Autoreferat

Paweł Kasprzak

Warszawa 2015

Podstawowe dane osobowe

Imię i nazwisko	Paweł Kasprzak
Adres	Katedra Metod Matematycznych Fizyki Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego Pasteura 5, 02-093 Warszawa
E-mail	pkasp@fuw.edu.pl
Strona WWW	www.fuw.edu.pl/∼pkasp

Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

1. **Doktorat z fizyki:** rozprawa doktorska *Kwantowa grupa Lorentza z relacjami komutacyjnymi Heisenberga*, napisana pod kierunkiem prof. S. L. Woronowicza, obroniona na Wydziale Fizyki UW w Lutym 2007.
2. **Magisterium z fizyki:** praca *Kwantowanie grup metodą deformacji Rieffela* napisana pod kierunkiem prof. S. L. Woronowicza, obroniona na Wydziale Fizyki UW w Lutym 2003.

Przebieg kariery naukowej

1998-2003	studia magisterskie, fizyka, Uniwersytet Warszawski
2003-2007	studia doktoranckie, fizyka, Uniwersytet Warszawski
2007	Adiunkt, IMPAN, Warszawa
2007-2009	Adiunkt, Wydział Fizyki Uniwersytet Warszawski
2009-2010	Experienced Researcher, Dep. of Mathematical Sciences, University of Copenhagen
2010-2015	Adiunkt, Wydział Fizyki Uniwersytet Warszawski
2011-2013	Adiunkt, IMPAN, Warszawa, 1/4 etatu

ROZDZIAŁ 1

Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego

Wskazanym osiągnięciem habilitacyjnym jest cykl pięciu prac zatytułowany

Kwantowe podgrupy domknięte i kwantowe przestrzenie jednorodne

1. Lista prac zawierających wskazane osiągnięcie

1. [**Kas11**] Rieffel deformation of homogeneous spaces, Journal of Functional Analysis, **260**, (2011), 146-163
2. [**Kas12**] On a certain approach to quantum homogeneous spaces, Communications in Mathematical Physics **313**, (2012), 237-255
3. [**DKSS12**] Closed quantum subgroups of locally compact quantum groups, z M. Daws, P. Sołtan i A. Skalski, Advances in Mathematics **231**, (2012), 3473-3501
4. [**KS14**] Embeddable quantum homogeneous spaces, z P. Sołtan, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **411** (2014), 574–591
5. [**KS15**] Quantum groups with projection on von Neumann algebra level, z P. Sołtan, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **427** (2015) 289–306.

W przypadku pracy [**DKSS12**] wkład współautorów należy uznać za równy. W przypadku prac [**KS14**],[**KS15**] wkład współautorów jest następujący: P. Kasprzak 60%, P. Sołtan 40%. Odpowiednie oświadczenia zostały dołączone do wniosku.

2. Omówienie zagadnienia

Powyższy cykl prac dotyczy kwantowych podgrup domkniętych oraz kwantowych przestrzeni jednorodnych lokalnie zwartych grup kwantowych (LZGK). Badanie tych pojęć w kontekście zwartych grup kwantowych zainicjowano w pracy [**Pod87**] i podejmowano w kolejnych w pracach (np.: [**Pod95**], [**BRV06**], [**Boc95**], [**DCY13**], [**DCY**]). Dla grup lokalnie zwartych za najistotniejsze prace w omawianej tematyce należy uznać [**Vae05**] oraz [**Kus02**]. Publikacje wchodzące do listy osiągnięcia habilitacyjnego stanowią dalszy wkład do teorii domkniętych podgrup kwantowych oraz kwantowych przestrzeni jednorodnych lokalnie zwartych grup kwantowych.

Przejdźmy do skrótowego omówienia pewnych aspektów kwantowych podgrup domkniętych oraz kwantowych przestrzeni jednorodnych zwartych grup kwantowych (ZGK). Teorię ZGK formułuje się w języku C^*-algebr z jedynką. Morfizmem C^*-algebr A, B z jedynką $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ nazywamy $*$-homomorfizm $\pi : A \to B$ taki, że $\pi(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_B$. Zbiór morfizmów z A do B oznaczamy $\mathrm{Mor}(A, B)$.

DEFINICJA 2.1. [**Wor98**, Definicja 1.1] Niech A będzie ośrodkową C^*-algebrą z jedynką oraz $\Delta : A \to A \otimes A$ będzie morfizmem takim, że

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$$

Mówimy, że (A,Δ) jest zwartą grupą kwantową jeśli

$$\overline{\text{liniowa powłoka}\{(b\otimes\mathbb{1})\Delta(c) : b,c\in A\}}^{\|\cdot\|} = A\otimes A$$
$$\overline{\text{liniowa powłoka}\{(\mathbb{1}\otimes b)\Delta(c) : b,c\in A\}}^{\|\cdot\|} = A\otimes A$$

Niech Y będzie przestrzenią Banacha. Symbol $[X]$ oznaczać będzie domknięcie powłoki liniowej podzbioru $X\subset Y$. Zwartą grupę kwantową (A,Δ) oznaczać będziemy symbolem $\mathbb{G}$ a wtedy A oznaczamy $\mathrm{C}(\mathbb{G})$ a Δ oznaczamy $\Delta^{\mathbb{G}}$.

Definicja 2.2. Niech $\mathbb{G}$ będzie ZGK, B będzie C*-algebrą z jedynką oraz $\beta : B\to \mathrm{C}(\mathbb{G})\otimes B$ będzie morfizmem takim, że $(\Delta^{\mathbb{G}}\otimes\mathrm{id})\circ\beta = (\mathrm{id}\otimes\beta)\circ\beta$. Mówimy, że (B,β) jest $\mathbb{G}$-C*-algebrą jeśli

$$[\beta(B)(\mathrm{C}(\mathbb{G})\otimes\mathbb{1}_B)] = \mathrm{C}(\mathbb{G})\otimes B$$

$\mathbb{G}$-C*-algebry będziemy oznaczali $\mathbb{X},\mathbb{Y},\ldots$ a wtedy dla $\mathbb{X}=(B,\beta)$, B oznaczamy $\mathrm{C}(\mathbb{X})$ a β oznaczamy $\beta^{\mathbb{X}}$. Będziemy też mówić, że $\beta^{\mathbb{X}}$ jest działaniem $\mathbb{G}$ na $\mathrm{C}(\mathbb{X})$.

Definicja 2.3. Niech $\mathbb{G}$ będzie ZGK oraz $\mathbb{X}$ będzie $\mathbb{G}$-C*-algebrą. Mówimy, że $\mathbb{X}$ jest kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną jeśli

$$\{x\in\mathrm{C}(\mathbb{X}) : \beta^{\mathbb{X}}(x) = \mathbb{1}_{\mathrm{C}(\mathbb{G})}\otimes x\} = \mathbb{C}\mathbb{1}_{\mathrm{C}(\mathbb{X})} \tag{1}$$

Jeśli spełniony jest warunek (1) to mówimy, że $\beta^{\mathbb{X}}$ jest działaniem ergodycznym.

Definicja 2.4. Niech $\mathbb{G}$ będzie ZGK oraz $U\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})\otimes\mathrm{C}(\mathbb{G})$ będzie elementem unitarnym. Mówimy, że U jest unitarną reprezentacją $\mathbb{G}$ jeśli $(\mathrm{id}\otimes\Delta^{\mathbb{G}})(U) = U_{12}U_{13}$.

Formułując powyższą definicję używamy notację numerującą nogi: element $U_{12}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})\otimes\mathrm{C}(\mathbb{G})\otimes\mathrm{C}(\mathbb{G})$ definiujemy kładąc $U_{12} = U\otimes\mathbb{1}_{\mathrm{C}(\mathbb{G})}$. Podobnie definiujemy U_{13}, U_{23}.

Pierwszym nietrywialnym przykładem ZGK była kwantowa grupa $SU_q(2)$ [**Wor87**], gdzie $\mathrm{C}(SU_q(2))$ jest uniwersalną C*-algebrą generowaną przez dwa elementy $\alpha,\beta\in\mathrm{C}(SU_q(2))$ takie, że macierz

$$\begin{bmatrix}\alpha & q\beta\\ -\beta^* & \alpha^*\end{bmatrix}\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})\otimes\mathrm{C}(SU_q(2))$$

jest reprezentacją unitarną $SU_q(2)$.

Rozważmy multyplikatywną grupę $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$. Niech $z:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ oznacza funkcję identycznościową na $\mathbb{T}$. Wówczas $z\in\mathrm{C}(\mathbb{T})$ i istnieje dokładnie jeden morfizm, $\pi : \mathrm{C}(SU_q(2))\to\mathrm{C}(\mathbb{T})$ taki, że $\pi(\alpha)=z$ oraz $\pi(\beta)=0$. Ponadto π jest morfizmem surjektywnym, tzn. $\pi(\mathrm{C}(SU_q(2)) = \mathrm{C}(\mathbb{T})$ oraz

$$(\pi\otimes\pi)\circ\Delta^{SU_q(2)} = \Delta^{\mathbb{T}}\circ\pi$$

Podsumowując $\mathbb{T}$ można utożsamić z domknięta podgrupą $SU_q(2)$ w sensie poniższej definicji, która jest niewielką modyfikacją [**Pod95**, Definicja 1.3]).

Definicja 2.5. Niech $\mathbb{G},\mathbb{H}$ będą ZGK oraz niech $\pi\in\mathrm{Mor}(\mathrm{C}(\mathbb{G}),\mathrm{C}(\mathbb{H}))$ będzie surjektywnym $*$-homomomorfizmem. Mówimy, że π utożsamia $\mathbb{H}$ z domkniętą podgrupą kwantową grupy $\mathbb{G}$, jeśli zachodzi $(\pi\otimes\pi)\circ\Delta^{\mathbb{G}} = \Delta^{\mathbb{H}}\circ\pi$.

Dla $\mathbb{G},\mathbb{H}$ jak wyżej mówimy, że $\mathbb{H}$ jest domkniętą podgrupą kwantową grupy $\mathbb{G}$ oraz piszemy $\mathbb{H}\subset\mathbb{G}$. Dla $\mathbb{H}\subset\mathbb{G}$, rozważmy

$$B = \{x\in\mathrm{C}(\mathbb{G}) : (\mathrm{id}\otimes\pi)(\Delta^{\mathbb{G}}(x)) = x\otimes\mathbb{1}_{\mathrm{C}(\mathbb{H})}\}$$

Łatwo sprawdza się, że $\Delta^{\mathbb{G}}(B) \subset \mathrm{C}(\mathbb{G}) \otimes B$ oraz $\mathbb{X} = (B, \beta)$ z $\beta = \Delta^{\mathbb{G}}|_B$ jest kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną. Piszemy wówczas $\mathbb{X} = \mathbb{G}/\mathbb{H}$.

W pracy [**Pod95**] wyróżniono następujące klasy kwantowych przestrzeni jednorodnych.

Definicja 2.6. Niech $\mathbb{X}$ będzie kwantową przestrzenią jednorodną zwartej grupy kwantowej $\mathbb{G}$. Mówimy, że

- $\mathbb{X}$ jest zanurzoną kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną jeśli $\mathrm{C}(\mathbb{X}) \subset \mathrm{C}(\mathbb{G})$ oraz $\beta^{\mathbb{X}} = \Delta^{\mathbb{G}}|_{\mathrm{C}(\mathbb{X})}$
- $\mathbb{X}$ jest typu ilorazowego jeśli $\mathbb{X}$ jest zanurzona oraz istnieje $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ taka, że $\mathbb{X} = \mathbb{G}/\mathbb{H}$.

Badania nad kwantowymi przestrzeniami jednorodnymi zwartych grup kantowych zainicjowane został w pracy [**Pod87**]. Opisano w niej rodzinę kwantowych $SU_q(2)$-przestrzeni jednorodnych. Rodzinę tą parametryzuje $t \in \{c(2), c(3), \dots\} \cup [0, \infty[$, gdzie $c(i) < 0$. Dla $t \in]0, \infty]$, $\mathbb{X}_t$ jest zanurzalną kwantową $SU_q(2)$-przestrzenią jednorodną , $\mathbb{X}_0 = SU_q(2)/\mathbb{T}$. Natomiast $\mathbb{X}_{c(i)}$ nie są zanurzonymi przestrzeniami kwantowymi. Klasyfikację kwantowych $SU_q(2)$-przestrzeni jednorodnych podano w pracy [**DCY**].

Przejdziemy teraz do omówienia definicji lokalnie zwartych grup kwantowych oraz wprowadzenia pojęć, które w dalszej części tej pracy posłużą do opisu kwantowych przestrzeni jednorodnych. Ponadto sformułujemy pewne wyniki dotyczące klasycznych i kwantowych grup lokalnie zwartych, które stanowią motywację i punkt wyjścia dla badań, podjętych w pracach z dorobku habilitacyjnego.

Aksjomatyczną teorię lokalnie zwartych grup kwantowych można sformułować używając odpowiednio języka C^*-algebr [**KV00**],[**MNW03**] lub algebr von Neumanna [**KV03**]. Z uwagi na prostotę definicji LZGK, w niniejszym autoreferacie używać będziemy sformułowania bazującego na algebrach von Neumanna z pracy [**KV03**]. Niech H będzie przestrzenią Hilberta a $\mathrm{B}(H)$ będzie algebrą operatorów ograniczonych działających na H. Algebra von Neumanna $M \subset \mathrm{B}(H)$ jest to $*$-algebra z jedynką $\mathbb{1} \in M$, domknięta w topologii mocnej $\mathrm{B}(H)$ (w topologii zbieżności punktowej). Zbiór funkcjonałów normalnych na $\mathrm{B}(H)$ oznaczać będziemy $\mathrm{B}(H)_*$. Jeśli A jest C^*-algebrą, posiadającą przestrzeń predualną to A nazywamy W^*-algebrą. Okazuje się, że C^*-algebrę A można utożsamić z algebrą von Neumanna wtedy i tylko wtedy gdy A jest W^*-algebrą.

Niech M będzie algebrą von Neumanna. Zbiór elementów dodatnich M oznaczać będziemy M_+. Mówimy, że odwzorowanie $\psi : M_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ jest wagą na M, jeśli dla wszystkich $x, y \in M_+$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}_+$ mamy

- $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$
- $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$
- $\psi(0) = 0$

Niech ψ będzie wagą na M. Rozważmy

$$\mathcal{M}_\psi = \{x \in M_+ : \psi(x) < \infty\}$$

Mówimy, że

- ψ jest wagą półskończoną jeśli $\mathcal{M}_\psi$ jest gęstym w topologii mocnej podzbiorem M_+;
- ψ jest wierna jeśli $\psi(x) = 0$ implikuje $x = 0$;
- ψ jest wagą normalną jeśli $\psi(\sup x_i) = \sup \psi(x_i)$ dla każdego rosnącego ograniczonego uogólnionego ciągu $(x_i) \in M_+$.

Jeśli ψ jest normalna półskończona i wierna to mówimy, że ψ jest wagą n.s.w. .

Niech M i N będą algebrami von Neumanna (działającymi na przestrzeniach Hilberta H_M oraz H_N odpowiednio), $\mathbb{1}_M \in M, \mathbb{1}_N \in N$ będą jedynkami M i N odpowiednio oraz niech $\pi : M \to N$ będzie $*$-homomorfizmem. Mówimy, że

- π jest unitalny jeśli $\pi(\mathbb{1}_M) = \mathbb{1}_N$
- π jest normalny jeśli $\pi(\sup x_i) = \sup \pi(x_i)$ dla każdego rosnącego ograniczonego uogólnionego ciągu $(x_i) \in M_+$.

Iloczyn tensorowy $M\bar{\otimes}N$ definiujemy jako najmniejszą algebrę von Neumanna działającą na $H_M \otimes H_N$ zawierającą operatory $x \otimes y \in B(H_M \otimes H_N)$ gdzie $x \in M$, $y \in N$.

Powyższy zakres pojęć wystarcza do sformułowania definicji lokalnie zwartej grupy kwantowej.

DEFINICJA 2.7. [**KV03**, Definicja 1.1] Niech M będzie algebrą von Neumanna oraz $\Delta : M \to M\bar{\otimes}M$ będzie unitalnym normalnym różnowartościowym $*$-homomorfizmem takim, że

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

Jeśli istnieją n.s.w. wagi $\phi, \psi : M_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ takie, że

$$(\psi \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) = \psi(x)\mathbb{1}_M$$
$$(\mathrm{id} \otimes \phi)(\Delta(x)) = \phi(x)\mathbb{1}_M$$

to mówimy, że (M, Δ) jest lokalnie zwarta grupą kwantową.

Parę (M, Δ) oznaczać będziemy symbolem $\mathbb{G}$, a wtedy M oznaczamy $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ a Δ oznaczamy $\Delta^{\mathbb{G}}$. Wagę ψ, ϕ nazywamy odpowiednio prawą i lewą wagą Haara.

Grupa kwantowa $\mathbb{G}$ opisanym w języku algebr von Neumann posiada C*-wersję $(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}), \Delta^{\mathbb{G}})$. Algebra $\mathrm{C}_0(\mathbb{G})$ posiada jedynkę wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{G}$ jest zwartą grupą kwantową. Poniżej pokrótce opiszemy kategorię C*-algebr $\mathcal{C}^*$, które nie koniecznie posiadają jedynkę. Jeśli $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^*)$ to C*-algebrę mnożników A oznaczamy $\mathrm{M}(A)$. Dla $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^*)$ morfizmem $\pi : A \to B$ nazywamy $*$-homomorfizm $\pi : A \to \mathrm{M}(B)$ taki, że $B = [\pi(A) \cdot B]$. Motywację tej definicji morfizmów oraz opis algebry mnożników $\mathrm{M}(A)$ znaleźć można w [**Wor95**]. Jeśli A jest unitalną C*-algebrą to $\mathrm{M}(A) = A$ oraz powyższe pojęcie morfizmu sprowadza się do pojęcia morfizmu dla C*-algebr z jedynką. Algebra mnożników $\mathrm{M}(A)$ jest unitalną C*-algebrą, której jedynkę będziemy oznaczać $\mathbb{1}_A \in \mathrm{M}(A)$.

Jeśli $\mathbb{G} = (\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}), \Delta^{\mathbb{G}})$ jest LZGK to C*-wersja komnożenia będzie oznaczana tym samym symbolem: $\Delta^{\mathbb{G}} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}), \mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{G}))$.

DEFINICJA 2.8. Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK, B będzie C*-algebrą oraz $\beta \in \mathrm{Mor}(B, \mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes B)$ będzie różnowartościowym morfizmem spełniającym

$$(\Delta^{\mathbb{G}} \otimes \mathrm{id}) \circ \beta = (\mathrm{id} \otimes \beta) \circ \beta$$

Mówimy, że (B, β) jest $\mathbb{G}$-C*-algebrą jeśli $[\beta(B)(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes \mathbb{1}_B)] = \mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes B$.

$\mathbb{G}$-C*-algebry będziemy oznaczali $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \ldots$, a wtedy dla $\mathbb{X} = (B, \beta)$, B oznaczamy $\mathrm{C}_0(\mathbb{X})$ oraz $\beta = \beta^{\mathbb{X}}$. Będziemy też mówić, że $\beta^{\mathbb{X}}$ jest działaniem $\mathbb{G}$ na $\mathrm{C}_0(\mathbb{X})$. Jeśli B jest C*-algebrą z jedynką to stosujemy oznaczenie $B = \mathrm{C}(\mathbb{X})$.

DEFINICJA 2.9. Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK, M będzie W*-algebrą oraz $\alpha : M \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})\bar{\otimes}M$ będzie różnowartościowym unitalnym normalnym $*$-homomorfizmem. Mówimy, że (M, α) jest $\mathbb{G}$-W*-algebrą jeśli

$$(\Delta^{\mathbb{G}} \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha = (\mathrm{id} \otimes \alpha) \circ \alpha$$

$\mathbb{G}$-W*-algebry będziemy oznaczali $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \ldots$ a wtedy dla $\mathbb{X} = (M, \alpha)$, M oznaczamy $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X})$ oraz $\alpha = \alpha^{\mathbb{X}}$. Będziemy też mówić, że $\alpha^{\mathbb{X}}$ jest działaniem $\mathbb{G}$ na $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X})$.

DEFINICJA 2.10. Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK oraz $\mathbb{X}$ będzie $\mathbb{G}$-W*-algebrą. Mówimy, że $\mathbb{X}$ jest W*-kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną jeśli

$$\{x \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{X}) : \alpha^{\mathbb{X}}(x) = \mathbb{1}_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})} \otimes x\} = \mathbb{C}\mathbb{1}_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X})} \tag{2}$$

$\alpha^{\mathbb{X}}$ spełniające (2) nazywamy działaniem ergodycznym.

DEFINICJA 2.11. Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK, H przestrzenią Hilberta, $\mathcal{K}(H)$ C*-algebrą operatorów zwartych działających na H oraz niech $U \in \mathrm{M}(\mathcal{K}(H) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{G}))$ będzie elementem unitarnym. Mówimy, że U jest reprezentacją unitarną $\mathbb{G}$ jeśli

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta^{\mathbb{G}})(U) = U_{12}U_{13}$$

Każda LZGK posiada reprezentację regularną $\mathrm{W}^{\mathbb{G}} \in \mathrm{M}(\mathcal{K}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G})) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{G}))$ na przestrzeni $\mathrm{L}^2(\mathbb{G})$, gdzie $\mathrm{L}^2(\mathbb{G})$ jest przestrzenią Hilberta z konstrukcji GNS dla prawej wagi Haara ψ. Konstrukcja $\mathrm{W}^{\mathbb{G}}$ została opisana w pracach [**MNW03**] oraz [**KV00**]. Poniżej podamy najistotniejsze własności $\mathrm{W}^{\mathbb{G}}$. Reprezentację regularną $\mathrm{W}^{\mathbb{G}}$ można też interpretować, jako operator działający na $\mathrm{L}^2(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{L}^2(\mathbb{G})$, który nazywamy operatorem Kaca-Takesakiego. Niech $\Sigma : \mathrm{L}^2(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{L}^2(\mathbb{G}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{L}^2(\mathbb{G})$ będzie operatorem unitarnym takim, że $\Sigma(x \otimes y) = y \otimes x$. Wówczas:

(1) $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) = \overline{\{(\omega \otimes \mathrm{id})(\mathrm{W}^{\mathbb{G}}) : \omega \in \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G}))_*\}}^{\text{w topologii mocnej}}$;
(2) $\Delta^{\mathbb{G}}(x) = \mathrm{W}^{\mathbb{G}}(x \otimes \mathbb{1})\mathrm{W}^{\mathbb{G}*}$ dla wszystkich $x \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$;
(3) zdefiniujmy

$$\hat{M} = \overline{\{(\mathrm{id} \otimes \omega)(\mathrm{W}^{\mathbb{G}}) : \omega \in \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G}))_*\}}^{\text{w topologii mocnej}} \subset \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G}))$$

Wówczas $\hat{M}$ jest algebrą von Neumanna;
(4) istnieje normalny różnowartościowy $*$-homomorfizm $\hat{\Delta} : \hat{M} \to \hat{M} \bar{\otimes} \hat{M}$ taki, że

$$\hat{\Delta}(x) = \Sigma \mathrm{W}^{\mathbb{G}*}(\mathbb{1} \otimes x)\mathrm{W}^{\mathbb{G}}\Sigma$$

dla wszystkich $x \in \hat{M}$;
(5) $(\hat{\mathrm{M}}, \hat{\Delta})$ jest lokalnie zwartą grupą kwantową. Dalej $(\hat{\mathrm{M}}, \hat{\Delta})$ oznaczamy $\hat{\mathbb{G}}$ i mówimy, że $\hat{\mathbb{G}}$ jest lokalnie zwartą grupą kwantowa dualną do $\mathbb{G}$;
(6) mamy $\mathrm{W}^{\hat{\mathbb{G}}} = \Sigma \mathrm{W}^{\mathbb{G}*}\Sigma$ oraz $\hat{\hat{\mathbb{G}}} = \mathbb{G}$.
(7) $\mathrm{W}^{\hat{\mathbb{G}}} \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_0(\hat{\mathbb{G}}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{G}))$ oraz

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta^{\mathbb{G}})(\mathrm{W}^{\mathbb{G}}) = \mathrm{W}^{\mathbb{G}}_{12}\mathrm{W}^{\mathbb{G}}_{13}$$
$$(\Delta^{\hat{\mathbb{G}}} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{W}^{\mathbb{G}}) = \mathrm{W}^{\mathbb{G}}_{23}\mathrm{W}^{\mathbb{G}}_{13}$$

(8) $\mathrm{C}_0(\mathbb{G}) = \overline{\{(\omega \otimes \mathrm{id})(\mathrm{W}^{\mathbb{G}}) : \omega \in \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G}))_*\}}^{\|\cdot\|}$

PRZYKŁAD 2.12. Niech G będzie grupą lokalnie zwartą. Niech $\Delta : \mathrm{L}^\infty(G) \to \mathrm{L}^\infty(G) \bar{\otimes} \mathrm{L}^\infty(G)$ będzie $*$-homomorfizmem takim, że $\Delta(f)(st) = f(st)$ dla wszystkich $s, t \in G$ oraz $f \in \mathrm{L}^\infty(G)$. Para $(\mathrm{L}^\infty(G), \Delta)$ jest LZGK w sensie Definicji 2.7. W dalszej części autoreferatu, jeśli G jest grupą lokalnie zwartą to oznaczamy $\mathbb{G} = (\mathrm{L}^\infty(G), \Delta)$. Niech ds będzie prawo niezmienniczą miarą Haara na G. Prawą wagę Haara ψ na $\mathbb{G}$ definiujemy wzorem

$$\psi(f) = \int_G f(s)ds$$

dla wszystkich $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})_+$; lewą wagę Haara ϕ na $\mathbb{G}$ definiujemy wzorem

$$\phi(f) = \int_G f(s^{-1})ds$$

dla wszystkich $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})_+$; $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{G})$ jest funkcją mierzalną $f : G \to \mathbb{C}$ taką, że

$$\int_G |f(s)|^2 ds < \infty$$

W szczególności $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \subset \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G}))$, gdzie $(fu)(s) = f(s)u(s)$ dla wszystkich $s \in G$, $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ oraz $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{G})$. Operator Kaca-Takesakiego $\mathrm{W}^{\mathbb{G}} \in \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{L}^2(\mathbb{G}))$ jest dany wzorem

$$(\mathrm{W}^{\mathbb{G}} u)(s,t) = u(st,t)$$

dla wszystkich $s,t \in G$ oraz $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{L}^2(\mathbb{G})$. Niech $\hat{\mathbb{G}}$ będzie dualną grupą kwantową. Wówczas

$$\mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}}) = \overline{\text{liniowa powłoka}\{R^G_s : s \in G\}}^{\text{w topologii mocnej}}$$

gdzie $R^G : \mathrm{L}^2(\mathbb{G}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{G})$ jest operatorem unitarnym: $R^G_s(u)(t) = u(st)$ dla wszystkich $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{G})$ oraz $s,t \in G$. Ponadto $\Delta^{\hat{\mathbb{G}}}(R^G_s) = R^G_s \otimes R^G_s$. Odwzorowanie

$$G \ni s \mapsto R^G_s \in \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(G))$$

jest reprezentacją unitarną G nazywaną reprezentacją regularną. Mamy więc reprezentację regularną R^G grupy G oraz reprezentacją regularną $\mathrm{W}^{\mathbb{G}}$ dla $\mathbb{G}$.

Niech H będzie domkniętą podgrupą G, G/H będzie przestrzenią lewych warstw H

$$G/H = \{gH : g \in G\}$$

oraz niech $\pi : G \to G/H$ będzie odwzorowaniem ilorazowym. Na G/H wprowadza się topologię ilorazową: $\mathcal{O} \subset G/H$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy $\pi^{-1}(\mathcal{O}) \subset G$ jest podzbiorem otwartym. Wówczas,

- G/H jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa;
- $\pi : G \to G/H$ jest odwzorowaniem ciągłym i otwartym.

Algebra $\mathrm{C}_0(G/H)$ jest podalgebrą w $\mathrm{M}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G})) = \mathrm{C}_b(G)$, oraz

$$\mathrm{C}_b(G/H) = \{f \in \mathrm{C}_b(G) : f(st) = f(s) \quad \forall s \in G, t \in H\}$$

W dalszej części pracy będziemy oznaczać

$$\mathrm{L}^\infty(G/H) = \{f \in \mathrm{L}^\infty(G) : f(st) = f(s) \quad \forall s \in G, t \in H\}$$

Można pokazać, że $\mathrm{C}_0(G/H)$ jest gęstą w topologii mocnej podalgebrą $\mathrm{L}^\infty(G/H)$. Rozważmy, $\alpha : \mathrm{L}^\infty(G/H) \to \mathrm{L}^\infty(G) \bar{\otimes} \mathrm{L}^\infty(G/H)$ oraz $\beta \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0(G/H), \mathrm{C}_0(G) \otimes \mathrm{C}_0(G/H))$ gdzie

$$\alpha = \Delta^{\mathbb{G}}|_{\mathrm{L}^\infty(G/H)}$$
$$\beta = \Delta^{\mathbb{G}}|_{\mathrm{C}_0(G/H)}$$

Wówczas $(\mathrm{L}^\infty(G/H), \alpha)$ jest $\mathbb{G}$-W^*-algebrą, α jest działaniem ergodycznym a $(\mathrm{C}_0(G/H), \beta)$ jest $\mathbb{G}$-C^*-algebrą.

W pracy [**Vae05**] sformułowana została definicja kwantowej podgrupy domkniętej. Poniżej podamy jej równoważną wersję.

Definicja 2.13. Niech $\mathbb{G}$ oraz $\mathbb{H}$ będą LZGK oraz niech $\gamma : \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}}) \to \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}})$ będzie injektywnym normalnym $*$-homomorfizmem. Mówimy, że γ identyfikuje $\mathbb{H}$ z kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$ jeśli

$$(\gamma \otimes \gamma) \circ \Delta^{\hat{\mathbb{H}}} = \Delta^{\hat{\mathbb{G}}} \circ \gamma$$

W sytuacji opisanej w Definicji 2.13 będziemy mówili, że $\mathbb{H}$ jest kwantową podgrupą domknięta grupy $\mathbb{G}$ oraz będziemy używali oznaczenia $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$.

Przykład 2.14. Niech $H \subset G$ będzie podgrupą domkniętą G. Jak zwykle oznaczmy $\mathbb{G} = (\mathrm{L}^\infty(G), \Delta^G)$ oraz $\mathbb{H} = (\mathrm{L}^\infty(H), \Delta^H)$. W następnym rozdziale uzasadnimy istnienie injektywnego normalnego $*$-homomorfizmu $\gamma : \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}}) \to \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}})$ takiego, że

$$\gamma(R_t^H) = R_t^G$$

dla wszystkich $t \in H$. Jest jasne, że

$$(\gamma \otimes \gamma) \circ \Delta^{\hat{\mathbb{H}}} = \Delta^{\hat{\mathbb{G}}} \circ \gamma$$

Zachodzi też twierdzenie odwrotne: jeśli $\mathbb{H}$ jest lokalnie zwartą grupą kwantową oraz $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ to istnieje podgrupa domknięta $H \subset G$ taka, że $\mathbb{H} = (\mathrm{L}^\infty(H), \Delta^H)$.

Zauważmy, że jeśli H jest domkniętą podgrupą G to istnieje morfizm $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}), \mathrm{C}_0(\mathbb{H}))$ obcinającym funkcję na G do $H \subset G$

$$\pi(f)(s) = f(s)$$

dla wszystkich $s \in H$ oraz $\pi(\mathrm{C}_0(\mathbb{G})) = \mathrm{C}_0(\mathbb{H})$. Ponadto

$$\Delta^{\mathbb{H}} \circ \pi = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta^{\mathbb{G}}$$

Utożsamiając $\mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}})$ z obrazem przy odwzorowaniu $\gamma : \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}}) \to \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}})$ można pokazać, że

$$\mathrm{L}^\infty(G/H) = \{x \in \mathrm{L}^\infty(G) : xy = yx \text{ dla wszystkich } y \in \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}})\}$$

gdzie iloczyn xy jest iloczynem operatorów działających na $\mathrm{L}^2(\mathbb{G})$ (zauważmy, że $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}), \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}}) \subset \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G}))$).

Ogólniej, niech $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ będą lokalnie zwartymi grupami kwantowymi i niech $\gamma : \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}}) \to \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}})$ utożsamia $\mathbb{H}$ z domkniętą podgrupą kwantową $\mathbb{G}$. W dalszym ciągu $\mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}})$ będziemy utożsamiać z algebrą von Neumanna działającą na $\mathrm{L}^2(\mathbb{G})$. Rozważmy, algebrę von Neumanna

$$N = \{x \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) : xy = yx \text{ dla wszystkich } y \in \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}})\}$$

Łatwo sprawdzić, że $\Delta^{\mathbb{G}}(N) \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \bar{\otimes} N$. Oznaczając $\alpha = \Delta^{\mathbb{G}}|_N$ dostajemy W^*-kwantową $\mathbb{G}$-przestrzeń jednorodną (N, α), którą będziemy oznaczać symbolem $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Zatem

$$\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = \{x \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) : xy = yx \text{ dla wszystkich } y \in \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}})\} \tag{3}$$

Powyższy przykład rodzi pytanie o C^*-algebraiczną wersję $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. W kontekście LZGK rozważano je w pracy [**Vae05**]. Przed sformułowaniem odpowiedniego twierdzenia, które opisuje $\mathrm{C}_0(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ rozważmy klasę regularnych lokalnie zwartych grup kwantowych. Definiując ją poniżej traktujemy $\mathrm{C}_0(\mathbb{G})$ oraz $\mathrm{C}_0(\hat{\mathbb{G}})$ jako algebry działające na $\mathrm{L}^2(\mathbb{G})$. W szczególności ma sens mówienie o $[\mathrm{C}_0(\mathbb{G})\,\mathrm{C}_0(\hat{\mathbb{G}})] \subset \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G}))$.

Definicja 2.15. Niech $\mathbb{G}$ będzie lokalnie zwartą grupą kwantową. Mówimy, że $\mathbb{G}$ jest regularna jeśli $[\mathrm{C}_0(\mathbb{G})\,\mathrm{C}_0(\hat{\mathbb{G}})] = \mathcal{K}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G}))$.

Następująca klasa odwzorowań jest użyteczna przy opisie $\mathrm{C}_0(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ i była rozważana w [**Vae05**].

DEFINICJA 2.16. Niech N będzie alebrą von Neumanna, B będzie C^*-algebrą oraz $\pi : N \to \mathrm{M}(B)$ będzie $*$-homomorfizmem. Mówimy, że π jest ciągły w topologii *strict* jeśli dla każdego ograniczonego, $*$-mocno zbieżnego do $x \in N$ ciągu uogólnionego $(x_i)_{i \in I}$ elementów N oraz dla każdego $b \in B$, ciąg uogólniony $(\pi(x_i)b)_{i\in I}$ elementów B jest zbieżny do $\pi(x)b$ w topologii normowej.

Poniższe twierdzenie jest jedną z motywacji dla badań podjętych w liście publikacji zgłoszonych jako dorobek habilitacyjny.

TWIERDZENIE 2.17. [**Vae05**, Twierdzenie 6.1] *Niech $\mathbb{G}$ będzie lokalnie zwartą regularną grupą kwantową oraz niech $\mathbb{H}$ będzie kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$. Wówczas istnieje jedna i tylko jedna C^*-algebra $D \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ spełniająca następujące warunki*

(1) *D jest mocno gęsta w $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H})$;*
(2) *$\Delta^{\mathbb{G}}(D) \subset \mathrm{M}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes D)$ oraz (D, β), gdzie $\beta = \Delta^{\mathbb{G}}|_D$ jest $\mathbb{G}$-C^*-algebrą;*
(3) *$\Delta^{\mathbb{G}}(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H})) \subset \mathrm{M}(\mathcal{K}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G})) \otimes D)$ oraz $*$-homomorfizm $\Delta^{\mathbb{G}}|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H})} \to \mathrm{M}(\mathcal{K}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G})) \otimes D)$ jest ciągły w topologii strict.*

W dalszym ciągu, $\mathbb{G}$-C^*-algebrę (D, β) oznaczać będziemy $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

3. Szczegóły osiągnięć

3.1. Kwantowe podgrupy domknięte. Omawianie szczegółów osiągnięcia habilitacyjnego zacznę od przedstawienia wyników pracy [**DKSS12**]. Motywacją do podjętych w niej badań było funkcjonowanie w literaturze dwóch definicji domkniętych grup kwantowych (patrz Definicja 2.13 and 2.5). W pracy [**DKSS12**] zostały szczegółowo zbadane związki między nimi.

Przejdźmy do wprowadzenia pojęcia homomorfizmu grup kwantowych. Jego sformułowanie bazuje na wersji uniwersalnej $(\mathrm{C}_0^u(\mathbb{G}), \Delta^u_{\mathbb{G}})$ lokalnie zwartej grupy kwantowej $\mathbb{G}$. Pominiemy tutaj dokładny opis $(\mathrm{C}_0^u(\mathbb{G}), \Delta^u_{\mathbb{G}})$ (patrz na przykład [**SS07**]). Dla celów tego autoreferatu wystarczającą jest informacja o istnieniu 1-1 odpowiedniości między reprezentacjami unitarnymi grupy kwantowej $\hat{\mathbb{G}}$ a niezdegenerowanymi reprezentacjami C^*-algebry $\mathrm{C}_0^u(\mathbb{G})$. Odpowiedniość tę najwygodniej opisać bazując na uniwersalnej wersji reprezentacji reprezentacji regularnej $\mathbb{W}^{\hat{\mathbb{G}}} \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_0^u(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{C}_0(\hat{\mathbb{G}}))$. W literaturze dotyczącej teorii reprezentacji grup kwantowych dowodzi się następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 3.1. *Niech $\mathbb{G}$ będzie grupą lokalnie zwartą oraz H będzie przestrzenią Hilberta. Dla każdej reprezentacji unitarnej $U \in \mathrm{M}(\mathcal{K}(H) \otimes \mathrm{C}_0(\hat{\mathbb{G}}))$ grupy kwantowej $\hat{\mathbb{G}}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\pi_U \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0^u(\mathbb{G}), \mathcal{K}(H))$ taki, że*

$$U = (\pi_U \otimes \mathrm{id})(\mathbb{W}^{\hat{\mathbb{G}}}) \tag{4}$$

Przejdźmy do omówienia homomorfizmów grup kwantowych. W pracy [**MRW12**] wykazano, że następujące trzy klasy obiektów są w 1-1 odpowiedniości

- *mocne homomorfizmy grup kwantowych*: morfizmy
$$\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0^u(\mathbb{G}), \mathrm{C}_0^u(\mathbb{H}))$$
spełniające
$$(\pi \otimes \pi) \circ \Delta^u_{\mathbb{G}} = \Delta^u_{\mathbb{H}} \circ \pi$$
Mówimy, że π zadaje homomorfizm z $\mathbb{H}$ do $\mathbb{G}$.

- *bicharaktery*: unitarne elementy
$$V \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_0(\hat{\mathbb{G}}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{H}))$$
spełniające
$$(\mathrm{id} \otimes \Delta^{\mathbb{H}})(V) = V_{12}V_{13}$$
$$(\Delta^{\hat{\mathbb{G}}} \otimes \mathrm{id})(V) = V_{23}V_{13}$$
Mówimy, że V zadaje homomorfizm z $\mathbb{H}$ do $\mathbb{G}$.
- *prawe homomorfizmy grup kwantowych*: morfizmy
$$\rho \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}), \mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{H}))$$
spełniające
$$(\Delta^{\mathbb{G}} \otimes \mathrm{id}) \circ \rho = (\mathrm{id} \otimes \rho) \circ \Delta^{\mathbb{G}}$$
$$(\mathrm{id} \otimes \Delta^{\mathbb{H}}) \circ \rho = (\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \rho$$
Mówimy, że ρ zadaje homomorfizm z $\mathbb{H}$ do $\mathbb{G}$.

Poniższe twierdzenie, posłuży nam dalej do zdefiniowania kwantowej podgrupy domkniętej w sensie Woronowicza.

TWIERDZENIE 3.2. [**DKSS12**, Twierdzenie 3.6] *Niech $\mathbb{G}$ oraz $\mathbb{H}$ będą LZGK i niech dany będzie homomorfizm z $\mathbb{H}$ do $\mathbb{G}$ opisany bicharakterem $V \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_0(\hat{\mathbb{G}}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{H}))$, mocnym homomorfizmem grup kwantowych $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0^u(\mathbb{G}), \mathrm{C}_0^u(\mathbb{H}))$ oraz prawym homomorfizmem grup kwantowych $\rho \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}), \mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{H}))$. Wówczas następujące warunku są równoważne.*

(1) $\pi(\mathrm{C}_0^u(\mathbb{G})) = \mathrm{C}_0^u(\mathbb{H})$
(2) $[\rho(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}))(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes \mathbb{1})] = \mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{H})$
(3) $\overline{\{(\omega \otimes \mathrm{id})(V) : \omega \in \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G}))_*\}}^{\|\cdot\|} = \mathrm{C}_0(\mathbb{H})$.

DEFINICJA 3.3. [**DKSS12**, Definicja 3.2] Niech $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ będą lokalnie zwartymi grupami kwantowymi i niech dany będzie homomorfizm z $\mathbb{H}$ do $\mathbb{G}$ opisany bicharakterem $V \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_0(\hat{\mathbb{G}}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{H}))$, mocnym homomorfizmem grup kwantowych $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0^u(\mathbb{G}), \mathrm{C}_0^u(\mathbb{H}))$ oraz prawym homomorfizmem grup kwantowych $\rho \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}), \mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{H}))$. Jeśli spełniony jest jeden z równoważnych warunków Twierdzenia 3.2 to mówimy, że $\mathbb{H}$ jest kwantową podgrupą domkniętą grupy kwantowej $\mathbb{G}$ w sensie Woronowicza

PRZYKŁAD 3.4. Można pokazać, że dla każdej grupy lokalnie zwartej G mamy $\mathrm{C}_0^u(G) = \mathrm{C}_0(G)$. Jeśli H jest domkniętą podgrupą w G to morfizm obcinający $\pi \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_0(G), \mathrm{C}_0(H))$ spełnia warunki Definicji 3.3. W szczególności π jest surjekcją $\pi(\mathrm{C}_0(G)) = \mathrm{C}_0(H)$.

Okazuje się, że własność surjektywności morfizmu obcinającego $\pi \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_0(G), \mathrm{C}_0(H))$ z Przykładu 3.4 można wzmocnić co jest treścią Twierdzenia Herza o obcięciu, [**Her70**]. Przed jego sformułowaniem rozważmy podzbiór $\mathcal{A}_{\mathbb{G}} \subset \mathrm{C}_0(G)$
$$\mathcal{A}_{\mathbb{G}} = \{(\omega \otimes \mathrm{id})(\mathrm{W}^{\mathbb{G}}) : \omega \in \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G}))_*\}$$
$\mathcal{A}_{\mathbb{G}}$ jest $*$-podalgebrą $\mathrm{C}_0(G)$, tzw. algebrą Fouriera grupy G.

TWIERDZENIE 3.5. [**Her70**] *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą, H jej podgrupą domkniętą oraz niech $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0(G), \mathrm{C}_0(H))$ będzie morfizmem obcinającym. Wówczas $\pi(\mathcal{A}_{\mathbb{G}}) = \mathcal{A}_{\mathbb{H}}$.*

Korzystając z Twierdzenia Herza można wykazać poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE 3.6. [**Zwa**, Wniosek 4.2.6] *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą, $H \subset G$ jej podgrupą domkniętą. Oznaczmy $\mathbb{G} = (\mathrm{L}^\infty(G), \Delta^G)$ oraz $\mathbb{H} = (\mathrm{L}^\infty(H), \Delta^H)$. Niech R^G będzie reprezentacją regularną G oraz R^H będzie reprezentacją regularną H. Wówczas istnieje różnowartościowy $*$-homomorfizm $\gamma : \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}}) \to \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}})$ takie, że $\gamma(R^H_t) = R^G_t$ dla wszystkich $t \in H$.*

Modyfikacja poniższej definicji pojawiła się już w poprzednim rozdziale (patrz Definicja 2.13):

DEFINICJA 3.7. Niech $\mathbb{G}$ oraz $\mathbb{H}$ będą LZGK oraz niech $\gamma : \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}}) \to \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}})$ będzie normalnym injektywnym $*$-homomorfizmem. Mówimy, że $\mathbb{H}$ jest domkniętą podgrupą kwantową $\mathbb{G}$ w sensie Vaesa jeśli

$$(\gamma \otimes \gamma) \circ \Delta^{\hat{\mathbb{H}}} = \Delta^{\hat{\mathbb{G}}} \circ \gamma$$

Omówienia związków pomiędzy Definicjami 3.3 oraz 3.7 zacznijmy od kontekstu klasycznego.

TWIERDZENIE 3.8. [**DKSS12**, Twierdzenia 4.2] *Niech G, H będą grupami lokalnie zwartymi. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathbb{H}$ jest kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$ w sensie Vaesa;*
2. *$\mathbb{H}$ jest kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$ w sensie Woronowicza;*
3. *H jest homeomorficzna z domkniętą podgrupą grupy G.*

Niech $\mathbb{G}$ i $\mathbb{H}$ będą lokalnie zwartymi grupami kwantowymi i niech $\mathbb{H}$ będzie kwantową podgrupą domkniętą grupy $\mathbb{G}$ we sensie Vaesa. Interpretując operator $\mathrm{W}^{\mathbb{H}}$ jako element $\mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}}) \bar{\otimes} \mathrm{L}^\infty(\mathbb{H})$ zdefiniujmy $V = (\gamma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{W}^{\mathbb{H}}) \in \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}}) \bar{\otimes} \mathrm{L}^\infty(\mathbb{H})$. Twierdzenie 3.5 z pracy [**DKSS12**] mówi w istocie, że V pozwala utożsamić $\mathbb{H}$ z kwantową podgrupą domkniętą grupy kwantowej $\mathbb{G}$. Mamy więc

TWIERDZENIE 3.9. [**DKSS12**, Twierdzenie 3.5] *Niech $\mathbb{H}$ będzie kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$ w sensie Vaesa daną $\gamma : \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}}) \to \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}})$. Zdefiniujmy $V = (\gamma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{W}^{\mathbb{H}}) \in \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}}) \bar{\otimes} \mathrm{L}^\infty(\mathbb{H})$. Wówczas V zadaje homomorfizm z $\mathbb{H}$ do $\mathbb{G}$ oraz $\mathbb{H}$ jest kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$ w sensie Woronowicza.*

UWAGA 3.10. W toku badań podjętych w ramach pracy [**DKSS12**] nie udało się wykazać równoważności definicji pojęcia kwantowej podgrupy domkniętej w sensie Vaesa i Woronowicza. Innymi słowy, dla domkniętych podgrup kwantowych w sensie Woronowicza nie udowodniono kwantowej wersji Twierdzenia Herza o obcinaniu. W świetle powyższych uwag kwantowa podgrupa domknięta w sensie Vaesa to taka kwantowa podgrupa domknięta w sensie Woronowicza, dla której zachodzi kwantowa wersja Twierdzenia Herza o obcinaniu.

Dla pewnych klas lokalnie zwartych grup kwantowych domkniętość w sensie Woronowicza i Vaesa są równoważne.

TWIERDZENIE 3.11. [**DKSS12**, Twierdzenie 5.1] *Niech G, H będą grupami lokalnie zwartymi oraz niech $\hat{\mathbb{G}}$, $\hat{\mathbb{H}}$ będą dualnymi LZGK. Następujące warunki są równoważne.*

1. *$\hat{\mathbb{H}}$ jest kwantową podgrupą domkniętą $\hat{\mathbb{G}}$ w sensie Vaesa;*
2. *$\hat{\mathbb{H}}$ jest kwantowa podgrupą domkniętą $\hat{\mathbb{G}}$ w sensie Woronowicza;*
3. *istnieje domknięta podgrupa normalna $N \subset G$ oraz izomorfizm grup lokalnie zwartych $\rho : G/N \to H$.*

TWIERDZENIE 3.12. [**DKSS12**, Twierdzenie 6.1] *Niech $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ będą LZGK oraz niech $\mathbb{H}$ będzie kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$ w sensie Woronowicza. Jeśli $\mathbb{H}$ jest zwartą grupą kwantową to $\mathbb{H}$ jest kwantową podgrupą domknięta $\mathbb{G}$ w sensie Vaesa.*

TWIERDZENIE 3.13. [**DKSS12**, Twierdzenie 6.2] *Niech $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ będą LZGK oraz niech $\mathbb{H}$ będzie kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$ w sensie Woronowicza. Jeśli $\mathbb{G}$ jest dyskretną grupą kwantową to $\mathbb{H}$ także jest dyskretna oraz $\mathbb{H}$ jest podgrupą kwantową $\mathbb{G}$ w sensie Vaesa.*

Kończąc przedstawiania wyników pracy [**DKSS12**] zauważmy, że zawiera ona nowy dowód klasycznego Twierdzenia Herza. Dowód ten bazuje na poniższej obserwacji poczynionej dla grup kwantowych.

TWIERDZENIE 3.14. [**DKSS12**, Twierdzenie 3.4] *Niech $\mathbb{H}$ będzie kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$ w sensie Woronowicza zadaną bicharakterem $V \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_0(\hat{\mathbb{G}}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{H}))$. Wówczas $\mathbb{H}$ jest kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$ w sensie Vaesa wtedy i tylko wtedy gdy reprezentacje V i $\mathrm{W}^{\mathbb{H}}$ grupy kwantowej $\mathbb{H}$ są kwazi-równoważne, tzn. istnieje przestrzeń Hilberta K oraz operator unitarny $T : K \otimes \mathrm{L}^2(\mathbb{G}) \to K \otimes \mathrm{L}^2(\mathbb{H})$ takie, że*

$$(T \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes V)(T^* \otimes \mathbb{1}) = (\mathbb{1} \otimes \mathrm{W}^{\mathbb{H}})$$

Niech H będzie podgrupą domkniętą G. Korzystając z powyższego twierdzenia widzimy, że twierdzenie Herza o obcinaniu można udowodnić, pokazując, że reprezentacja regularna $R^H : H \to \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(H))$ oraz obcięcie reprezentacji regularnej R^G do podgrupy H są kwazi-równoważne. Odpowiedni argument został podany pod koniec Rozdziału 4 pracy [**DKSS12**].

3.2. Kwantowe przestrzenie jednorodne. Kolejne prace włączone do listy z dorobku habilitacyjnego dotyczą całkowicie lub częściowo kwantowych przestrzeni jednorodnych. Ich omawianie zacznę od pracy [**Kas11**]. Rozważano w niej deformację Rieffela przestrzeni jednorodnych w kontekście wyników pracy [**Vae05**]. Otrzymana w ten sposób klasa przykładów $\mathbb{G}$-C^*-algebr jest jedną z motywacji dla badań podjętych w pracach [**Kas12**], [**KS14a**], [**KS15**] a omawianych w dalszej części autoreferatu.

W pracy [**Kas11**] korzystamy z wyników pracy [**Kas10a**]. Rozważano w niej grupę klasyczną G oraz $\mathbb{G}$-C^*-algebrę $\mathbb{X}$. Mając przemienną podgrupę domkniętą $\Gamma \subset G$ oraz ciągły 2-kocykl $\Psi : \hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma} \to \mathbb{T}$ na grupie dualne $\hat{\Gamma}$ można skonstruować

- lokalnie zwartą grupę kwantową $\mathbb{G}^\Psi$;
- $\mathbb{G}^\Psi$-C^*-algebrę $\mathbb{X}^\Psi$;

Jeśli H jest podgrupą domkniętą G oraz $\Gamma \subset H \subset G$ to deformacja Rieffela prowadzi do lokalnie zwartych grup kwantowych $\mathbb{H}^\Psi$ oraz $\mathbb{G}^\Psi$. W pracy [**Kas11**] zauważono, że $\mathbb{H}^\Psi$ jest domkniętą podgrupą kwantową $\mathbb{G}^\Psi$ w sensie Vaesa. Korzystając z [**Vae05**, Twierdzenie 6.1] widzimy, że jeśli $\mathbb{G}^\Psi$ jest regularną grupą kwantową to istnieje C^*-przestrzeń ilorazowa $\mathbb{G}^\Psi/\mathbb{H}^\Psi$. Regularność w pracy [**Kas11**] gwarantuje przyjęte założenie dotyczące funkcji modularnej $\delta : G \to \mathbb{R}_+$: zakłada się, że jej obcięcie do Γ jest trywialne

$$\delta(s) = 1 \text{ dla wszystkich } s \in \Gamma \tag{5}$$

Rozważmy teraz klasyczną przestrzeń ilorazową $\mathbb{G}/\mathbb{H} = (\mathrm{C}_0(G/H), \beta)$ jak opisano w Przykładzie 2.12. Stosując do niej deformację Rieffela dostajemy $\mathbb{G}^\Psi$-C^*-algebrę $(\mathbb{G}/\mathbb{H})^\Psi$.

TWIERDZENIE 3.15. [**Kas11**, Twierdzenie 6.2] *Niech $\Gamma \subset H \subset G$ oraz $\mathbb{H}^\Psi \subset \mathbb{G}^\Psi$, będą jak opisano powyżej. Wówczas istnieje izomorfizm $\mathbb{G}^\Psi$-C^*-algebr $(\mathbb{G}/\mathbb{H})^\Psi$ oraz $\mathbb{G}^\Psi/\mathbb{H}^\Psi$.*

Warto podkreślić, że podana w [**Vae05**, Twierdzenie 6.1] konstrukcja przestrzeni ilorazowej bazuje na teorii reprezentacji indukowanych grup kwantowych i jest ona dość zawiła. Twierdzenie powyższe daje względnie prosty opis $\mathbb{G}^{\Psi}/\mathbb{H}^{\Psi}$ w kontekście deformacji Rieffela.

W Rozdziale 7 pracy [**Kas11**] rozważa się, ogólniejszą sytuację, tzn. $H \subset G$ oraz $\Gamma \subset G$ bez założenia $\Gamma \subset H$. Wówczas istnieje $\mathbb{G}^{\Psi}$-C*-algebra $(\mathbb{G}/\mathbb{H})^{\Psi}$, jednak nie ma sensu mówić o $\mathbb{G}^{\Psi}/\mathbb{H}^{\Psi}$. Obserwacja ta daje motywację do rozwijania teorii kwantowych przestrzeni jednorodnych dla grup lokalnie zwartych, które nie są typu ilorazowego, a w ramach której można by rozważać na przykład $(\mathbb{G}/\mathbb{H})^{\Psi}$. W pracy [**Kas11**] nie została jeszcze zaproponowana odpowiednia definicja. Podano w niej pewien warunek, który kwantowe $\mathbb{G}$-przestrzenie jednorodne powinny spełniać. Aby go sformułować załóżmy, że $\mathbb{G}$ jest lokalnie zwartą grupą kwantową i rozważmy kategorię $\mathbb{G}$-C*-algebr. Zbiór morfizmów w kategorii $\mathbb{G}$-C*-algebr oznaczamy symbolem $\mathrm{Mor}_{\mathbb{G}}$. Jeśli $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ są $\mathbb{G}$-C*-algebrami oraz $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0(\mathbb{X}), \mathrm{C}_0(\mathbb{Y}))$ to $\pi \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ jeśli

$$(\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \beta^{\mathbb{X}} = \beta^{\mathbb{Y}} \circ \pi$$

DEFINICJA 3.16. Niech $\mathbb{G}$ będzie lokalnie zwartą grupą kwantową oraz niech $\mathbb{X}$ będzie $\mathbb{G}$-C*-algebrą. Mówimy, że $\mathbb{X}$ jest prostą $\mathbb{G}$-C*-algebrą jeśli dla każdej $\mathbb{G}$-C*-algebr $\mathbb{Y}$ oraz morfizmu $\pi \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ mamy $\ker \pi = \{0\}$.

Niech G będzie grupą lokalnie zwartą oraz X lokalnie zwartą G-przestrzenią. Wówczas $\mathrm{C}_0(X)$ jest G-prosta wtedy i tylko wtedy gdy X jest jedynym niepustym domkniętym G-niezmienniczym podzbiorem X.

TWIERDZENIE 3.17. [**Kas11**, Twierdzenie 7.1] *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą, $\Gamma \subset G$ będzie domkniętą przemienną podgrupą G oraz Ψ będzie ciągłym 2-kocyklem na $\hat{\Gamma}$. Jeśli $\mathbb{X}$ jest prostą $\mathbb{G}$-C*-algebrą to $\mathbb{X}^{\Psi}$ jest prostą $\mathbb{G}^{\Psi}$-C*-algebrą.*

Przejdę teraz do omówienia wyników pracy [**Kas12**], w której wprowadzono i zbadano pojęcie kwantowej $\mathbb{G}$-przestrzeni jednorodnej. W jej ramach można opisać kwantowe przestrzenie jednorodne zwartych grup kwantowych, kwantowe przestrzenie jednorodne typu ilorazowego oraz deformację Rieffela przestrzeni jednorodnych nie będące typu ilorazowego (nie pochodzące z ciągu zawierań $\Gamma \subset H \subset G$).

Motywacją poniższej definicji jest [**Vae05**, Twierdzenie 6.1], w świetle którego kwantowa $\mathbb{G}$-przestrzeń jednorodna jest obiektem posiadającym wersję von Neumannowską oraz C*-algebraiczną, połączone warunkami typu (1)-(3).

DEFINICJA 3.18. [**Kas12**, Definicja 3.1] Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK oraz $\mathbb{X} = (\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{X}), \alpha^{\mathbb{X}})$ będzie W*-kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną . Mówimy, że $\mathbb{X}$ jest kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną jeśli istnieje $\mathbb{G}$-C*-algebra $(\mathrm{C}_0(\mathbb{X}), \beta^{\mathbb{X}})$ taka, że

(1) $\mathrm{C}_0(\mathbb{X})$ jest mocno gęstą podalgebrą $\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{X})$;
(2) $\beta^{\mathbb{X}} = \alpha^{\mathbb{X}}|_{\mathrm{C}_0(\mathbb{X})}$
(3) $\alpha^{\mathbb{X}}(\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{X})) \subset \mathrm{M}(\mathcal{K}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G})) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{X}))$ oraz odwzorowanie $\alpha^{\mathbb{X}} : \mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{X}) \to \mathrm{M}(\mathcal{K}(\mathrm{L}^2(\mathbb{G})) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{X}))$ jest ciągłe w topologii *strict* .

Poniżej zaprezentujemy główne wyniki z pracy [**Kas12**]. Pierwsze dwa dotyczą jedyności $\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{X})$ oraz $\mathrm{C}_0(\mathbb{X})$.

STWIERDZENIE 3.19. [**Kas12**, Stwierdzenie 3.4] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK oraz $\mathbb{X}$ będzie będzie W*-kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną . Przypuśćmy, że (B_1, β_1) oraz (B_2, β_2) spełniają warunki (1)-(3) Definicji 3.18. Wówczas $(B_1, \beta_1) = (B_2, \beta_2)$.*

Dalej $(\mathrm{C}_0(\mathbb{X}), \beta^{\mathbb{X}})$ będziemy nazywali C^*-wersją kwantowej przestrzeni jednorodnej $\mathbb{X}$ i jeśli nie będzie prowadziło to do nieporozumień to oznaczamy $\mathbb{X} = (\mathrm{C}_0(\mathbb{X}), \beta^{\mathbb{X}})$.

STWIERDZENIE 3.20. [**Kas12**, Stwierdzenie 3.5] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK oraz $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ będą kwantowymi $\mathbb{G}$-przestrzeniami jednorodnymi. Przypuśćmy, że istnieje izomorfizm $\pi \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$. Wówczas π rozszerza się się do izomorfizmu $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X}_1)$ z $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X}_2)$.*

Kolejny wynik mówi o $\mathbb{G}$ - prostocie C^*-wersji $\mathbb{X}$.

TWIERDZENIE 3.21. [**Kas12**, Twierdzenie 4.2] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK oraz $\mathbb{X}$ będzie kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną. Wówczas $(\mathrm{C}_0(\mathbb{X}), \beta^{\mathbb{X}})$ jest $\mathbb{G}$-prosta.*

W [**Kas12**, Rozdział 5] omówiono kontekst klasyczny, czyli sytuację w której $\mathbb{G}$ jest związane z grupą lokalnie zwartą G.

TWIERDZENIE 3.22. [**Kas12**, Twierdzenie 5.2] *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą oraz $\mathbb{X}$ będzie kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną grupy $\mathbb{G}$ taką, że $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X})$ jest przemienną algebrą von Neumanna. Wówczas spektrum (przemiennej C^*-algebry) $\mathrm{C}_0(\mathbb{X})$ jest przestrzenią jednorodną grupy G.*

Dowód tego twierdzenia podany w pracy [**Kas12**] zawiera lukę. Przedstawione w nim rozumowanie pokazuje, że spektrum X C^*-algebry $\mathrm{C}_0(\mathbb{X})$ jest G-przestrzenią i działanie G na X jest tranzytywne. W szczególności X można utożsamić z G/H dla pewnej podgrupy domkniętej $H \subset G$. Nie wykazano, że topologie na X i na G/H są takie same. Innymi słowy nie wykazano, że istnieje G-homeomorfizm G/H z X. Luke tą usunięto w [**Kas15a**].

Rozdział 6 pracy [**Kas12**] zawiera dyskusję kwantowych $\mathbb{G}$-przestrzeni jednorodnych zwartej grupy kwantowej $\mathbb{G}$.

TWIERDZENIE 3.23. [**Kas12**, Twierdzenie 6.7.] *Niech $\mathbb{G}$ będzie zwartą grupą kwantową z wierną miarą Haara oraz niech (D, α) będzie ergodyczną $\mathbb{G}$-C^*-algebrą. Wówczas istnieje kwantowa przestrzeń jednorodna $\mathbb{X}$, której C^*-wersja jest równa (D, α).*

W Rozdziale 7 omówiono deformację Rieffela przestrzeni jednorodnej $X = G/H$. Zawiera ona istotne uogólnienie wyników z pracy [**Kas11**], wychodzące zazwyczaj poza kontekst ilorazowy $\mathbb{G}^\Psi/\mathbb{H}^\Psi$.

TWIERDZENIE 3.24. *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą, $\Gamma \subset G$ będzie przemienną domkniętą podgrupą grupy G, Ψ będzie ciągłym 2-kocyklem na $\hat{\Gamma}$ oraz $H \subset G$ będzie domkniętą podgrupą G. Niech $\mathbb{X} = \mathbb{G}/\mathbb{H}$. Wówczas istnieje kwantowa $\mathbb{G}^\Psi$-przestrzeń jednorodna, której C^*-wersja jest równa $\mathbb{X}^\Psi$.*

Przejdę teraz do omówienia wyników pracy [**KS14a**], w której definiujemy i badamy zanurzone kwantowe $\mathbb{G}$-przestrzenie jednorodne. Wprowadźmy najpierw W^*-wersję tego pojęcia.

DEFINICJA 3.25. Niech $\mathbb{G}$ będzie lokalnie zwartą grupą kwantową oraz niech $\mathbb{X} = (\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X}), \alpha^{\mathbb{X}})$ będzie W^*-kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną. Mówimy, że $\mathbb{X}$ jest zanurzoną W^*-kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną jeśli $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X}) \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ oraz $\alpha^{\mathbb{X}} = \Delta^{\mathbb{G}}|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X})}$.

UWAGA 3.26. W pracy [**KS14a**] używano terminu zanurzalna w kontekście Definicji 3.25. Powodem przyjęcia tej nieco nienaturalnej terminologii było dążenie do zgodności z definicją zanurzalnej kwantowej $\mathbb{G}$-przestrzeni jednorodnej dla ZGK $\mathbb{G}$ wprowadzonej w pracy [**Pod95**]. Dalej stosujemy termin zanurzona.

W [**KS14a**, Rozdział 3] opisano kodualność między zanurzonymi W^*-kwantowymi $\mathbb{G}$-przestrzeniami jednorodnymi a zanurzonymi W^*-kwantowymi $\hat{\mathbb{G}}$-przestrzeniami jednorodnymi. Oznaczając obiekt kodualny do $\mathbb{X}$ symbolem $\tilde{\mathbb{X}}$, mamy

$$\mathrm{L}^\infty(\tilde{\mathbb{X}}) = \{y \in \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}}) : xy = yx \text{ dla wszystkich } x \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{X})\}$$

oraz $\alpha^{\tilde{\mathbb{X}}} = \Delta^{\hat{\mathbb{G}}}|_{\mathrm{L}^\infty(\tilde{\mathbb{X}})}$. Oprócz wykazania, że $\tilde{\mathbb{X}}$ jest zanurzoną W^*-kwantową $\hat{\mathbb{G}}$-przestrzenią jednorodną, głównym wynikiem jest poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE 3.27. [**KS14a**, Twierdzenie 3.9] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK oraz niech $\mathbb{X}$ będzie zanurzoną W^*-kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną. Wówczas $\tilde{\tilde{\mathbb{X}}} = \mathbb{X}$.*

UWAGA 3.28. Niech $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ będą LZGK. Rozważmy $\mathbb{X} = \mathbb{G}/\mathbb{H}$. Opis $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ (patrz równanie (3)) wraz z Twierdzeniem 3.27 pozwala wywnioskować, że

$$\mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}}) = \{y \in \mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{G}}) : xy = yx \text{ dla wszystkich } x \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H})\}$$

W [**KS14a**, Rozdział 4] wprowadzono pojęcie zanurzonej kwantowej $\mathbb{G}$-przestrzeni jednorodnej.

DEFINICJA 3.29. Niech $\mathbb{G}$ będzie lokalnie zwartą grupą kwantową oraz niech $\mathbb{X}$ będzie kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną w sensie Definicji 3.18. Jeśli $(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X}), \alpha^{\mathbb{X}})$ jest zanurzoną W^*-kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną to mówimy, że $\mathbb{X}$ jest zanurzoną kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną.

Niech $\mathbb{X}$ będzie zanurzoną kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną. Oczewiście Stwierdzenia 3.19 oraz 3.20 zachodzą dla $(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X}), \beta^{\mathbb{X}})$. Dodatkowo mamy

TWIERDZENIE 3.30. [**KS14a**, Twierdzenie 4.7] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK, $\mathbb{X}$ będzie zanurzoną kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną. Wówczas $\mathrm{C}_0(\mathbb{X}) \subset \mathrm{M}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}))$ oraz włożenie $\mathrm{C}_0(\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathrm{M}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}))$ jest elementem $\mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0(\mathbb{X}), \mathrm{C}_0(\mathbb{G}))$.*

Przed omówienie kolejnych wyników pracy [**KS14a**] rozważmy lokalnie zwartą grupę G oraz jej podgrupę zwartą K. Wówczas mamy $\mathrm{C}_0(G/K) \subset \mathrm{C}_0(G)$ gdzie

$$\mathrm{C}_0(G/K) = \{f \in \mathrm{C}_0(G) : f(sk) = f(s) \text{ dla wszystkich } s \in G, k \in K\}$$

Z drugiej strony, jeśli $H \subset G$ jest podgrupą domkniętą lecz niezwartą, oraz $f \in \mathrm{C}_0(G/H)$, $f \neq 0$ to łatwo się przekonać, że $f \notin \mathrm{C}_0(G)$. Rozważania te prowadzą do poniższych dwóch rezultatów.

STWIERDZENIE 3.31. [**KS14a**, Stwierdzenie 5.1] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK oraz $A \subset \mathrm{C}_0(\mathbb{G})$ będzie niezdegenerowaną C^*-podalgebrą taką, że $\Delta^{\mathbb{G}}(A) \subset \mathrm{M}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes A)$ oraz $[(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes \mathbb{1})\Delta^{\mathbb{G}}(A)] = \mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes A$. Niech $N \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ będzie domknięciem $A \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ w topologii mocnej oraz niech $\alpha = \Delta^{\mathbb{G}}|_N$. Wówczas $\mathbb{X} = (N, \alpha)$ jest zanurzoną kwantową $\mathbb{G}$-przestrzenią jednorodną oraz $A = \mathrm{C}_0(\mathbb{X})$.*

TWIERDZENIE 3.32. [**KS14a**, Twierdzenie 5.4] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK oraz $\mathbb{H}$ będzie domkniętą podgrupą kwantową $\mathbb{G}$ w sensie Woronowicza, opisaną prawym homomorfizmem grup kwantowych $\rho \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}), \mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{H}))$. Wówczas*

(1) *jeśli $\mathbb{H}$ jest zwartą grupą kwantową to $\mathrm{C}_0(\mathbb{G}/\mathbb{H}) \subset \mathrm{C}_0(\mathbb{G})$ oraz*

$$\mathrm{C}_0(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = \{x \in \mathrm{C}_0(\mathbb{G}) : \rho(x) = x \otimes \mathbb{1}\}$$

(2) *jeśli istnieje $x \in \mathrm{C}_0(\mathbb{G}/\mathbb{H})$, $x \neq 0$ taki, że $x \in \mathrm{C}_0(\mathbb{G})$ to $\mathbb{H}$ jest zwartą grupą kwantową.*

Omawianie pracy [**KS14a**] zakończmy na prezentacji pewnej klasy zanurzonych kwantowych $\mathbb{G}$-przestrzeni jednorodnych. Jak wykazano [**KS14a**, Rozdział 6] opisane przykłady są typu ilorazowego wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{G}$ jest grupą lokalnie zwartą. Zaczniemy od następującej motywacji. Niech G będzie grupą lokalnie zwartą i niech G^{op} będzie grupą odwrotną (z odwrotnym mnożeniem). Różnowartościowy homomorfizm

$$G \ni g \mapsto (g, g^{-1}) \in G \times G^{\mathrm{op}}$$

daje utożsamienie G z podgrupą domkniętą $G \times G^{\mathrm{op}}$. Odwzorowanie

$$G \times G^{\mathrm{op}}/G \ni [(s,t)] \mapsto st \in G$$

zadaje utożsamienie

$$(G \times G^{\mathrm{op}})/G \cong G \tag{6}$$

Aby podać kwantowy odpowiednik powyższej konstrukcji rozważmy LZGK $\mathbb{G}$ i niech $\mathbb{G}^{\mathrm{op}}$ będzie LZGK odwrotną do $\mathbb{G}$, to znaczy $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ oraz

$$\Delta^{\mathbb{G}^{\mathrm{op}}} = \sigma \circ \Delta^{\mathbb{G}}$$

gdzie $\sigma : \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \bar{\otimes} \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \bar{\otimes} \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ jest tu automorfizmem takim, że

$$\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$$

Wówczas $\mathbb{G} \times \mathbb{G}^{\mathrm{op}}$ jest lokalnie zwartą grupą kwantową, której algebrą von Neumanna jest $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G} \times \mathbb{G}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \bar{\otimes} \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ a komnożenie jest dane formułą

$$\Delta^{\mathbb{G} \times \mathbb{G}^{\mathrm{op}}} = (\mathrm{id} \otimes \sigma \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta^{\mathbb{G}} \otimes \Delta^{\mathbb{G}^{\mathrm{op}}})$$

STWIERDZENIE 3.33. [**KS14a**, Stwierdzenie 6.1] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK oraz niech N będzie obrazem $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ przy odwzorowaniu $\Delta_{\mathbb{G}} : \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \bar{\otimes} \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}^{op})$. Wówczas*

(1) $\Delta^{\mathbb{G} \times \mathbb{G}^{\mathrm{op}}}\big(N\big) \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G} \times \mathbb{G}^{\mathrm{op}}) \bar{\otimes} N$,

(2) $\mathbb{X} = (N, \Delta^{\mathbb{G} \times \mathbb{G}^{\mathrm{op}}}|_N)$ *jest zanurzoną kwantową przestrzenią jednorodną grupy* $\mathbb{G}$ *oraz* $\mathrm{C}_0(\mathbb{X}) = \Delta_{\mathbb{G}}(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}))$.

STWIERDZENIE 3.34. [**KS14a**, Stwierdzenie 6.3] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK oraz $\mathbb{X}$ będzie zanurzoną kwantową przestrzenią jednorodną grupy kwantowej $\mathbb{G} \times \mathbb{G}^{op}$ opisaną w Stwierdzeniu 3.33. Wówczas następujące warunki są równoważne*

- *istnieje domknięta w sensie Vaesa kwantowa podgrupa $\mathbb{H} \subset \mathbb{G} \times \mathbb{G}^{op}$ taka że $\mathbb{X} = (\mathbb{G} \times \mathbb{G}^{op})/\mathbb{H}$;*
- *$\mathbb{G}$ jest grupą lokalnie zwartą.*

Omawianie dorobku habilitacyjnego zakończmy prezentacją wyników pracy [**KS15**]. Dotyczy ona lokalnie zwartych grup kwantowych $\mathbb{G}$ z wyróżnionym homomorfizmem $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ takim, że $\pi^2 = \pi$. Zagadnienie to było badane wcześniej w rozprawie doktorskiej S. Roya [**Roy**] przy użyciu metod C^*-algebr. W pracy [**KS15**] rozwijamy W^*-wersję tej teorii.

Lokalnie zwartą grupę G wyposażoną w homomorfizm $\pi : G \to G$ spełniający $\pi^2 = \pi$, można utożsamić z iloczynem krzyżowym grupy $N = \ker \pi$ przez działania sprzężone grupy $H = \pi(G)$ na N:

$$G = N \rtimes_{\mathrm{ad}} H$$

Na odwrót, iloczyn krzyżowy jest przykładem grupy z homomorfizmem $\pi : G \to G$ rzutowym $\pi^2 = \pi$.

Zanim podamy W^*-definicję kwantowej grupy $\mathbb{G}$ z rzutem na $\mathbb{H}$ rozważmy następującą definicję.

DEFINICJA 3.35. [**KS15**] Niech $\mathbb{G}$ i $\mathbb{H}$ będą LZGK oraz niech

$$\rho : \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})\bar{\otimes}\,\mathrm{L}^\infty(\mathbb{H})$$

będzie (prawym) działaniem $\mathbb{H}$ na $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$. Mówimy, że ρ jest W^*-prawym homomorfizmem grup kwantowych jeśli

$$(\Delta^{\mathbb{G}} \otimes \mathrm{id}) \circ \rho = (\mathrm{id} \otimes \rho) \circ \Delta^{\mathbb{G}}$$

DEFINICJA 3.36. [**KS15**, Definicja 3.1] Niech $\mathbb{G}$ i $\mathbb{H}$ będą LZGK. Mówimy, że $\mathbb{G}$ jest grupą kwantową z rzutem na $\mathbb{H}$ jeśli dany jest W^*-prawy homomorfizm grup kwantowych $\rho : \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})\bar{\otimes}\,\mathrm{L}^\infty(\mathbb{H})$ oraz normalny unitalny $*$-homomorfizm $\pi : \mathrm{L}^\infty(\mathbb{H}) \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ takie, że

$$\Delta^{\mathbb{G}} \circ \pi = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta^{\mathbb{H}}$$

$$\rho \circ \pi = (\pi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta^{\mathbb{H}}$$

STWIERDZENIE 3.37. [**KS15**, Stwierdzenie 3.3] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK z rzutem na $\mathbb{H}$ zadanym przez ρ oraz π. Wówczas π jest różnowartościowy.*

Tak jak w sytuacji klasycznej, $\mathbb{H}$ można utożsamić z kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$.

TWIERDZENIE 3.38. [**KS15**, Twierdzenie 3.4] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK z rzutem na $\mathbb{H}$. Wówczas $\mathbb{H}$ jest kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$ w sensie Vaesa.*

Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK z rzutem na $\mathbb{H}$. Twierdzenie 3.38 pozwala rozważać W^*-kwantową $\mathbb{G}$-przestrzeń ilorazową $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Jednym z wyników pracy [**KS15**] jest wykazanie, że algebra von Neumanna $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ jest generowana przez $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H}) \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ oraz $\pi(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{H})) \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$. Pozycje $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ i $\pi(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{H}))$ w $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ najlepiej opisać w terminach iloczynów krzyżowych.

STWIERDZENIE 3.39. [**KS15**, Stwierdzenie 4.1] *Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK z rzutem na $\mathbb{H}$ zadanym przez π oraz ρ. Wówczas istnieje działanie $\alpha : \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H}) \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H})\bar{\otimes}\,\mathrm{L}^\infty(\hat{\mathbb{H}}^{op})$ LZGK $\hat{\mathbb{H}}^{op}$ na $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ oraz izomorfizm $\lambda : \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H}) \rtimes_\alpha \hat{\mathbb{H}}^{op}$ taki, że*

$$(\lambda \otimes \mathrm{id}) \circ \rho = \hat{\alpha} \circ \lambda$$

gdzie

$$\hat{\alpha} : \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H}) \rtimes_\alpha \hat{\mathbb{H}}^{op} \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H}) \rtimes_\alpha \hat{\mathbb{H}}^{op}\bar{\otimes}\,\mathrm{L}^\infty(\mathbb{H})$$

jest działaniem $\mathbb{H}$ na $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H}) \rtimes_\alpha \mathbb{H}^{op}$ dualnym do α.

W kontekście klasycznym, gdy $G = N \rtimes H$ powyższe twierdzenie redukuje się do równości $\mathrm{L}^\infty(G) = \mathrm{L}^\infty(N)\bar{\otimes}\,\mathrm{L}^\infty(H)$.

W toku badań podjętych w pracy [**KS15**] został uzyskany wynik dotyczący działań grup kwantowych na algebrach von Neumanna. Przed jego sformułowaniem przypomnijmy, że definiując $\mathbb{G}$-C^*-algebry zakładaliśmy, że $[\beta^{\mathbb{X}}(\mathrm{C}_0(\mathbb{X}))(\mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{C}_0(\mathbb{X})})] = \mathrm{C}_0(\mathbb{G}) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{X})$. Okazuje się, że dla $\mathbb{G}$-W^*-algebr analog tego warunku jest automatycznie spełniony.

STWIERDZENIE 3.40. [**KS15**, Stwierdzenie 2.9] *Niech $\mathbb{G}$ będzie lokalnie zwartą grupą kwantową, M będzie algebrą von Neumanna oraz $\alpha : M \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})\bar{\otimes}M$ będzie działaniem $\mathbb{G}$ na M. Wówczas*

$$\overline{\textit{powłoka liniowa}(\alpha(M)(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})\bar{\otimes}\mathbb{1}))}^{\textit{domknięcie mocne}} = \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})\bar{\otimes}M$$

ROZDZIAŁ 2

Omówienie pozostałych osiągnięć naukowych

W niniejszym rozdziale omówię osiągnięcia naukowe pozostające poza główną częścią dorobku habilitacyjnego. Ich opis będzie mniej precyzyjny i ma na celu naszkicowanie zawartości omawianych prac.

1. Badania będące kontynuacją pracy doktorskiej - deformacja Rieffela

W swojej pracy doktorskiej zajmowałem się badaniem lokalnie zwartych grup kwantowych otrzymanych metodą deformacji Rieffela. Główną publikacją z doktoratu jest pozycja [**Kas10b**]. Opisano w niej grupę kwantową $\mathbb{G}$ będącą deformacją Rieffela grupy $SL(2,\mathbb{C})$

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} : \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}$$

Grupą abelową służącą do tej deformacji była podgrupa $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}$$

Oprócz konstrukcji grupy kwantowej $\mathbb{G}$ praca zawiera jej opis przy pomocy nieprzemiennych współrzędnych $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$.

W trakcie pracy nad doktoratem zostały uzyskane ogólne wyniki dotyczące deformacji Rieffela C^*-algebr. W szczególności podano nowy opis deformacji Rieffela w terminach teorii iloczynów krzyżowych C^*-algebr przez działanie lokalnie zwartej przemiennej grupy Γ. Wyniki tych badań zostały opublikowane w pracy [**Kas09**]. Oprócz przeformułowania teorii deformacji Rieffela wykazano w niej, że deformacja Rieffela C^*-algebry nuklearnej jest C^*-algebra nuklearną. Ponadto pokazano, że K-teoria nie zmienia się gdy $\Gamma = \mathbb{R}^n$.

Dwie powyżej opisane publikacje zawierają wyniki otrzymane w trakcie pracy nad rozprawą doktorską. Publikacja [**Kas10a**], będąca kontynuacją badań z pracy doktorskiej, zawiera rozszerzenie deformacji Rieffela, do $\mathbb{G}$-C^*-algebr. Niech $\mathbb{G}$ będzie LZGK związaną z lokalnie zwartą grupą G i niech $\mathbb{X}$ będzie $\mathbb{G}$-C^*-algebrą. Jeśli $\Gamma \subset G$ jest domkniętą podgrupą abelową grupy G oraz Ψ jest 2-kocyklem na $\hat{\Gamma}$ to, jak wykazano w [**Kas10a**], deformacja Rieffela $\mathbb{X}^\Psi$ jest $\mathbb{G}^\Psi$-C^*-algebrą. W pracy [**Kas10a**] podano też opis deformacji Rieffela przestrzeni Minkowskiego z działaniem $SL(2,\mathbb{C})$ w terminach odpowiednich współrzędnych nieprzemiennych.

2. Warkoczowe grupy kwantowe

Teoria warkoczowych grup kwantowych jest uogólnieniem teorii grup kwantowych. Tak jak w teorii grup kwantowych przemienną algebrę $\mathrm{C}_0(G)$ zastępuje się tu algebrą nieprzemienną A natomiast iloczyn tensorowy $\mathrm{C}_0(G)\otimes\mathrm{C}_0(G)$ zastępujemy nieprzemiennym iloczynem tensorowym $A\boxtimes A$, tzn. takim w którym elementy $a\boxtimes \mathbb{1}_A$ oraz $\mathbb{1}_A\boxtimes a'$ przestają być przemienne. W kontekście C^*-algebr teoria warkoczowych lokalnie zwartych grup kwantowych była rozwijana w pracach [**MRW14**], [**MRW**]. Przejdę do opisu moich osiągnięć uzyskanych w tym kontekście.

W pracy [**KMRW**] podano opis kwantowej warkoczowej grupy $SU_q(2)$, $q \neq 0$. Dla $q \notin \mathbb{R}$, $SU_q(2)$ nie jest ZGK lecz jest warkoczową zwartą grupą kwantową. W pracy [**Kas15b**] opisano sposób konstrukcji warkoczowych grup kwantowych przy pomocy deformacji Rieffela. W szczególności kwantową przestrzeń Minkowskiego z pracy [**Kas10a**] daje się wyposażyć w strukturę warkoczowej grupy kwantowej, co opisano w ostatnim rozdziale [**Kas15b**].

3. Inne badania

3.1. Kwantowe grupy automorfizmów grup kwantowych są grupami klasycznymi. Niech $\mathbb{H}$ będzie skończoną grupą kwantową, tzn.: $\mathbb{H}$ jest zwartą grupą kwantową taką, że $\dim(\mathrm{C}(\mathbb{H})) < \infty$. W pracy [**BSS15**] zdefiniowano kwantową grupę QAut$(\mathbb{H})$ kwantowych automorfizmów $\mathbb{H}$. Grupa klasycznych automorfizmów Aut$(\mathbb{H})$ jest podgrupą QAut$(\mathbb{H})$. Definiując QAut$(\mathbb{H})$ nie podano przykładu $\mathbb{H}$, dla którego QAut$(\mathbb{H}) \neq$ Aut$(\mathbb{H})$. W pracy [**KSW15**] pokazano, że QAut$(\mathbb{H}) =$ Aut$(\mathbb{H})$.

3.2. Rozszerzenia grup kwantowych. W pracy [**KSS15**] podaliśmy definicję centrum $\mathcal{Z}(\mathbb{G})$ oraz kwantowej grupy wewnętrznych automorfizmów Inn$(\mathbb{G})$. Główny wynik pracy pokazuje, że istnieje ciąg dokładny LZGK postaci

$$\{e\} \to Z(\mathbb{G}) \to \mathbb{G} \to \mathrm{Inn}(\mathbb{G}) \to \{e\}$$

W pracy [**KS14b**] rozważano kwantową grupę $\mathbb{G}$ z rzutem na $\mathbb{H}$ w kontekście teorii rozszerzeń LZGK. W głównym rezultacie tej pracy sformułowany jest warunek, gwarantujący istnienie ciągu dokładnego grup kwantowych zawierający $\mathbb{G} \to \mathbb{H}$.

3.3. Kwantowe podgrupy otwarte. W pracy [**KKS15**] rozwijana jest teoria kwantowych podgrup otwartych. W szczególności wykazujemy w niej, że jeśli $\mathbb{H}$ jest kwantowa podgrupą otwartą $\mathbb{G}$ to $\mathbb{H}$ jest kwantową podgrupą domkniętą $\mathbb{G}$ w sensie Vaesa. Podajemy też charakteryzację otwartości podgrupy w terminach zawierania C*-algebr związanych z $\mathbb{G}$ oraz $\mathbb{H}$. Opisane zostały ciągi dokładne zawierające $\mathbb{H} \to \mathbb{G}$ gdzie $\mathbb{H}$ jest otwartą podgrupą $\mathbb{G}$.

3.4. Algorytmy przetwarzania danych z urządzeń pomiarowych NMR. W ramach pracy naukowej nawiązałem współpracę ze specjalistami w dziedzinie nuklearnego rezonansu magnetycznego (NMR). Postawili oni problem dotyczący przetwarzania i interpretacji danych zebranych w ich urządzeniach pomiarowych. Zadanie polegało na odtworzeniu struktury badanego związku na bazie niepełnego, losowo próbkowanego sygnału NMR. Stosując metody *compressed sensing* zaproponowałem algorytm przetwarzania takich danych, którego opis podano w pracy [**KK15**].

4. Nagrody, stypendia i granty badawcze

- 2005 - Nagroda dydaktyczna za zajęcie prowadzone na Wydziale Fizyki UW
- 2010 - Nagroda im. Rektora Grzegorza Białkowskiego za osiągnięcia naukowe
- 2012-2014 grant Narodowego Centrum Nauki 2011/01/B/ST1/06474 'Coefficients of cyclic homology and noncommutative geometry of C*-algebras and Dirac operators', wykonawca
- 2011-2014 grant Narodowego Centrum Nauki 2011/01/B/ST1/05011 'Topological quantum groups and quantum families of mappings', wykonawca.

5. Inna działalność naukowa

5.1. Dłuższe pobyty badawcze.

- 2009-2010: Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen.

5.2. Wybrane krótkie (do trzech tygodni) wyjazdy naukowe jako wizytujący matematyk.

- 2014: Univeristy of Goettingen, Institute of Mathematics
- 2013: Univeristy of Goettingen, Institute of Mathematics
- 2010: Cardiff School of Mathematics

5.3. Konferencje - zaproszone referaty.

- Regularnie, z częstotliwością 2-3 rocznie wygłaszam referaty na **Seminarium Algebry Operatorów i Grupy Kwantowe**, Wydział Fizyki UW.
- Regularnie, z częstotliwością około raz do roku wygłaszam referaty na **Seminarium Nieprzemiennej Geometrii**, IMPAN.
- **QOP Network Meeting**, Warszawa IMPAN, 7 - 11 kwiecień 2015 *Quantum group of inner automorphisms*
- **From poisson brackets to universal quantum symmetries**, Warszawa IMPAN 18 - 22 sierpień 2014, *Rieffel deformation of the tensor functor and braided quantum groups*
- **Noncommutative Geometry and Quantum Groups in honour of Marc A. Rieffel**, Toronto Fields Institute, 24-28 czerwiec 2013, *Rieffel deformation via crossed products*
- **Non-commutative geometry and quantum groups**, University of Oslo, 10-15 czerwiec 2012, *Closed quantum subgroups*
- **Workshop on quantum groups and physics**, Caen University, 6-10 wrzesień 2010, *Quantum homogeneous spaces*
- **13th Workshop: non-commutative harmonic analysis**, Będlewo, 11-17 czerwiec 2010, *Quantum homogeneous spaces*
- **EU-NCG 3rd Annual Meeting**, Cardiff School of Mathematics, 28 czerwiec-2 lipec 2010, *Quantum homogeneous spaces*
- C^***-algebras and their interplay with dynamical systems**, Sophus Lie Conference Center, 31 maj -4 czerwiec 2010, *Quantum homogeneous spaces*
- **Von Neumann algebras and group action**, University of Copenhagen, 25 styczeń - 1 luty 2010, *Rieffel deformation of homogeneous space*
- **Master Class on the Classification of C*-algebras**, University of Copenhagen, 16-27 listopad 2009, C^**-algebraic quantum Minkowski space*
- **EU-NCG mid term review and conference**, University of Copenhagen, 28 wrzesień - 2 październik 2009, *Rieffel deformation via crossed products*
- **AMS-PTM meeting** , IMPAN Warszawa, 31 lipiec - 3 sierpień 2007, *Quantum Heisenberg-Lorentz group*
- **Conference in honor of Paul F. Baum's 70th birthday**, IMPAN Warszawa,, 31 lipiec - 3 sierpień 2007, *Rieffel Deformation via crossed products*
- **New Symmetries in Mathematics and Physics**, Marsylia, 22-26 listopad 2006, *Quantum Heisenberg-Lorentz group*

5.4. Zaproszony cykl wykładów dla młodych matematyków i fizyków teoretyków.

- **The First Quantum Geometry and Quantum Gravity School**, 23 marzec-3 kwiecień *Cykl wykładów o kwantowych grupach Lorentza, 6g.*

5.5. Działalność recenzencka i inne.

- Recenzent artykułów zgłoszonych do Advances in Mathematics, International Mathematics Research Notices, Journal of Functional Analysis, Journal of the London Mathematical Society, Journal of Operator Theory, SIGMA, Transactions of the American Mathematical Society
- Współorganizator Seminarium Algebry Operatorów i Grupy Kwantowe od 2012.

Bibliografia

[Boc95] Florin Bocca. Ergodic actions of compact matrix pseudogroups on C*-algebras. *Rec. Adv. Op. Alg., Asterisque*, (232):93 —- 110, 1995.

[BRV06] Julien Bichon, An De Rijdt, and Stefan Vaes. Ergodic coactions with large multiplicity and monoidal equivalence of quantum groups. *Commun. Math. Phys.*, (262):703–728, 2006.

[BSS15] J. Bhowmick, A. Skalski, and P.M. Sołtan. Quantum group of automorphisms of a finite (quantum) group. *J. Algebra*, (423):514–537, 2015.

[DCY] Kenny De Commer and Makoto Yamashita. Tannaka-Krein duality for compact quantum homogeneous spaces II. Classification of quantum homogeneous spaces for quantum $SU(2)$. *J. Reine Angew. Math. to be published*.

[DCY13] Kenny De Commer and Makoto Yamashita. Tannaka–Krein duality for compact quantum homogeneous spaces I. General theory,. *Theory Applic. Categ.*, 28(31):1099–1138, 2013.

[DKSS12] M. Daws, P. Kasprzak, P.M. Sołtan, and A. Skalski. Closed quantum subgroups of locally compact quantum groups. *Adv. Math.*, (231):3473–3501, 2012.

[Her70] C. Herz. Le rapport entre l'algèbre A_p d'un groupe et d'un sous-groupe. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, (271):244–246, 1970.

[Kas09] P. Kasprzak. Rieffel deformation via crossed products. *J. Funct. Anal.*, (257):1288–1332, 2009.

[Kas10a] P. Kasprzak. Rieffel deformation of group coactions . *Commun. Math. Phys.*, (300):741–763, 2010.

[Kas10b] P. Kasprzak. The Heisenberg–Lorentz quantum group. *J. Noncommut. Geom*, (4):577– 611, 2010.

[Kas11] P. Kasprzak. Rieffel deformation of homogeneous spaces. *J. Funct. Anal.*, (260):146 – 163, 2011.

[Kas12] P. Kasprzak. On a certain approach to quantum homogeneous spaces. *Commun. Math. Phys.*, (313):237–255, 2012.

[Kas15a] P. Kasprzak. Erratum to: On a Certain Approach to Quantum Homogeneous Spaces. *Commun. Math. Phys.*, (335):545–546, 2015.

[Kas15b] P. Kasprzak. Rieffel deformation of tensor functor and braided quantum groups. *Commun. Math. Phys.*, (337):1035–1051, 2015.

[KK15] P. Kasprzak and Kazimierczuk K. Modified OMP Algorithm for Exponentially Decaying Signals. *Sensors*, (15):234–247, 2015.

[KKS15] M. Kalantar, P. Kasprzak, and A. Skalski. Open quantum subgroups of locally compact quantum groups. *arXiv:1511.03952 preprint*, 2015.

[KMRW] P. Kasprzak, R. Meyer, S. Roy, and S. L. Woronowicz. *J. Noncommut. Geom. accepted*.

[KS14a] P. Kasprzak and P.M. Sołtan. Embeddable quantum homogeneous spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, (411):477–489, 2014.

[KS14b] P. Kasprzak and P.M. Sołtan. Quantum groups with projection and extensions of locally compact quantum groups. *arXiv:1412.0821 preprint*, 2014.

[KS15] P. Kasprzak and P.M. Sołtan. Quantum groups with projection on von Neumann algebra level. *J. Math. Anal. Appl.*, (427):289—-306, 2015.

[KSS15] P. Kasprzak, A. Skalski, and P.M. Sołtan. Short exact sequence $\{e\} \to Z(\mathbb{G}) \to \mathbb{G} \to \mathrm{Inn}(\mathbb{G}) \to \{e\}$ for locally compact quantum groups. *arXiv:1508.02943 preprint*, 2015.

[KSW15] P. Kasprzak, P.M. Sołtan, and S.L. Wornowicz. Quantum automorphism groups of finite quantum groups are classical. *J. Geom. Phys.*, (89):32–37, 2015.

[Kus02] J. Kustermans. Induced Corepresentations of Locally Compact Quantum Groups . *J. Funct. Anal.*, (194):410–459, 2002.

[KV00] J. Kustermans and S. Vaes. Locally compact quantum groups. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, (33):837–934, 2000.

[KV03] J. Kustermans and S. Vaes. Locally compact quantum groups in the von neumann algebraic setting. *Mathematica Scandinavica*, (92):68–92, 2003.

[MNW03] T. Masuda, Y. Nakagami, and S. L. Woronowicz. A C*-algebraic framework for the quantum groups. *Int. J. Math.*, (14):903–1001, 2003.

[MRW] R. Meyer, S. Roy, and S. L. Woronowicz. Quantum group-twisted tensor products of C*-algebras, ii `http://http://arxiv.org/abs/1501.04432`. *preprint.*

[MRW12] R. Meyer, S. Roy, and S. L. Woronowicz. Homomorphisms of quantum groups. *Münster Journal of Mathematics*, 5(1): 1 – 24, 2012.

[MRW14] R. Meyer, S. Roy, and S. L. Woronowicz. Quantum group-twisted tensor products of C*-algebras. *Int. J. Math.*, (25), 2014.

[Pod87] P. Podleś. Quantum spheres. *2 Lett. Math. Phys*, (14):193 – 202, 1987.

[Pod95] P. Podleś. Symmetries of Quantum Spaces. Subgroups and Quotient Spaces of Quantum $SU(2)$ and $SO(3)$ Groups. *Commun. Math. Phys.*, (170):1 – 20, 1995.

[Roy] S. Roy. Quantum groups with projection. Ph.D. dissertation, Georg-August-Universität Göttingen, 2013.

[SS07] P. Sołtan and Woronowicz S.L. From multiplicative unitaries to quantum groups II. *J. Funct. Anal.*, (252):42–67, 2007.

[Vae05] S. Vaes. A new approach to induction and imprimitivity results. *J. Funct. Anal.*, (229):317–374, 2005.

[Wor87] S.L. Woronowicz. Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus. *Publications of RIMS Kyoto University*, 23(1):117 – 181, 1987.

[Wor95] S.L. Woronowicz. C^*-algebras generated by unbounded elements. *Rev. Math. Phys.*, 7(3):481 – 521, 1995.

[Wor98] S.L. Woronowicz. Compact quantum groups. In *Les Houches, Session LXIV, 1995, Quantum Symmetries*, pages 845 – 884. Elsevier, 1998.

[Zwa] C Zwarich. Von neumann algebras for abstract harmonic analysis. *Thesis at University of Waterloo, available at* `http://hdl.handle.net/10012/3920`.