(V, +, 0, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$, którą nazywamy sumą prostą $V_1, \dots, V_n$ i oznaczamy symbolem $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$.

Stwierdzenie

V_i - sk. wymiarowa wtedy $\dim (V_1 \oplus \dots \oplus V_n) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_n$

Dowód:

Niech B_i będzie bazą V_i

Definiujemy $B = \{(e_{i_1}, 0, \dots, 0), (0, e_{i_2}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, e_{i_n}) :$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 \in \{1, \dots, \dim V_1\} \\ \vdots \\ i_n \in \{1, \dots, \dim V_n\} \end{array} \right.$$

B jest bazą V o tej liczbie elementów $\dim V_1 + \dots + \dim V_n$

<u>Iloraz p-ni wektorowej</u>: X przez podprzestrzeń $Y \subseteq X$

Niech $Y \subseteq X$ będzie podprzestrzenią wektorową.

$\forall x \in X$ zdefiniujemy $X \supseteq x + Y \equiv \{x + y : y \in Y\}$

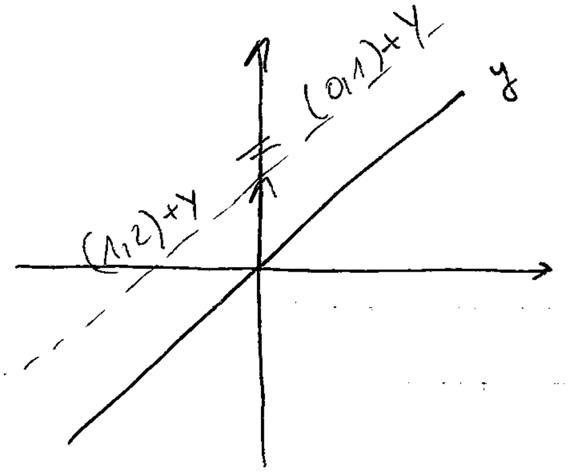
Symbolem X/Y będziemy oznaczali X/Y

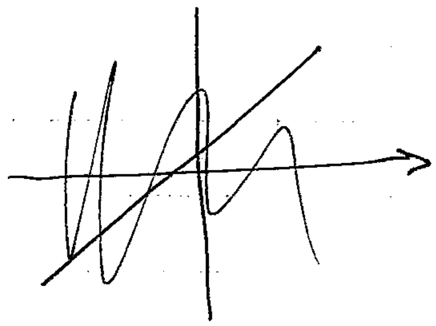
$\{x+Y : x \in X\}$

w X/Y wprowadzamy działanie $+$ i $\cdot$

$$(x_1+Y)+(x_2+Y) = (x_1+x_2)+Y$$

$$\alpha(x+Y) = (\alpha x)+Y$$





$0_{X/Y} = 0+Y = Y$ zatem podprzestrzeni X/Y jest Y

$(X/Y, +, 0_{X/Y}, \cdot)$ - jest p-nią wekt.

30.11.2011

W Odwzorowania liniowe

Df. Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem oraz niech X i Y będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$.

Odwzorowanie $T: X \to Y$ nazywamy liniowym jeśli $\forall_{x_1,x_2\in X}$ oraz $\forall_{\alpha_1,\alpha_2\in \mathbb{K}}$ mamy

$$T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\alpha_1 T(x_1)+\alpha_2 T(x_2).$$

Zbiór odwzorowań liniowych z X do Y oznaczamy $L(X,Y)$

(2) Odwzorowanie liniowe różnowartościowe $\to$ monomorfizm

(3) —"— surjektywne $\to$ epimorfizm

(4) bijekcję liniową nazywamy izomorfizm

(5) $T: X\to X$ liniowe nazywamy endomorfizmem

Zbiór endomorfizmów oznaczamy symbolem $L(X)$

(6) ~~Izomorfizmy~~ Izomorficzny endomorfizm nazywamy automorfizmem

Zbiór automorfizmów p-ni X oznaczamy $Aut(X)$

Przykłady:

(1) Odwzorowanie $X\ni x\longmapsto 0\in Y$ jest liniowe. Jest nazywane odwzorowaniem zerowym z X do Y

(2) Odwzorowanie $1_X: X\ni x\longmapsto x\in X$ jest liniowe.

1_X nazywamy odwzorowaniem identycznościowym.

(3) Różniczkowanie $\mathbb{R}_n[\cdot]\ni w\longmapsto w'\in \mathbb{R}_{n-1}[\cdot]$ jest odwzor. liniowym

(4) Całkowanie $C[0,1]\ni f\longmapsto \int_0^x f(y)dy\in C[0;1]$ jest odwzor. liniowym

(5) Niech $g\in C[0;1]$. Odwzorowanie $C[0;1]\ni f\longmapsto g\cdot f\in C[0;1]$ jest liniowe

(6) Czy odwzorowanie $C[0;1]\ni f\longmapsto f+g\in C[0;1]$ jest liniowe? NIE

$$f_1+f_2\longmapsto f_1+f_2+g \underset{\text{jeśli } g\neq 0}{\neq} (f_1+g)+(f_2+g)$$

Uwaga: Jeśli $T\in L(X,Y)$ jest izomorfizmem to T^{-1} jest odwzorowaniem liniowym

(7) Niech Y będzie podprzestrzenią wektorową X

$X/Y=\{x+Y : x\in X\}$ Odwzorowanie przypisujące x do przesunięcia $\Pi_Y: X\ni x\longmapsto x+Y\in X/Y$

przesunięcie podprz...

Definicja:

Niech $T \in L(X, Y)$. Obraz T, czyli $T(X)$ oznaczamy symbolem $Ran(T)$ (w skrypcie $Ran(T) = im(T)$)

Przeciwobraz zera przy odwzorowaniu T nazywamy jądrem T i oznaczamy symbolem $\ker T$

$\ker T = \{x \in X : Tx = 0\}$ W szczególności $0 \in \ker T$

Uwaga: (1) Zarówno $\ker(T)$ jak i $Ran(T)$ są podprzestrzeniami wektorowymi odpowiednio X oraz Y

(2) T jest epimorfizmem $\Leftrightarrow$ $Ran(T) = Y$

(3) T jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ $\ker(T) = \{0\}$

Dowód (3) $\boxed{\Leftarrow}$ monomorfizm $\to$ odw. lin. różnowart.

Przypuśćmy, że $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow T(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker(T) \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0$

jądro złożone z 0

$\boxed{\Rightarrow}$

~~Jeśli~~ bo $\underbrace{T - \text{monomorfizm} \to (\text{różnowart.})}$

$Tv = 0$ to ponieważ $T(0) = 0 \Rightarrow T(v) = T(0)$

$\Rightarrow v = 0$

Stw.

Niech X i Y będą przestrzeniami skończenie wymiarowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ oraz niech $T \in L(X, Y)$.

Wówczas $\boxed{\dim X = \dim \ker(T) + \dim Ran(T)}$

(operator = operator liniowy = odwzorowanie liniowe)

$\dim X = \dim \ker(X) + \dim \mathrm{Ran}(T)$

Dowód:

$\ker(T) \subseteq X$ – podprzestrzeń wektorowa

Niech $\{e_1, \dots, e_k\}$ będzie bazą $\ker(T)$ $\quad$ { co jeśli $\ker(T) = 0$? }

Uzupełniamy do bazy X: $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots e_n\}$ $\quad$ n = wymiar X,

gdzie $n = \dim X$, $k = \dim \ker(T)$ $\quad$ k = wymiar $\ker T$

I Udowodnimy, że $\{T(e_{k+1}), \dots, T(e_n)\}$ jest bazą $\mathrm{Ran}(T)$

Niech $v \in \mathrm{Ran}(T)$. Wtedy $\exists\, x \in X : T(x) = y$

$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$

$$T(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(e_i)}_{0 \text{ bo } e_i \in \ker T} + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i T(e_i) = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i T(e_i) = y$$

to pokazuje, że układ $\{T(e_{k+1}), \dots, T(e_n)\}$ generuje $\mathrm{Ran}(T)$

II Liniowa niezależność. Niech $\beta_1, \dots, \beta_{n-k} \in \mathbb{K}$

Jeśli $\beta_1 T(e_{k+1}) + \dots + \beta_n T(e_{n-k}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T(\underbrace{\beta_1 e_{k+1} + \dots + \beta_{n-k} e_n}_{\in \ker T}) = 0$$

$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ t, że $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = \beta_1 e_{k+1} + \dots + \beta_{n-k} e_n$

Stąd $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k - \beta_1 e_{k+1} - \dots \beta_{n-k} e_n = 0$

Ponieważ układ $\{e_1, \dots, e_n\}$ liniowo niezależny to $\alpha_i = 0$, $\beta_j = 0$

dla $i \in \{1, \dots, k\}$ i $j \in \{k+1, \dots, n-k\}$

W szczególności $\{T(e_{k+1}), \dots, T(e_n)\}$ – liniowo niezależny i ponieważ generuje $\mathrm{Ran}(T)$ to jest bazą $\mathrm{Ran}(T)$ a więc wymiar ~~ker~~

$\dim \mathrm{Ran}(T) = n - k$, $\dim(\ker(T)) = k$

W końcu $n = \dim X = \dim \ker(T) + \dim \mathrm{Ran}(T)$

Przykład:

<u>Π_Y jest liniowe</u>

$Ran(\pi_Y) = X/Y$ bo $x+Y = \Pi_Y(x)$

$Ker(\Pi_Y) = \{x \in X : \Pi_Y(x) = 0_{X/Y}\}$ a więc $\Pi_Y(X) = x+Y = Y$ (nie przesuwają podprzestrzeni Y)

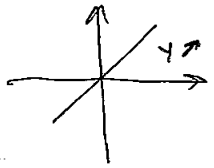
to oznacza że $\exists\, y \in Y : x = y \Rightarrow x \in Y$

- Stąd $ker(\Pi_Y) \subseteq Y$. Odwrotne zawieranie też jest prawdziwe:

  Jeśli $y \in Y$ to $\pi_Y(y) = y + Y = Y = 0_{X/Y}$

  $\Rightarrow y \in ker\Pi_Y$

  $Y \subseteq ker \Pi_Y$



W sumie $ker\,\Pi_Y = Y$

<u>Wzór na wymiar</u> $\dim X = \dim ker(\Pi_Y) + \dim Ran(\Pi_Y) = \dim Y + \dim X/Y$

Stąd: $\dim X/Y = \dim X - \dim Y$

- Suma prosta podprzestrzeni wektorowych

  X - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{K}$

Niech $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ - podprzestrzenie wektorowe X

$T_{Y_1,\dots,Y_k}$ $Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_k \ni (y_1,\dots,y_k) \longmapsto y_1 + \dots + y_k \in X$ odwzorowanie liniowe

<u>Definicja</u>

Mówimy, że kolekcja podprzestrzeni $Y_1,\dots,Y_k$ jest liniowo niezależna jeśli $T_{Y_1,\dots,Y_k}$ jest monomorfizmem.

<u>Fakt</u> $Y_1,\dots,Y_k \subseteq X$ jest liniowo niezależną kolekcją podprzestrzeni $\Leftrightarrow$ zachodzi implikacja:

$(y_1 + \dots + y_k = 0$ gdzie $y_i \in Y_i) \Rightarrow (y_1 = 0, \dots, y_k = 0)$

Oznaczenie:

$$\operatorname{Ran} T_{Y_1,\dots,Y_K} = Y_1 + \dots + Y_K = \{ y_1 + \dots + y_K \ ; \ y_i \in Y_i \}$$

Definicja:

Mówimy, że X jest sumą prostą podprzestrzeni $Y_1, \dots, Y_K$ gdy odwzorowanie $T_{Y_1,\dots,Y_K}$ jest izomorfizmem.
(Wtedy będziemy utożsamiali X z $Y_1 \oplus \dots \oplus Y_K$ pisząc równość $X = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_K$)

Alternatywa (równoważna def.)

X jest sumą prostą $Y_1, \dots, Y_k \iff X = Y_1 + \dots + Y_K$ oraz zachodzi implikacja $(y_1 + \dots + y_k = 0) \Rightarrow (y_1 = \dots = y_k = 0)$ gdzie $y_i \in Y_i$.

Stwierdzenie:

$Y_1, Y_2 \subseteq X$ – podprzestrzenie wektorowe.

Wówczas $\boxed{\dim(Y_1 + Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2)}$

Dowód: Rozważmy $T_{Y_1,Y_2} : Y_1 \oplus Y_2 \to X$

$\operatorname{Ran}(T_{Y_1,Y_2}) = Y_1 + Y_2$

$\ker(T_{Y_1,Y_2})$ jest izomorficzne z $Y_1 \cap Y_2$

dowód {ze wzoru na wymiary: $\dim \ker T_{Y_1,Y_2} = \dim Y_1 \cap Y_2$

$(y_1, y_2) \in \ker T_{Y_1,Y_2} \iff y_1 + y_2 = 0 \iff y_1 = -y_2 \in Y_1 \cap Y_2$

Widzimy, że odwzorowanie $Y_1 \cap Y_2 \ni y \mapsto (y, -y) \in \ker T_{Y_1,Y_2}$ jest wspomnianym izomorfizmem

$$\dim Y_1 \oplus Y_2 = \dim \ker T_{Y_1,Y_2} + \dim T_{Y_1,Y_2}$$

Rachunek wymiarów

$$\dim Y_1 + \dim Y_2 = \dim Y_1 \cap Y_2 + \dim (Y_1 + Y_2)$$

$$\dim Y_1 + Y_2 = \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 \cap Y_2$$

W 7.12.2011

Stwierdzenie 1

Niech X i Y będą przestr. wekt. nad $\mathbb{K}$. W zbiorze $L(X,Y)$ wprowadzamy dodawanie i mnożenie przez skalary.

$$(S+T)(x) \overset{def}{=} S(x) + T(x) \quad \text{gdzie } S,T\in L(X,Y) \text{ oraz } x\in X$$

$$(\alpha T)(x) \overset{def}{=} \alpha\cdot(T(x))$$

Wówczas $L(X,Y)$ z taką strukturą jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$.

Wektorem zerowym $L(X,Y)$ jest odwzorowanie zerowe: $0: X\ni x\longmapsto 0\in Y$

Stwierdzenie 2:

X,Y,Z - przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{K}$. Niech $T\in L(X,Y)$ oraz $S\in L(X,Y)$.

Wówczas operator $S\circ T: X\ni x\longmapsto S(T(x))\in Z$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód: $S\circ T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = S\big(T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\big) = S(\alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)) =$

$= \alpha_1 S(T(x_1)) + \alpha_2\cdot S(T(x_2)) = \alpha_1\cdot S\circ T(x_1) + \alpha_2 S\circ T(x_2)$

$\forall \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}\ ;\ x_1,x_2\in X \quad S\circ T$ - liniowe

Stwierdzenie 3 (O zadawaniu operatora liniowego na bazie przestrzeni)

X,Y - p-ni nad $\mathbb{K}$. Niech $\mathcal{B}_X = \{x_i\}_{i\in J}$ będzie bazą X. Wówczas:

(1) Jeśli $S,T\in L(X,Y)$ oraz $S(x_i) = T(x_i)\ \forall_{i\in J}$ to $S=T$

(2) Niech $\{y_i\}_{i\in J}$ będzie dowolnym układem wektorów p-ni X.

Wtedy istnieje dokładnie jeden operator (= odwzor. liniowe) liniowy $T\in L(X,Y)$

t, że $\forall_{i\in J}: T(x_i) = y_i$

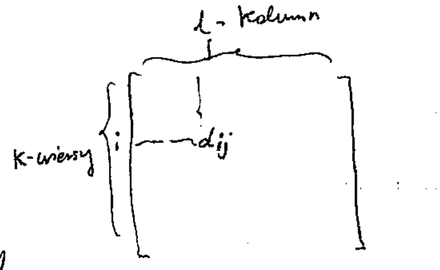
Dowód:

(1) $x\in X \Rightarrow \exists\, \alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_k}\in\mathbb{K} : i_1,\dots,i_k\in J$ t. że $x = \alpha_{i_1}x_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}x_{i_k}$

Wtedy $S(x) = S\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_{i_j}x_{i_j}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{konsekw. z}\\ \text{liniowości}}}{=} \sum_{j=1}^{k}\alpha_{i_j} S(x_{i_j}) = \sum_{j=1}^{k}\alpha_{i_j} T(x_{i_j}) = T\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_{i_j}x_{i_j}\right) = T(x)$

(2) Definiujemy T wzorem $T(x) = \sum_{j=1}^{k}\alpha_{i_j} y_{i_j}$

Przestrzeń liniowa macierzy, mnożenie macierzy.



Definicja:

Niech k, l będą liczbami naturalnymi.

Macierzą $k \times l$ o współczynnikach z $\mathbb{K}$ nazywamy tablicę $[\alpha_{ij}]$ $i \in \{1, \dots, k\}$ $j \in \{1, \dots, l\}$ gdzie $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$

α_{ij} i-ty wiersz
j-ta kolumna
$\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$

i – numer wiersza, j – nr. kolumny.

Zbiór macierzy $k \times l$ o wsp. z $\mathbb{K}$ oznaczamy symbolem $M_{k \times l}(\mathbb{K})$

W $M_{k \times l}(\mathbb{K})$ definiujemy dodawanie i mnożenie przez skalary.

- $[\alpha_{ij}] + [\beta_{ij}] \overset{def}{=} [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]$
- $\gamma [\alpha_{ij}] \overset{def}{=} [\gamma \cdot \alpha_{ij}]$ $\quad \gamma \in \mathbb{K}$

$M_{k \times l}(\mathbb{K})$ z tak zdefiniowaną strukturą jest przestrzenią wektorową o wymiarze $k \cdot l$

Stwierdzenie (mnożenie macierzy)

Niech k, l, m będą l. naturalnymi. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$M_{k \times l}(\mathbb{K}) \times M_{l \times m}(\mathbb{K}) \ni (A, B) \longmapsto A \cdot B \in M_{k \times m}(\mathbb{K})$$

gdzie ~~$A=[\alpha_{ij}]$~~ $A = [\alpha_{pq}]$, $B = [\beta_{qr}]$ oraz $AB = [\gamma_{pr}]$

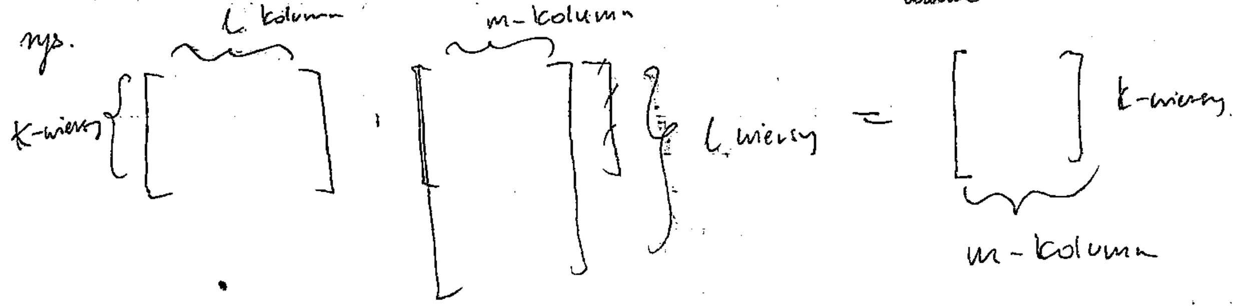
oraz $\gamma_{pr} = \sum_{q=1}^{l} \alpha_{pq} \cdot \beta_{qr}$

Wtedy (1) $\forall A$ odwzorowanie $M_{l \times m}(\mathbb{K}) \ni B \longmapsto A \cdot B \in M_{k \times m}(\mathbb{K})$ jest liniowe.

(2) Podobnie $\forall B$ odw. $M_{k \times l} \ni A \longmapsto A \cdot B \in M_{k \times m}(\mathbb{K})$ jest liniowe

(3) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ gdzie $C \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ dowolne

np.



Przykład:

$k=2 \quad l=3 \quad m=3$

2 na 3 $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

$$2\ \underset{3}{\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&1\end{bmatrix}} \cdot \ 3\overset{3}{\begin{bmatrix}1&3&1\\5&5&1\\0&1&0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}1\cdot1+1\cdot5+2\cdot0, & 1\cdot3+1\cdot5+2\cdot1, & 2\\ 16, & 19 & 4\end{bmatrix}$$

$1\cdot1+3\cdot5+1\cdot0$

Definicja (Macierz operatora liniowego)

Niech X, Y będą sk. wymiarowymi p-niami nad $\mathbb{K}$; $n=\dim X$, $m=\dim Y$. Niech $\mathcal{E}=\{x_1,\dots,x_n\}$ oraz $\mathcal{F}=\{y_1,\dots,y_m\}$ będą bazami X i Y odpowiednio.
Macierzą odwzorowania $T\in L(X,Y)$ w bazach $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ nazywa macierz m na n w której w k-tej kolumnie stoją współczynniki rozkładu wektora $T(x_i)$ w bazie $\mathcal{F}$. To znaczy, że jeśli

$T(x_k)=\sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk} y_j$ to ~~macierz~~ macierz T w bazach $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$, jest postaci $[\alpha_{j,k}]\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Macierz tę oznaczamy symbolem $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$

Stwierdzenie 5.

Niech $X, Y, T, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ - jak wyżej.
Wówczas odwzorowanie $L(X,Y)\ni T \longmapsto [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych.

Dowód: Odwzorowanie odwrotne:

Przy ustalonych bazach $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ definiujemy odwzorowanie

$$M_{m\times n}(\mathbb{K})\ni[\alpha_{ij}] \longmapsto T\in L(X,Y)$$

gdzie $T(x_k)=\sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk} y_j$

Wniosek $\dim L(X,Y) = \dim M_{m\times n}(\mathbb{K}) = m\cdot n = \dim X \cdot \dim Y$

Stwierdzenie 6 (O składaniu operatorów vs. mnożenie macierzy)

X, Y, Z – przestrzenie nad $\mathbb{K}$ $\quad \dim(X), \dim(Y), \dim(Z) < \infty$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ – bazy X, Y, Z odpowiednio

Niech $T \in L(X,Y)$ oraz $S \in L(Y,Z)$

Wówczas $[S\circ T]^{\mathcal G}_{\mathcal E} = [S]^{\mathcal G}_{\mathcal F}[T]^{\mathcal F}_{\mathcal E}$ $\qquad S\circ T \in L(X,Z)$

Dowód: Niech $\mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathcal{F} = \{y_1, \dots, y_m\}$ $\mathcal{G} = \{z_1, \dots, z_p\}$

$$S\circ T(x_k) = S(T(x_k)) = S\Big(\sum_{j=1}^m \alpha_{jk} y_j\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^m \alpha_{jk} S(y_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^m \alpha_{jk} \sum_{i=1}^p \beta_{ij} z_i = \sum_{i=1}^p \Big(\sum_{j=1}^m \beta_{ij}\alpha_{jk}\Big) z_j$$

$[T]^{\mathcal F}_{\mathcal E} = [\alpha_{jk}]$ $\qquad [S]^{\mathcal G}_{\mathcal F} = [\beta_{ki}]$

$$\Downarrow$$

$$[S\circ T]^{\mathcal G}_{\mathcal E} = \Big[\sum \beta_{ij}\alpha_{jk}\Big] = [S]^{\mathcal G}_{\mathcal F}\,[T]^{\mathcal F}_{\mathcal E}$$

Przykład:

$T: \mathbb{R}_2[\cdot] \to \mathbb{R}_1[\cdot]$

$T(v) = v' = \frac{d}{dt} v$

$S: \mathbb{R}_1[\cdot] \to \mathbb{R}_2[\cdot]$

$S(v)(t) = t\cdot v(t)$

$\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ $\qquad \mathcal{F} = \{1, t\}$

$$[T]^{\mathcal F}_{\mathcal E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[S]^{\mathcal E}_{\mathcal F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

v' na t $\quad$ v' na t^2 $\quad$ $2t\cdot t$

$$[S\circ T]^{\mathcal E}_{\mathcal E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[S]^{\mathcal E}_{\mathcal F}\cdot[T]^{\mathcal F}_{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$