PODSTAWY FIZYKI - WYKŁAD 1

WSTĘP

KINEMATYKA - OPIS RUCHU

DYNAMIKA - OPIS ODDZIAŁYWAŃ

Piotr Nieżurawski
pniez@fuw.edu.pl
Wydział Fizyki
Uniwersytet Warszawski

http://www.fuw.edu.pl/~pniez/bioinformatyka/

Co to za wykład?

Wykład *Podstawy fizyki* przeznaczony jest dla studentów I roku

makrokierunku *Bioinformatyka i biologia systemów*.

Szczegółowy opis

- programu,
- zasad zaliczania

oraz linki do strony w USOS itp. znajdują się na stronie WWW przedmiotu

http://www.fuw.edu.pl/~pniez/bioinformatyka/

W szczególności pod linkiem

Opis przedmiotu *Podstawy fizyki*

Czym jest fizyka?

Fizyka jest nauką mającą na celu formułowanie coraz wierniejszego ***opisu*** fundamentalnych aspektów ***rzeczywistości***.

Teoria $\rightleftharpoons$ Eksperyment

Eksperyment - powtarzalna procedura prowadząca do dobrze określonego wyniku jakościowego (np. „następuje eksplozja”) lub ilościowego (np. „przyśpieszenie kuli jest równe $9{,}8 \pm 0{,}1$ m/s^2”).

Teoria - zbiór pojęć i struktur matematycznych wraz z przepisem uzyskiwania z nich przewidywań jakościowych lub ilościowych, które można sprawdzić eksperymentalnie.

Przykład

Swobodny spadek różnych ciał w rurze próżniowej.

Jak opisać rzeczywistość?

Zacznijmy od aspektów (pozornie) oczywistych:

- odległości,
- położenia,
- rozmiarów...

Dobrym opisem jest **geometria euklidesowa** (*testy:* suma kątów w trójkącie, twierdzenie Pitagorasa, symetrie...) w trzech wymiarach.

Idealizacje obiektów:

- punkt materialny,
- bryła sztywna,
- nieważki pręt, lina, okrągłe koło, prosta szyna itd.

Jak opisać położenie wykładowcy?

Wyznaczamy ***układ odniesienia*** np.: dwie prostopadłe ściany oraz podłogę i podajemy ***odległości*** od nich do wybranego punktu wykładowcy. Odległość mierzymy wzorcową miarą.

Wygodne narzędzie: układ kartezjański

$$(x;\ y;\ z) = (120 \pm 1;\ \ 240 \pm 2;\ \ 175 \pm 1)\ \text{cm}$$

Współrzędne kartezjańskie $(x;\ y;\ z) \longrightarrow$ współrzędne ***wektora położenia***

$$\vec{r}_w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

o początku w punkcie $(0;\ 0;\ 0)$.

Jaka jest odległość między dwoma punktami?

Wektory położenia o początku w punkcie $(0;\ 0;\ 0)$:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Wektor o początku w punkcie 1 i końcu w punkcie 2:

$$\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Odległość między punktami - długość wektora $\vec{d}$ - a *współrzędne kartezjańskie*:

$$d \equiv |\vec{d}| = \sqrt{\vec{d} \cdot \vec{d}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$\vec{d} \cdot \vec{d}$? Iloczyn skalarny?

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_{\parallel} B = A B_{\parallel} = AB \cos \alpha,$$

gdzie α jest kątem między wektorami, gdy zaczepimy je w tym samym punkcie.

Iloczyn skalarny jest rozdzielny względem dodawania. Można więc wyrazić go poprzez składowe kartezjańskie następująco:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{A}_{\parallel x} + \vec{A}_{\parallel y} + \vec{A}_{\parallel z}) \cdot (\vec{B}_{\parallel x} + \vec{B}_{\parallel y} + \vec{B}_{\parallel z}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

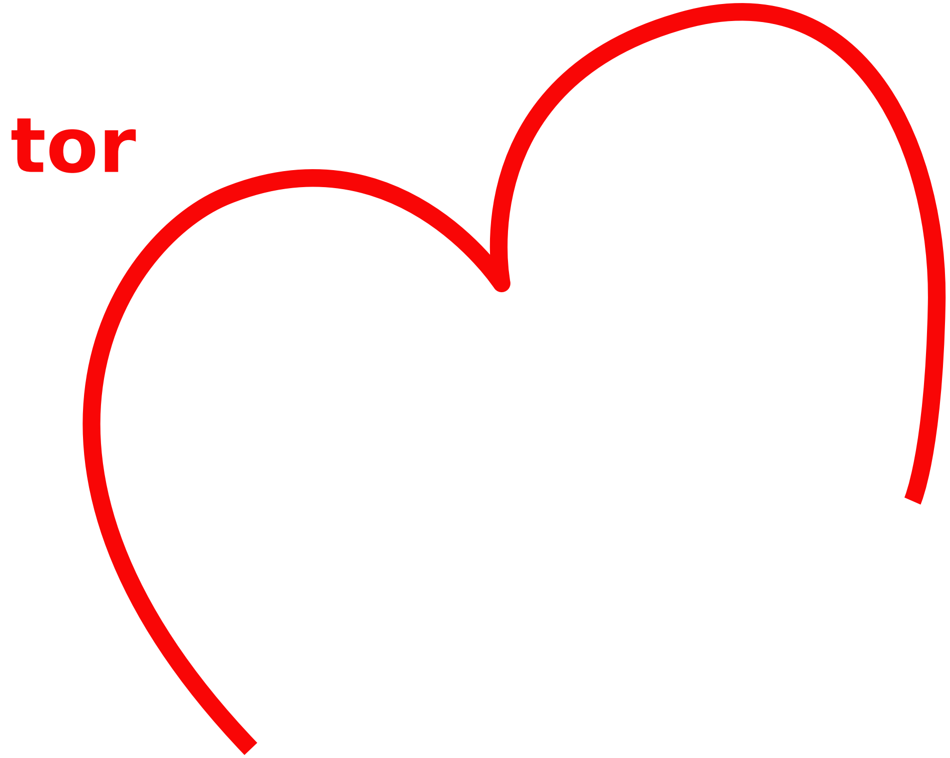
Dla $\vec{d} \cdot \vec{d}$ mamy

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = d^2 \cos(0) = d_x^2 + d_y^2 + d_z^2$$

A jak opisać zmianę położenia?

Torem punktu materialnego nazywamy krzywą, po której porusza się ten punkt w danym układzie odniesienia.

Przykłady: odcinek, okrąg lub ta krzywa



Drogą nazywamy długość *toru*.

Przykłady: 10 m, 120 km.

Uwaga!

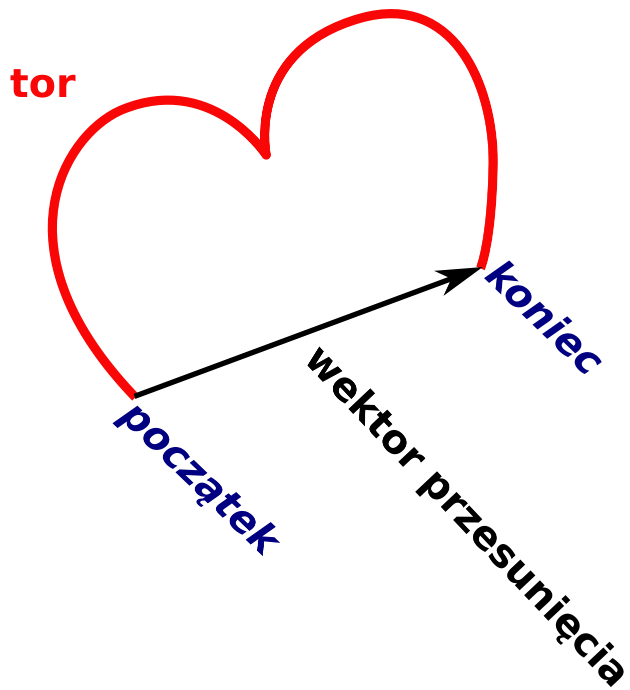
Fragmenty krzywej, po której porusza się punkt materialny, mogą nakładać się na siebie i wtedy przy obliczaniu drogi musimy **dodawać długość** każdego fragmentu tyle razy, ile razy został przebyty przez punkt materialny.

Np. biedronka, która przeszła 4 razy od jednego końca pręta do drugiego i z powrotem, pokonała **drogę** 8 m, jeśli pręt miał długość 1 m. Natomiast **tor** biedronki na rysunku będzie zaznaczony za pomocą jednego odcinka o długości 1 m.

Przemieszczeniem (przesunięciem) lub ***wektorem przemieszczenia (przesunięcia)*** nazywamy wektor mający swój początek w początkowym położeniu ciała oraz koniec w końcowym położeniu ciała.

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Wartość wektora przemieszczenia na ogół nie jest równa drodze (*wartość* wektora to jego długość). *Przykład:*



Jak szybko porusza się ciało?

Do określenia dalszych pojęć potrzebujemy miary ***czasu***. Czas mierzymy, licząc pełne cykle procesu, który wydaje się, że przebiega ciągle tak samo (zegar).

Szybkością średnią

lub (gdy nieistotny jest kierunek ruchu)

prędkością średnią

$\langle v \rangle$ ***na drodze*** ΔS nazywany jest stosunek:

$$\langle v \rangle \equiv \frac{\Delta S}{\Delta t} \ ,$$

gdzie Δt jest interwałem czasu, w którym ciało przebyło drogę ΔS.

Przykład: Rowerzysta przejechał krętą trasę o długości 20 km w czasie 1 h, poruszał się więc z szybkością średnią 20 km / (1 h) = 20 km/h.

Szybkością chwilową lub ***wartością prędkości chwilowej***

lub gdy nieistotny jest kierunek ruchu po prostu

prędkością chwilową

nazywamy *szybkość średnią* mierzoną w bardzo krótkim czasieΔt:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ przy bardzo krótkim } \Delta t$$

czyli

$$v \equiv \frac{dS}{dt}$$

Przykład: Samochód przejechał prostą drogę o długości 3 m w czasie 0,1 s; jego prędkość chwilowa to 3 m / (0,1 s) = 30 m/s.

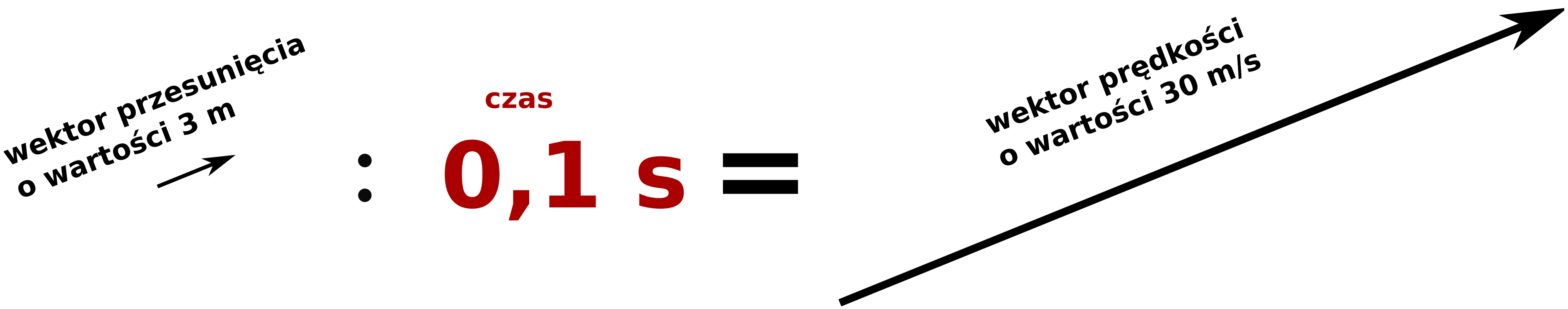
Wektorem prędkości chwilowej (lub po prostu ***prędkością chwilową***) nazywamy wektor równy stosunkowi wektora przemieszczenia $\Delta\vec{r}$ do krótkiego interwału czasu Δt, w którym to przemieszczenie nastąpiło:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

czyli

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Przykład: Samochód przebył prosty odcinek o długości 3 m w czasie 0,1 s:



Jak to wygląda we współrzędnych kartezjańskich?

Równanie ruchu, czyli zależność położenia od czasu:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Prędkość chwilowa:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

Szybkość chwilowa to oczywiście $v = |\vec{v}|$.

Uwaga

Zwyczajowo zamiast określenia **„szybkość”** używa się określenia **„prędkość”**. Przeważnie z kontekstu można wywnioskować, o którą wielkość chodzi.

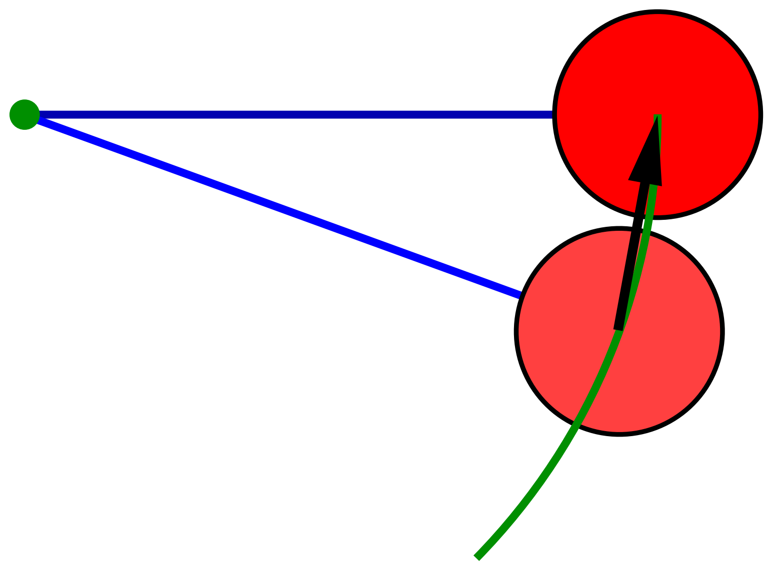
Np. w pytaniu o średnią *prędkość* samochodu na trasie Warszawa-Kraków-Gniezno pytający raczej ma na myśli średnią *szybkość*.

Jaki kierunek ma prędkość w ruchu po okręgu?

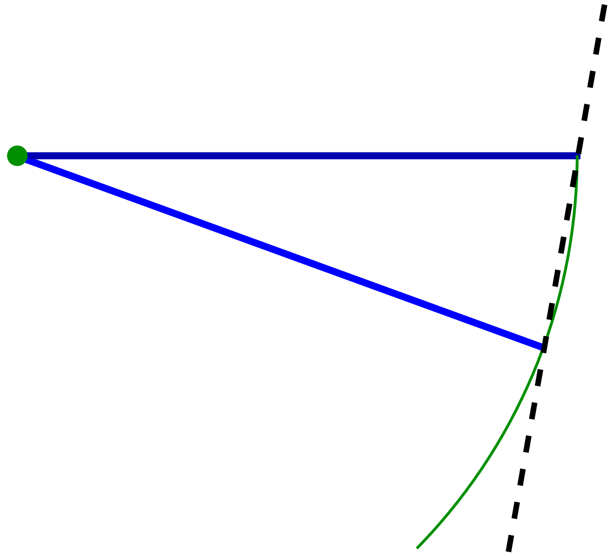
Z definicji prędkości

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

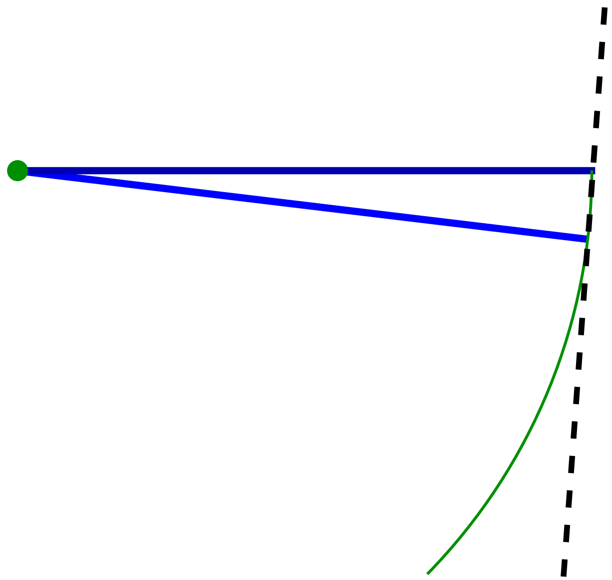
wynika, że kierunek prędkości jest taki sam jak kierunek przesunięcia. Po pewnym krótkim Δt:



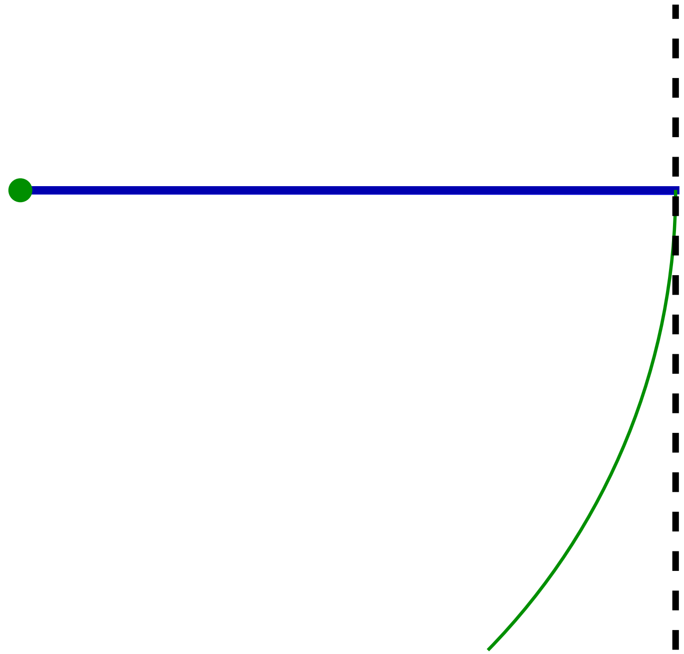
Kierunek:



Dla krótszego interwału czasu:



Interwał czasu bliski zeru:



To prosta *styczna* do okręgu!

Styczna do krzywej w pewnym punkcie A to prosta przechodząca przez dwa punkty należące do krzywej, gdy dążą one do punktu A.

Ogólnie: ***wektor prędkości*** ciała poruszającego się po dowolnej krzywej

jest zawsze ***styczny*** do tej krzywej (toru)!

Jak opisać zmiany prędkości?

Tempo zmian prędkości opisujemy za pomocą ***przyśpieszenia***:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}$$

Przykład

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 10 \text{ m/s} \\ 5 \text{ m/s} \\ 15 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9{,}8 \text{ m/s}^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = ? \quad \textbf{jeśli} \quad \vec{a} = \vec{a}_0 = \overrightarrow{\textbf{const}}.$$

Czyli jak ogólnie wygląda ruch, jeśli wektor przyśpieszenia się nie zmienia?

Prędkość:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{a}_0 \\
\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}\,' &= \int_{t_0}^{t} \vec{a}_0 \, dt' \\
\vec{v} - \vec{v}_0 &= \vec{a}_0 (t - t_0)
\end{aligned}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 (t - t_0)$$

Położenie:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} \\
\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' &= \int_{t_0}^{t} \vec{v} \, dt'
\end{aligned}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 \; = \; \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{a}_0 \int_{t_0}^{t} (t' - t_0)\, dt'$$

Wprowadzam zmienną $T' = t' - t_0$, czyli $dT' = dt'$ oraz granice $T_0 = 0$, $T = t - t_0$:

$$\int_{t_0}^{t} (t' - t_0)\, dt' = \int_0^T T' dT' = \frac{1}{2} T^2 = \frac{1}{2}(t - t_0)^2$$

Czyli

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \; \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{a}_0 \frac{1}{2}(t - t_0)^2$$

Konkretny przykład?

Niech ciało porusza się ze stałym przyśpieszeniem o wartości $9{,}8$ m/s^2 skierowanym pionowo do dołu. W chwili $t_0 = 0$ ciało ma prędkość skierowaną do góry pod kątem 60° do poziomu i wartości 5 m/s.

Opisz zależność prędkości i położenia od czasu.

Rozwiązanie

Przyjmujemy - dla wygody - taki układ kartezjański, że

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ 0 \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} 5 \text{ m/s} \qquad \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9{,}8 \text{ m/s}^2 \end{pmatrix}$$

Prędkość w dowolnej chwili czasu t jest więc równa

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} 5 \text{ m/s} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} 5 \text{ m/s} - t \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \end{pmatrix}$$

a wektor położenia

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{a}_0 \frac{1}{2}(t - t_0)^2 = \begin{pmatrix} t \cdot \frac{1}{2} 5 \text{ m/s} \\ 0 \\ t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} 5 \text{ m/s} - \frac{1}{2} t^2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \end{pmatrix}$$

I co z tego wynika?

Możemy obliczyć wektor prędkości i położenia dla dowolnej chwili czasu.

Można obliczyć, kiedy ciało osiągnie najwyższy pułap z warunku:

$$v_z(t_m) = 0$$

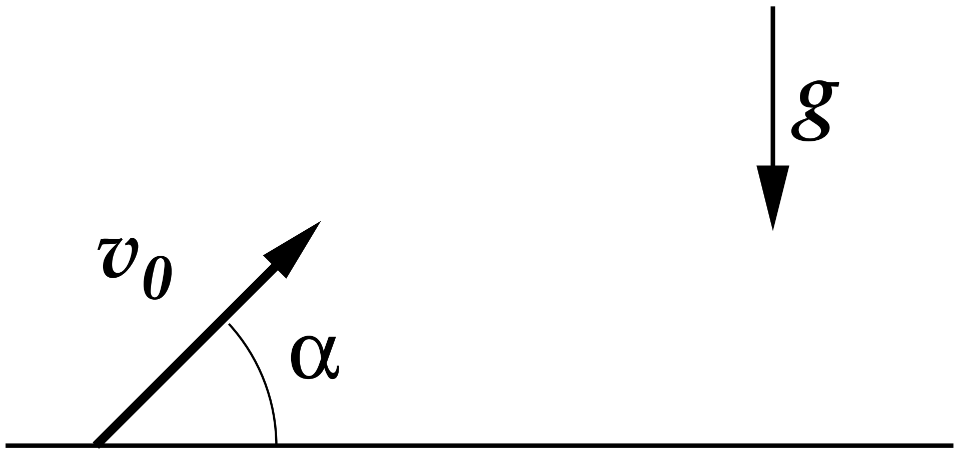
Otrzymujemy $t_m = \frac{\sqrt{3}}{2}5 : 9{,}8$ s $\approx 0{,}44$ s

Na jakiej wysokości będzie wtedy ciało?

Na

$$z(t_m) = \frac{3 \cdot 25}{8} : 9{,}8 \text{ m} \approx 0{,}96 \text{ m}$$

A to samo dla dowolnych, ustalonych v_0, kąta i wartości przyśpieszenia g?



Warunek na osiągnięcie najwyższego pułapu

$$v_z(t_m) = 0$$

prowadzi do (oczywistego) wyniku

$$t_m = v_{0z}/g = v_0 \sin\alpha/g$$

Ciało jest wtedy na wysokości

$$z(t_m) = \frac{1}{2} v_{0z} t_m = \frac{1}{2} (v_0 \sin \alpha)^2 / g$$

Dla odkrywców:

- Wyprowadź wzór na tor ciała $z(x) = ...$
- Oblicz czas t_r, po jakim ciało upadnie - z warunku $z(t_r) = 0$
- Wyprowadź wzór na zasięg ciała x_r,

  obliczając $x_r \equiv x(t_r)$

  lub sprytniej,

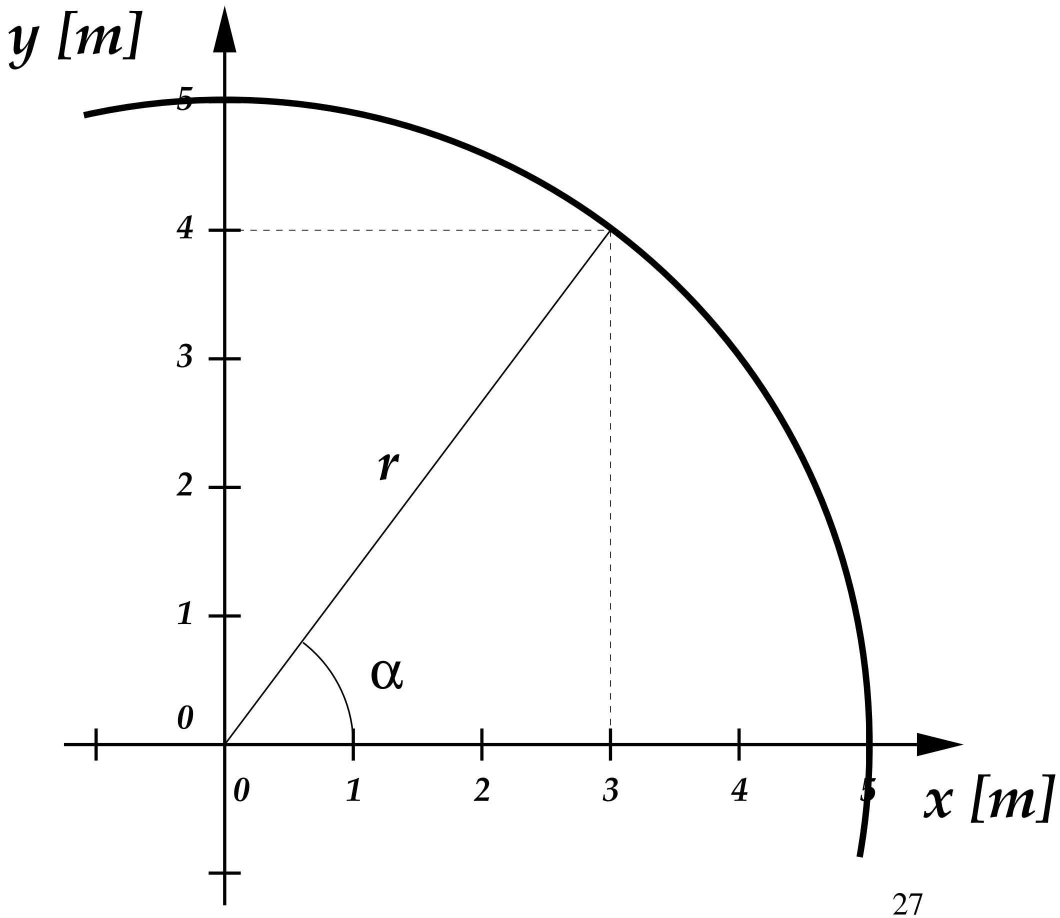
  rozwiązując $z(x_r) = 0$
- Dla jakiego kąta α zasięg jest maksymalny, przy ustalonych v_0 oraz g?

Jak opisać ruch jednostajny po okręgu?

Okrąg ma promień $r = \mathrm{const.}$

Ruch *jednostajny* $\Longleftrightarrow$ *wartość* prędkości stała: $v = \mathrm{const.}$

Parametryczne równanie toru w układzie kartezjańskim

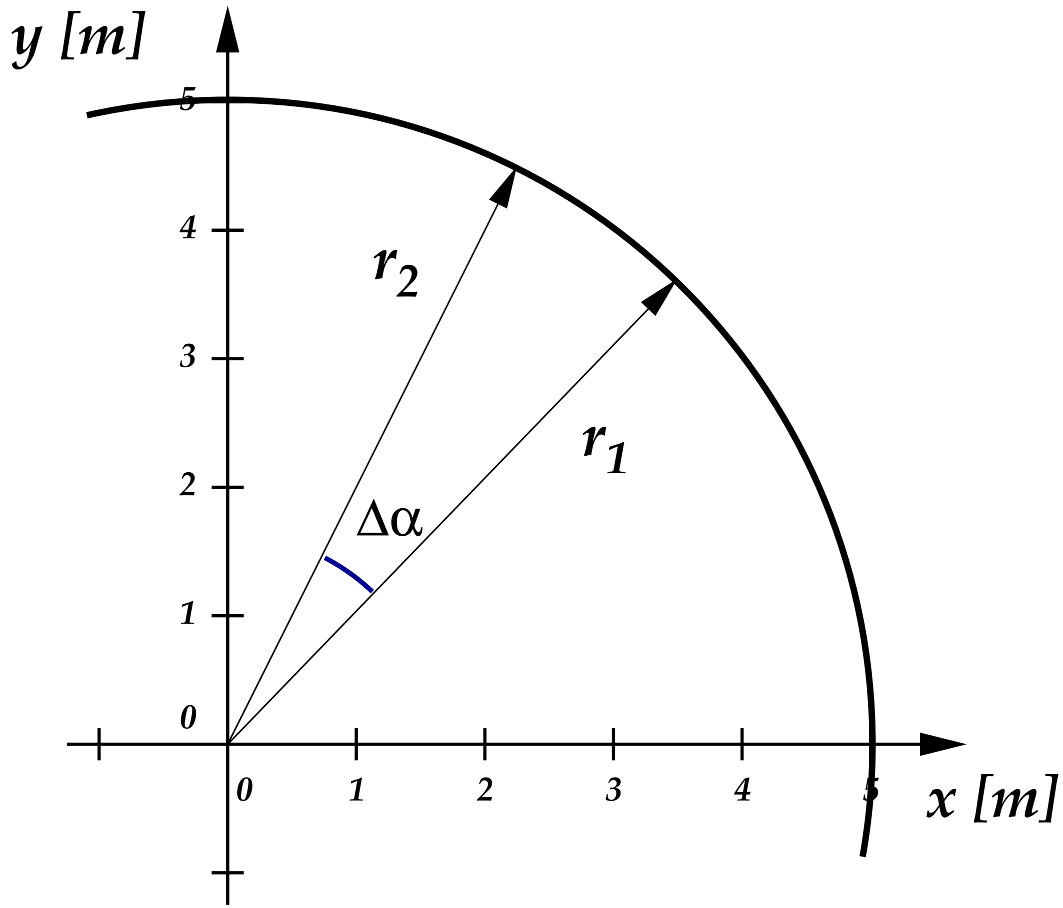


$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\sin\alpha$$

Obliczamy wartość prędkości:

$$v = |\vec{v}| = |\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}| = |\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t}| \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$



Dla bardzo małych fragmentów okręgu

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \approx r\,\Delta\alpha \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$

Otrzymujemy ***wartość prędkości*** liniowej:

$$v \;=\; |\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t}| = \frac{r\,\Delta\alpha}{\Delta t} = r\omega \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$

Wprowadziliśmy ***prędkość kątową***:

$$\omega \equiv \frac{d\alpha}{dt}$$

A więc

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega(t - t_0)$$

Przy $t_0 = 0$ oraz $\alpha_0 = 0$ równanie ruchu:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r\cos(\omega t) \\
y(t) &= r\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Związek

$$v = r\omega$$

możemy również uzyskać, obliczając ***szybkość***:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r\,\Delta\alpha}{\Delta t} = r\omega$$

Przykład

W czasie $T = 2$ s ciało wykonuje pełny obrót po okręgu o $r = 1$ m.

Ciało przebyło więc

$$\Delta S \ = \ 2\pi r = 2\pi \text{ m}$$

$$\Delta\alpha \ = \ 2\pi$$

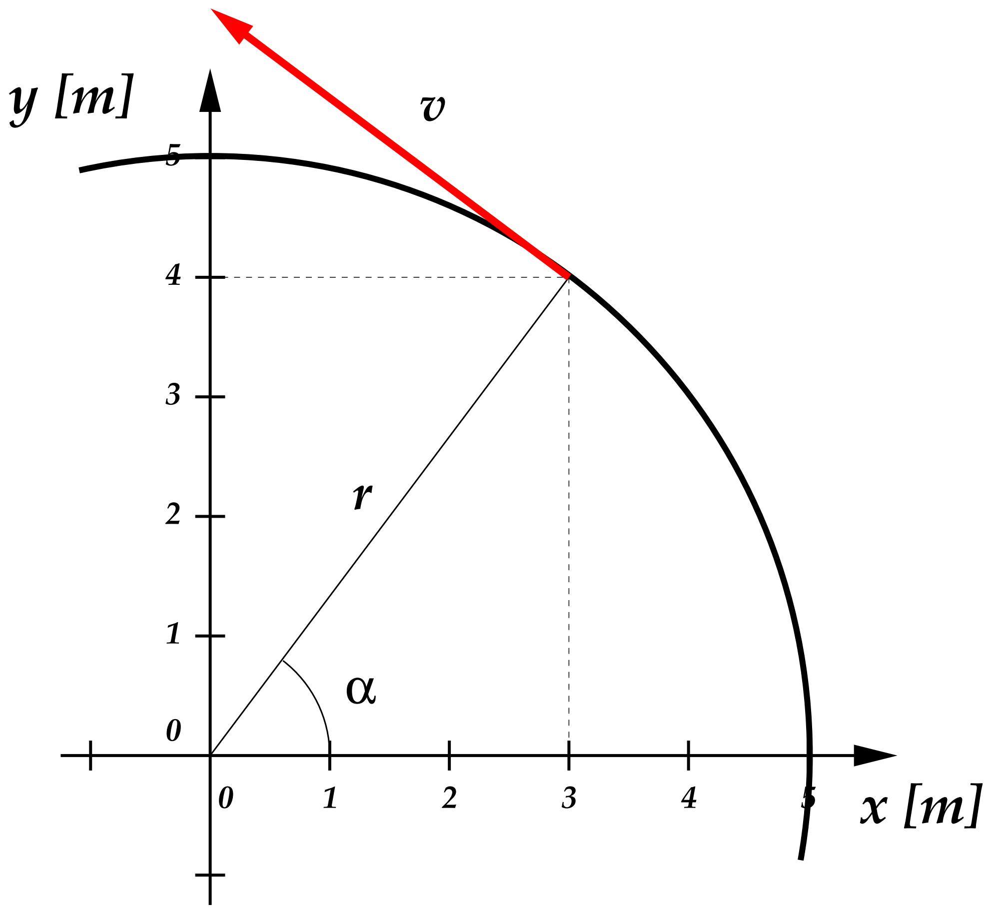
Wartość jego **prędkości liniowej** to

$$v = \frac{2\pi\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{s}} = \pi\ \mathrm{m/s}$$

a **prędkości kątowej** to

$$\omega = \frac{2\pi}{2\ \mathrm{s}} = \pi\ \mathrm{rad/s}$$

Jak opisać prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu?



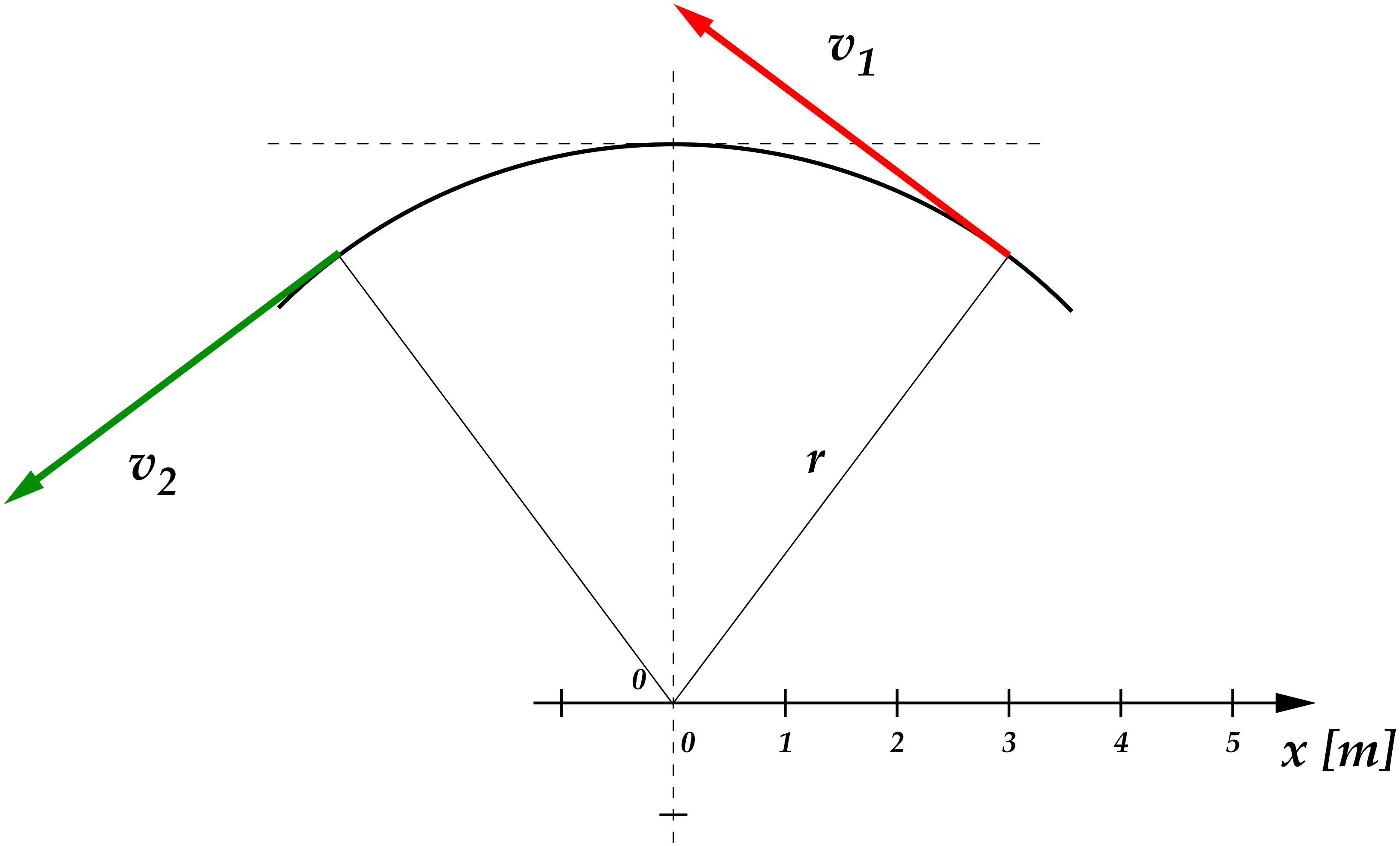
$$v_x(t) = -v\sin\alpha = -v\sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = v\cos\alpha = v\cos(\omega t)$$

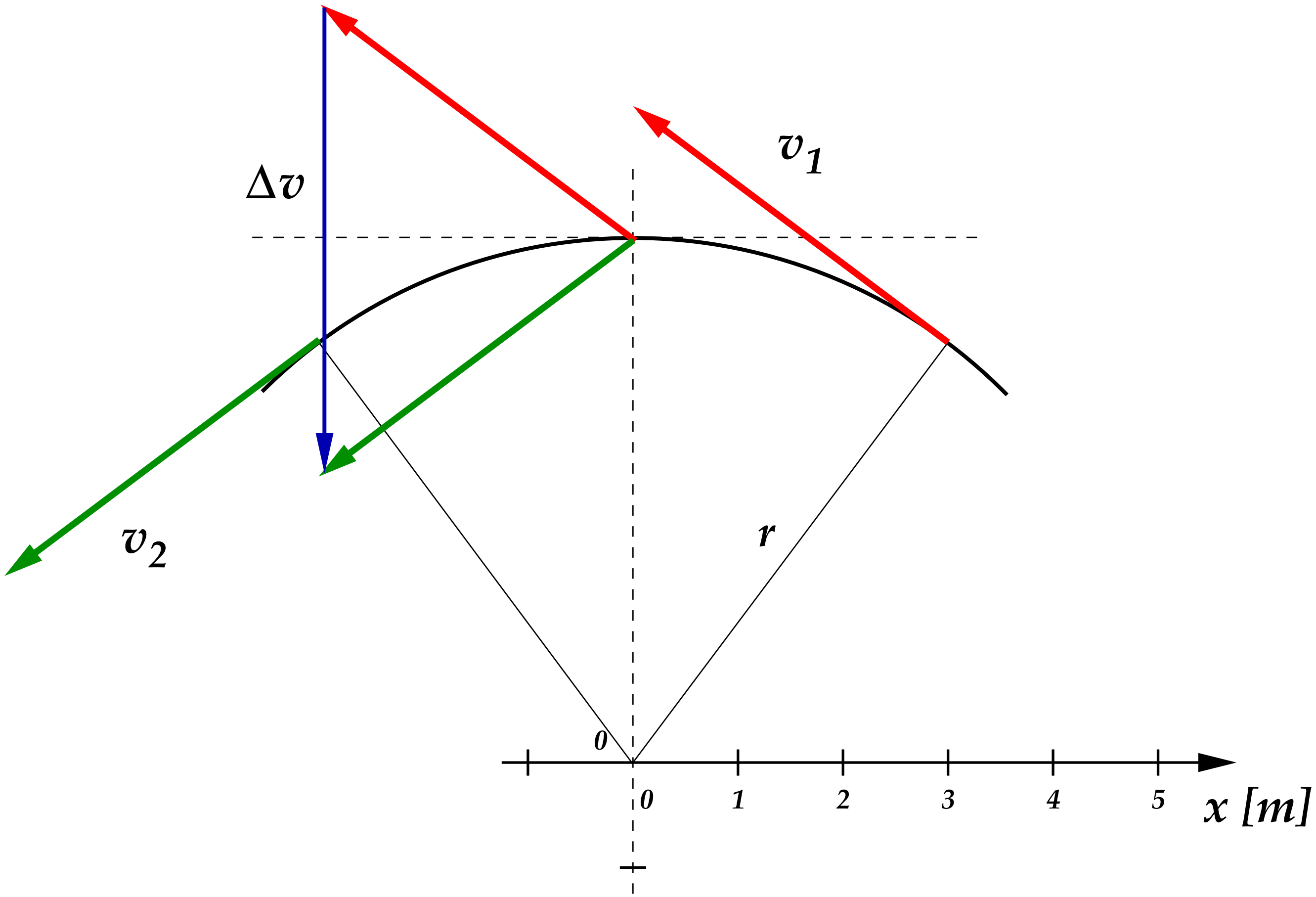
Pamiętamy, że $v = r\omega$

Jak opisać przyśpieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu?

Zmiana wektora prędkości $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ między punktami symetrycznymi względem osi Y:



Przenoszę te wektory na punkt pośrodku (przy zmniejszaniu Δt to dla tego punktu określimy przyśpieszenie) i wyznaczam $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$:



Kierunek $\Delta\vec{v}$ jest taki sam jak kierunek osi Y; *zwrot* jest do środka okręgu.

Możemy określić już ***kierunek*** i ***zwrot*** wektora przyśpieszenia:

$$\vec{a} = a\frac{-\vec{r}}{r}$$

czyli

$$\begin{aligned} a_x(t) &= -a\cos(\omega t) \\ a_y(t) &= -a\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Jest to więc na pewno ***przyśpieszenie dośrodkowe***.

Obliczamy ***wartość przyśpieszenia*** (analogicznie do wartości prędkości):

$$a = |\vec{a}| = |\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}| = |\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}| \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$

Dla bardzo małych fragmentów okręgu

$$|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| \approx v\,\Delta\alpha \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$

Otrzymujemy wartość przyśpieszenia:

$$a = \frac{v\,\Delta\alpha}{\Delta t} = v\omega$$

Inaczej:

$$a = v\omega = r\omega^2 = v^2/r$$

To samo bez rysunków?

Prędkość:

$$\begin{aligned} v_x = \frac{dx}{dt} &= r\frac{d}{dt}\cos\alpha = -r\sin\alpha\frac{d}{dt}\alpha = -r\omega\sin\alpha \\ v_y = \frac{dy}{dt} &= r\frac{d}{dt}\sin\alpha = r\cos\alpha\frac{d}{dt}\alpha = r\omega\cos\alpha \end{aligned}$$

z warunkiem

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega = \text{const.},$$

czyli $\omega = \text{const.}$, a więc

$$\alpha = \omega t$$

przy wygodnie wybranych t_0 oraz α_0.

Przyśpieszenie:

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{dv_x}{dt} \;=\; -r\omega\frac{d}{dt}\sin\alpha = -r\omega\cos\alpha\frac{d}{dt}\alpha = -r\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x \\
a_y &= \frac{dv_y}{dt} \;=\; r\omega\frac{d}{dt}\cos\alpha = -r\omega\sin\alpha\frac{d}{dt}\alpha = -r\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 y
\end{aligned}
$$

W zwięzłej postaci

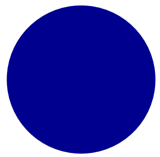
$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

Czy możemy to sprawdzić eksperymentalnie?

Spróbujmy...

Jak porusza się ciało w pustej przestrzeni?

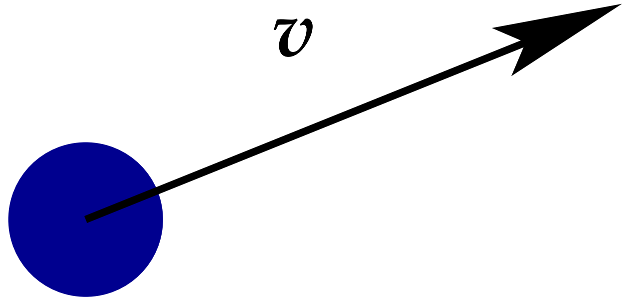
Załóżmy, że początkowo ciało nie porusza się (ale sprawdziliśmy, że w tym „świecie” mogą zachodzić zmiany)



W którą stronę ciało miałoby się poruszyć? Jeśli wskażemy jakiś kierunek, powstanie pytanie, dlaczego nie wybraliśmy innego...

Wniosek - ciało pozostanie **w spoczynku**.

A jeśli ciało w pustej przestrzeni już się porusza?



Jak mogłaby zmienić się prędkość?

- Zmiana wartości v?
- Zmiana kierunku lub zwrotu?

Przestrzeń musiałaby być „bogatsza”: zawierać „przepis” zmiany prędkości i przynajmniej jedną liczbę charakteryzującą tempo zmian.

Wniosek: jeśli w przestrzeni euklidesowej mogą następować zmiany i nie wyróżnimy punktów i kierunków oraz nie dodamy żadnego mechanizmu, własności, liczb itd., to **prędkość ciała pozostanie niezmieniona**.

A jeśli dodamy „przepis” zmiany prędkości?

Wtedy oczywiście **przyśpieszenie** ciała będzie różne od zera.

Ruch ciała nie będzie jednostajnie prostoliniowy.

Powiemy krótko (i na razie tajemniczo), że na ciało działa **siła**.

Na razie *siła* jest skrótem określenia *przepis zmiany prędkości*.

Jak to podsumować?

W postaci zasady-postulatu:

I zasada dynamiki Newtona

Istnieje układ odniesienia, w którym ciało spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, gdy nie działają na to ciało żadne siły lub znoszą się.

Taki układ nazywamy ***układem inercjalnym***.