

# PODSTAWY FIZYKI - WYKŁAD 5

## ELEKTROSTATYKA: POLE DIPOLA ELEKTRYCZNEGO ENERGIA POTENCJALNA UKŁADU DWÓCH DIPOLI DIPOL INDUKOWANY

Piotr Niezurawski

*pniez@fuw.edu.pl*

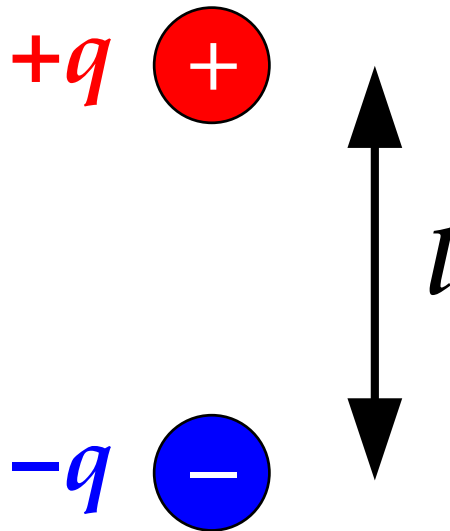
Wydział Fizyki

Uniwersytet Warszawski

<http://www.fuw.edu.pl/~pniez/bioinformatyka/>

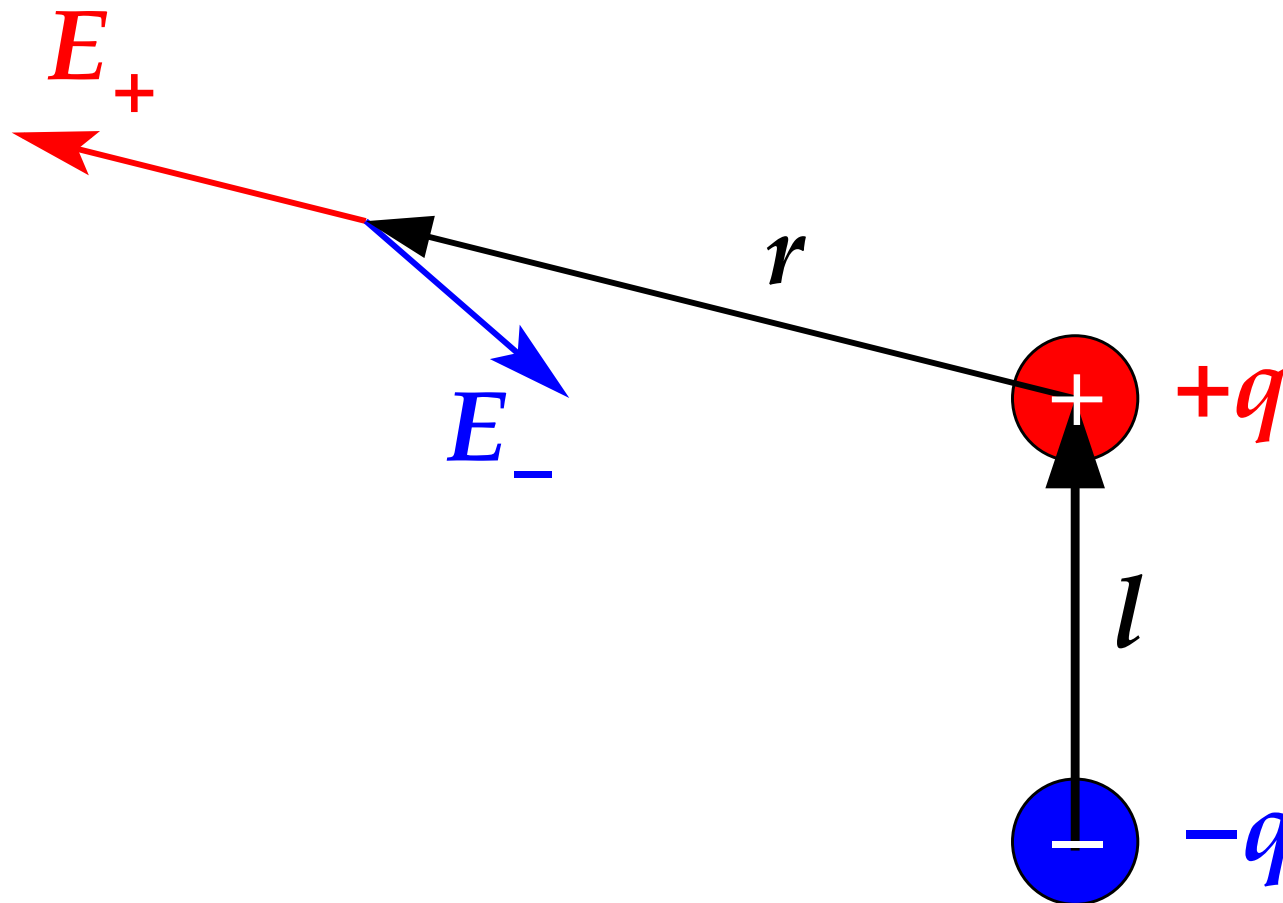
## Co to jest *dipol elektryczny*?

Dipolem elektrycznym nazywamy układ dwóch ładunków  $+q$  oraz  $-q$  umieszczonych w pewnej odległości  $l$  od siebie.



## Jakie pole elektryczne wytwarza dipol elektryczny?

Ustalmy dla wygody, że początek układu współrzędnych jest w ładunku  $+q$ . Niech  $\vec{l}$  będzie wektorem od  $-q$  do  $+q$ .

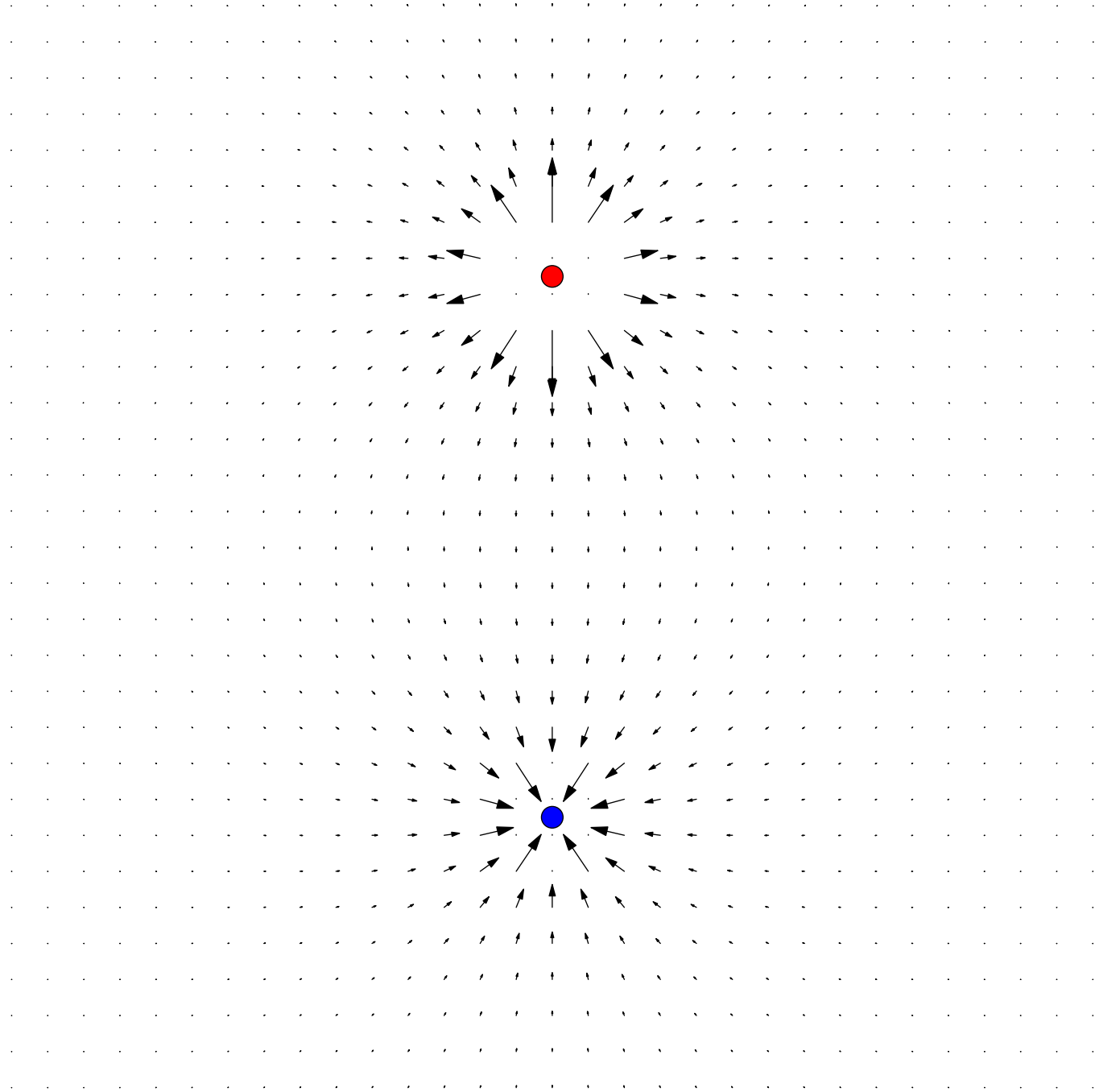


Obliczmy wektor *nateżenia pola elektrycznego*  $\vec{E}$  w punkcie wskazywanym przez wektor  $\vec{r}$

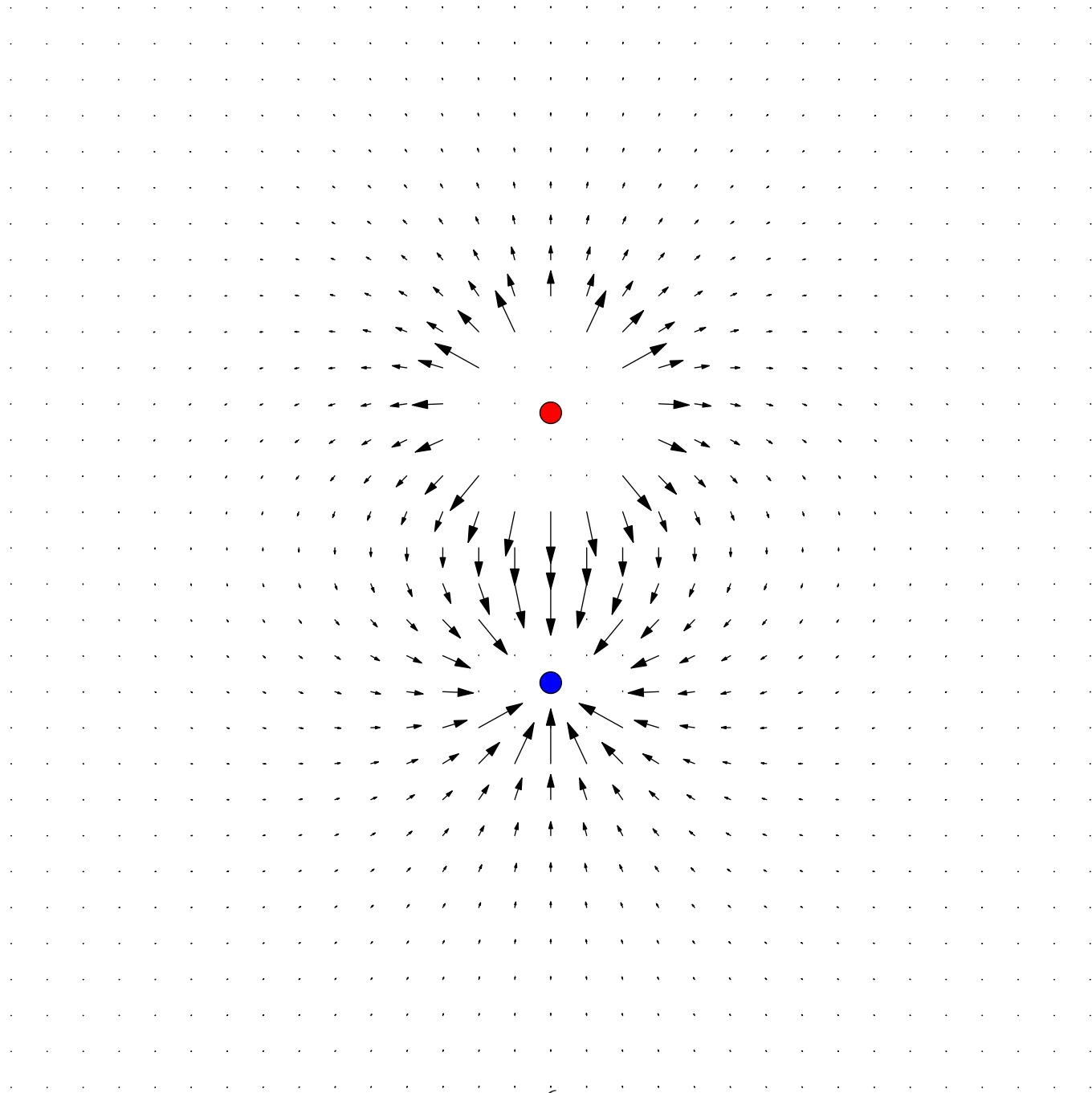
Wynik:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- = +kq\frac{\vec{r}}{r^3} - kq\frac{\vec{r} + \vec{l}}{|\vec{r} + \vec{l}|^3} \\ &= kq\left(\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} + \vec{l}}{|\vec{r} + \vec{l}|^3}\right)\end{aligned}$$

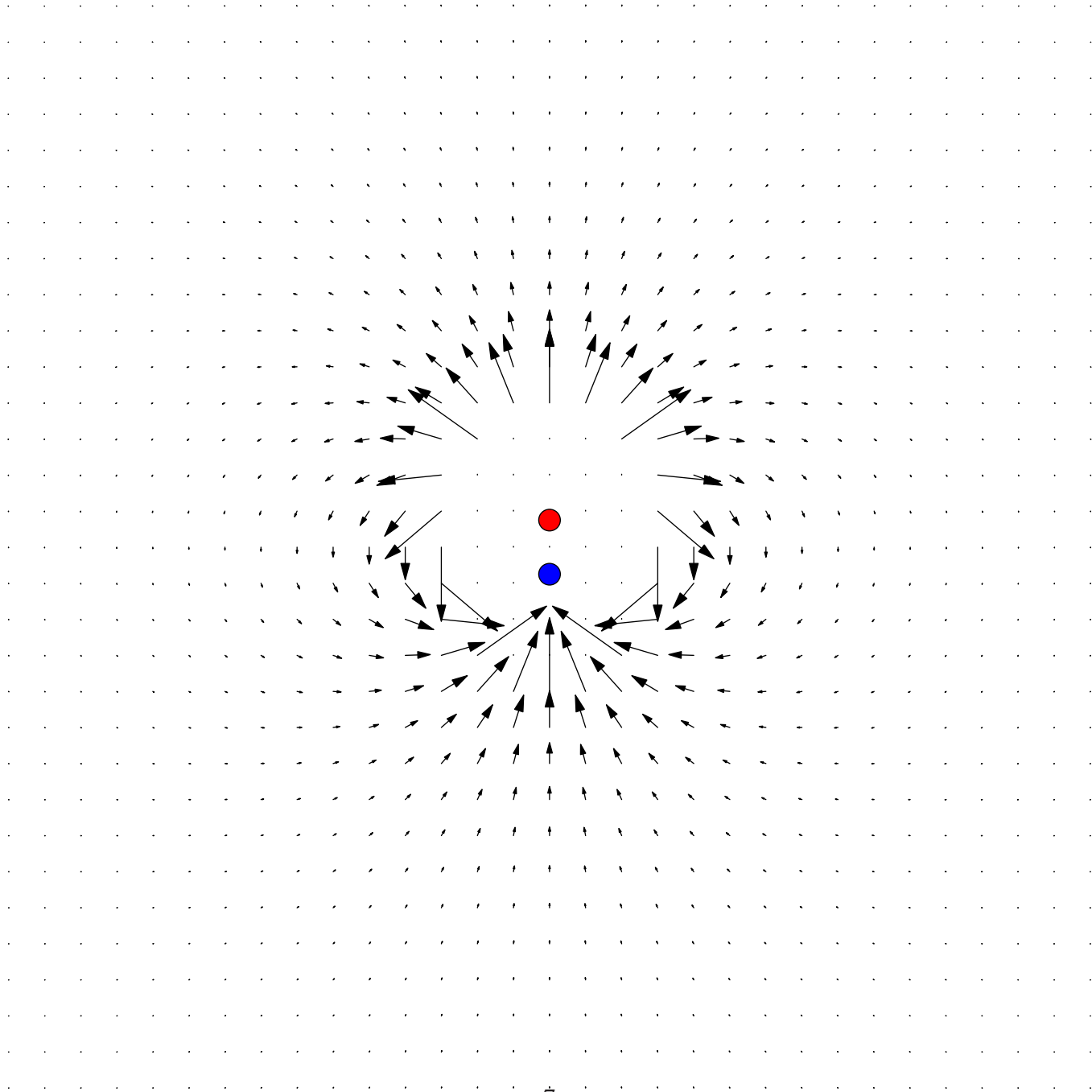
$$l = 1, 0 l_0$$



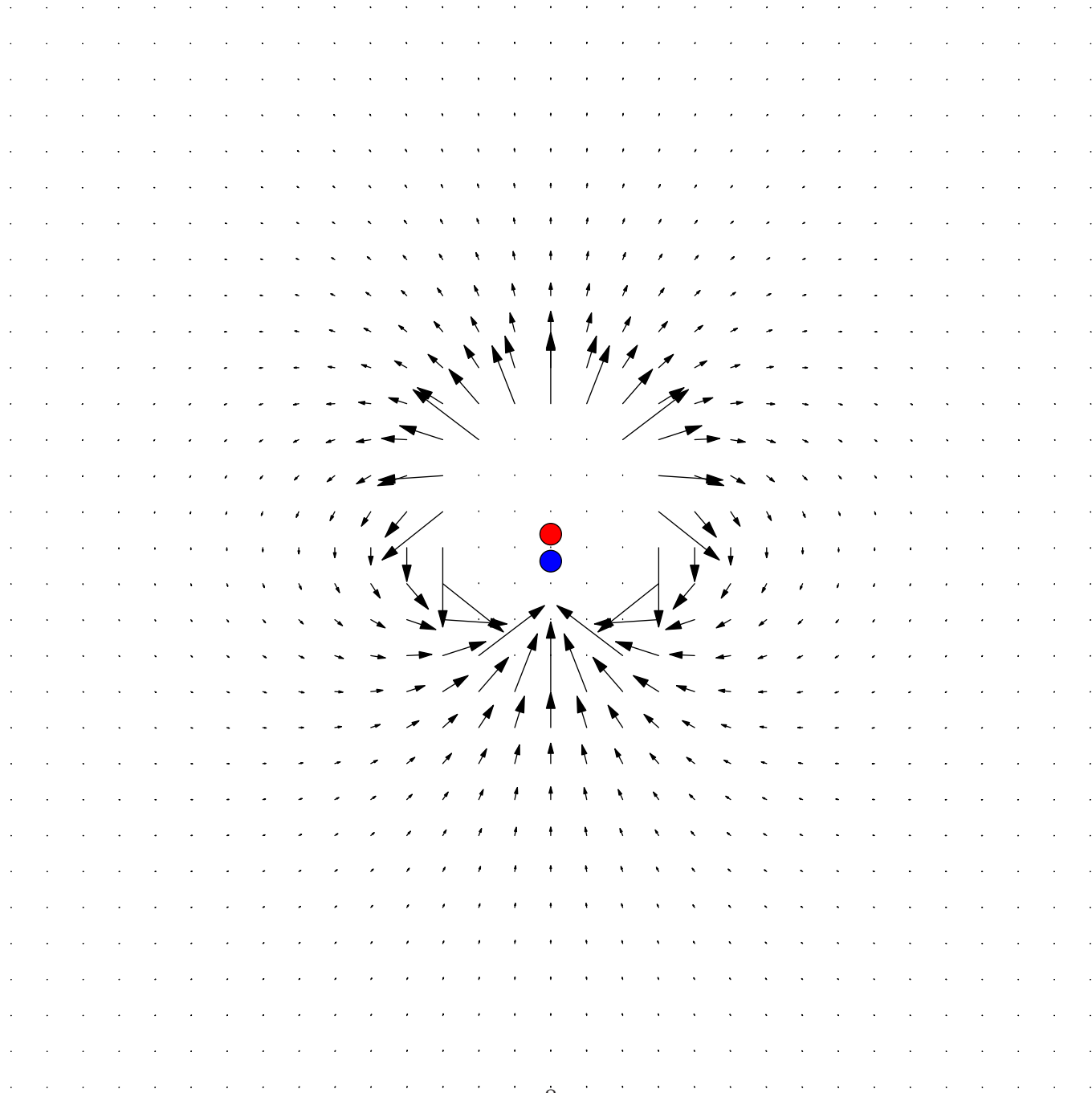
$$l = 0,5 l_0$$



$$l = 0, 1 l_0$$

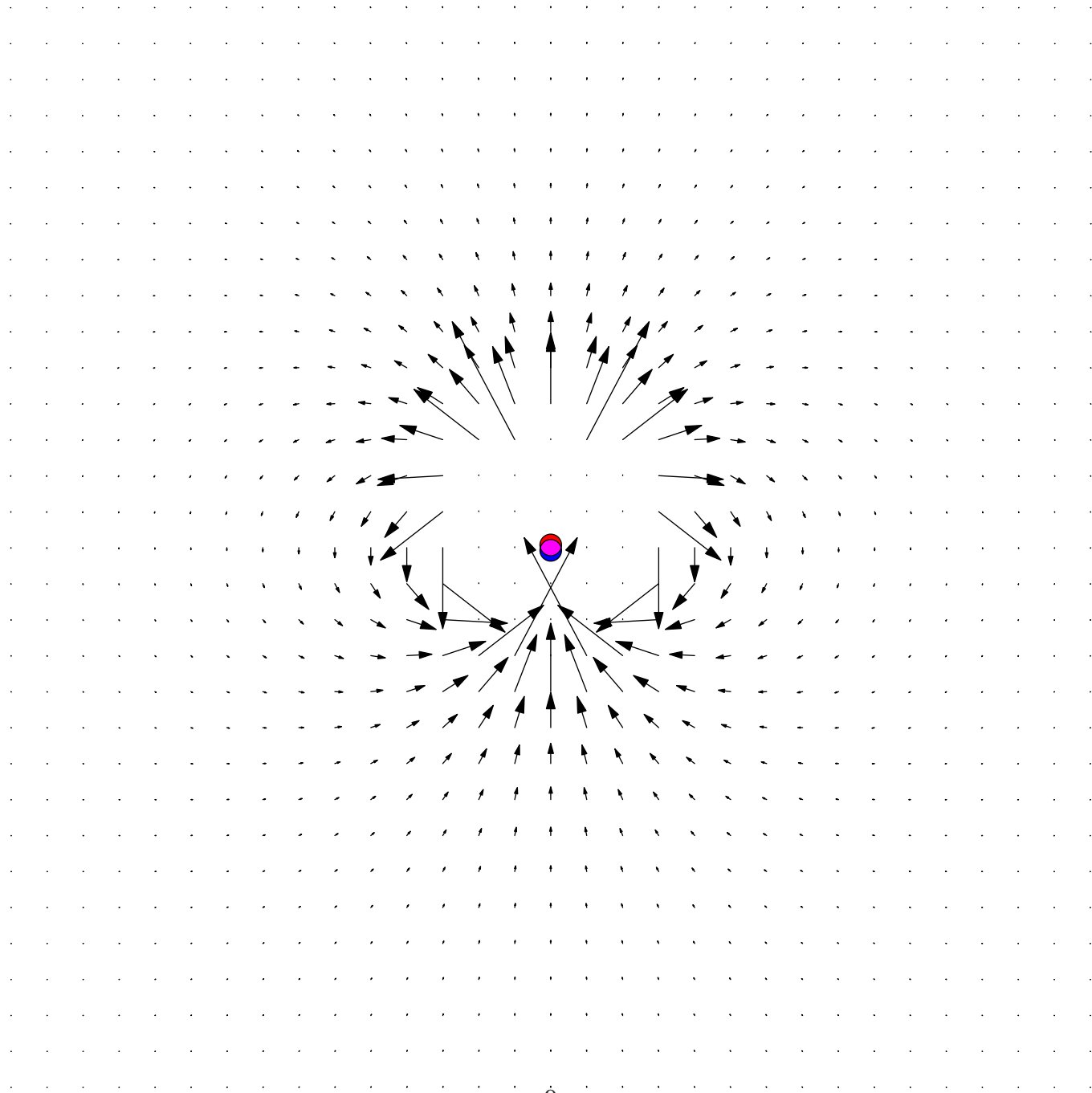


$$l = 0,05 l_0$$

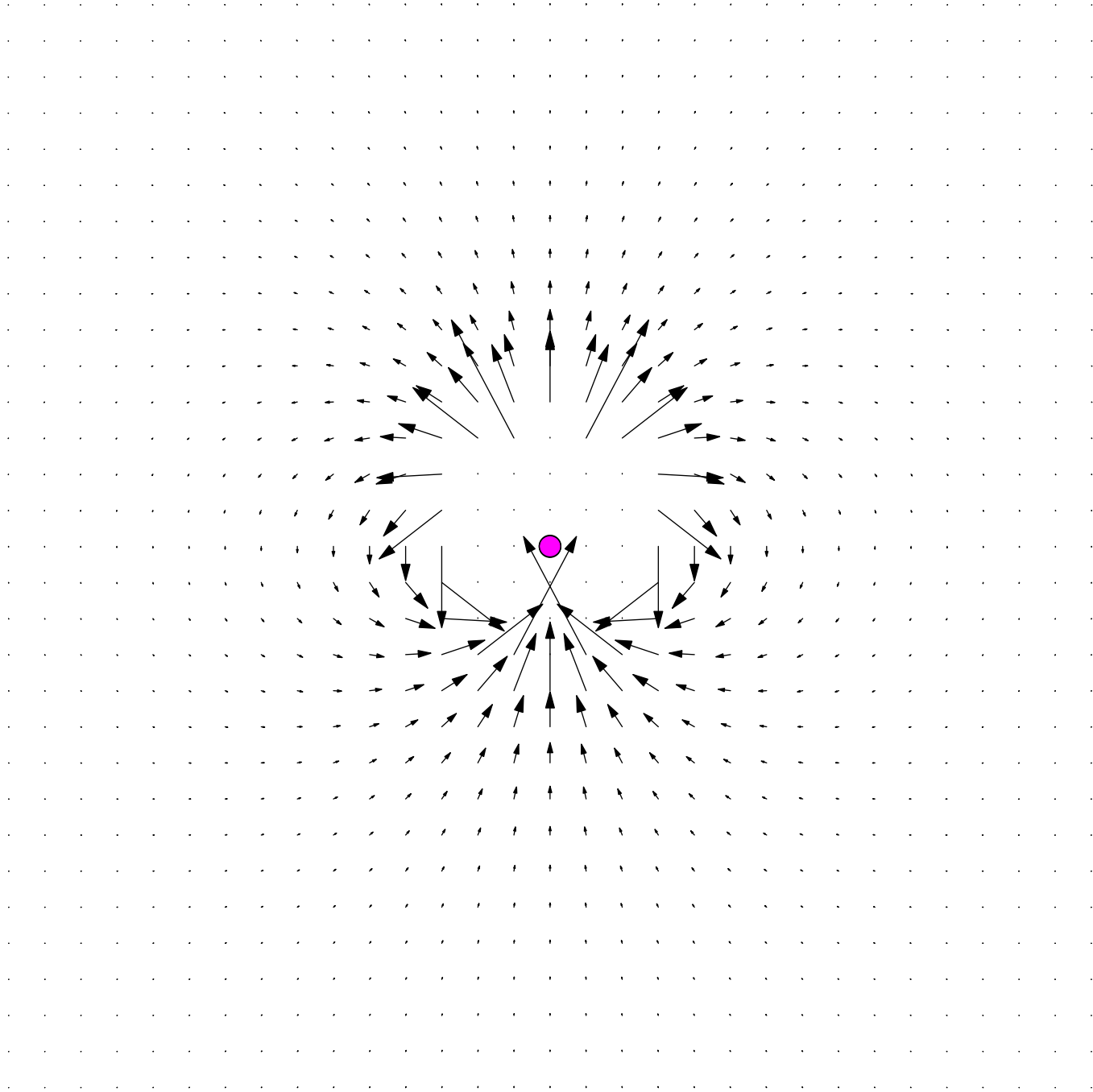




$$l = 0,01 l_0$$



$$l = 0,001 l_0$$



## Przykład - Natężenie od dipola

Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego na prostej przechodzącej przez ładunki  $+e$  oraz  $-e$ , w odległości  $r = 1$  nm od ładunku  $+e$  i odległości  $r + l$  od ładunku  $-e$ , jeśli  $l = 10^{-10}$  m.

$$\begin{aligned} |\vec{E}| &= ke \left| \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} + \vec{l}}{|\vec{r} + \vec{l}|^3} \right| \\ &= ke \left| \frac{r}{r^3} - \frac{r + l}{(r + l)^3} \right| \\ &= ke \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r + l)^2} \right) \\ &\approx 2,5 \cdot 10^8 \text{ N/C} \end{aligned}$$

## Trik i co z niego wynika

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2} &= \frac{(r+l)^2 - r^2}{r^2(r+l)^2} \\ &= \frac{2rl + l^2}{r^2(r+l)^2}\end{aligned}$$

Jeśli  $l \ll r$ , to

$$\frac{2rl + l^2}{r^2(r+l)^2} \approx \frac{2rl}{r^4} = \frac{2l}{r^3}$$

## To samo dla dowolnego $\vec{r}$ ?

$$\vec{E} = kq \left( \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} + \vec{l}}{|\vec{r} + \vec{l}|^3} \right)$$

Postarajmy się przybliżyć ten dipol *dipolem punktowym*. Oznacza to przejście graniczne

$l \rightarrow 0$  przy ustalonym iloczynie  $ql$

$$q \left( \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} + \vec{l}}{|\vec{r} + \vec{l}|^3} \right) = q \frac{\vec{r} |\vec{r} + \vec{l}|^3 - (\vec{r} + \vec{l}) r^3}{r^3 |\vec{r} + \vec{l}|^3}$$

Korzystamy z przybliżenia

$$(1 + a)^n \approx 1 + na \quad \text{dla } |a| \ll 1$$

Po rozwinięciu wyrazów  $|\vec{r} + \vec{l}|^3 = (r^2 + 2\vec{r} \cdot \vec{l} + l^2)^{3/2}$  i przejściu granicznym otrzymujemy wynik

$$\vec{E}_{dp} = k(3\vec{p} \cdot \vec{r} \frac{\vec{r}}{r^2} - \vec{p})/r^3 ,$$

gdzie

$$\vec{p} \equiv q\vec{l}$$

Wektor  $\vec{p}$  jest zwany **momentem dipolowym** pary ładunków  $+q$  oraz  $-q$ .

Sprawdzenie wyniku:

na osi dipola  $\vec{E} = 2k\vec{p}/r^3$

na symetralnej dipola  $\vec{E} = -k\vec{p}/r^3$

## Moment dipolowy układu

Dla dowolnego układu ładunków definiowany jest moment dipolowy

$$\vec{p} \equiv \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i$$

Dla pary ładunków  $+q$  oraz  $-q$  otrzymujemy znany wynik

$$\vec{p} \equiv +q\vec{r}_+ + (-q)\vec{r}_- = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q\vec{l}$$



## Po co nam znajomość $p$ ?

Stałe momenty dipolowe molekuł

Molekuła	$p/(10^{-30} \text{ Cm})$
H <sub>2</sub>	0
HF	6,1
CO <sub>2</sub>	0
H <sub>2</sub> O	6,2
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	0

## Potencjał dipola

$$\begin{aligned}\varphi_d &= \varphi_+ + \varphi_- \\ &= +kq\frac{1}{r} - kq\frac{1}{|\vec{r} + \vec{l}|} \\ &= kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{l}|}\right)\end{aligned}$$

Przejście graniczne do dipola punktowego

$l \rightarrow 0$  przy ustalonym iloczynie  $ql$

$$\varphi_{dp} = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

czyli

na osi dipola (współrzędna  $z$ )  $\varphi_{dp} = k \frac{pz}{|z|^3} \sim \frac{1}{z^2} = \frac{1}{r^2}$

na symetralnej dipola  $\varphi_{dp} = 0$

## Energia potencjalna dwóch dipoli punktowych

$$\begin{aligned} E_p &= +Q\varphi_{dp}(\vec{r} + \vec{l}) + (-Q)\varphi_{dp}(\vec{r}) \\ &= kQ\left(\frac{\vec{p}_1 \cdot (\vec{r} + \vec{l})}{|\vec{r} + \vec{l}|^3} - \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r^3}\right) \end{aligned}$$

po przejściu granicznym

$$E_p = k(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r}\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{r}}{r})/r^3$$

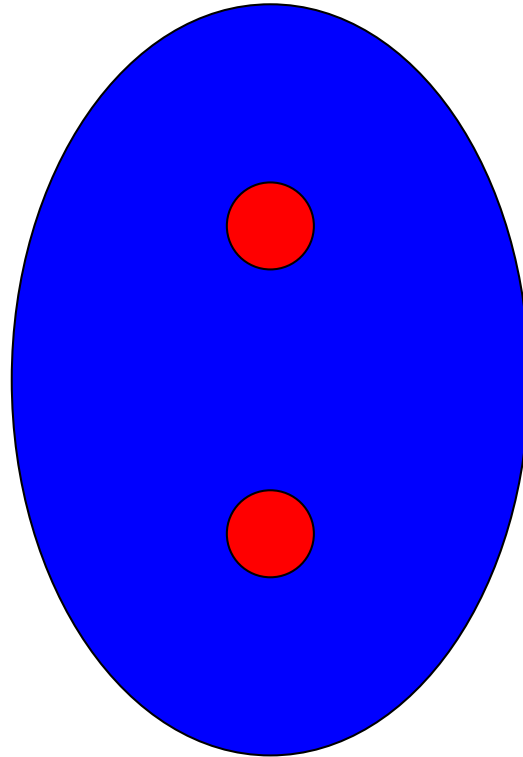
## Ile energii, aby obrócić HF?

Jaką minimalną porcję energii należy dostarczyć molekułce HF, aby ustawić jej moment dipolowy o wartości  $p = 6,1 \cdot 10^{-30}$  Cm zgodnie z momentem drugiej cząsteczki HF, która znajduje się w odległości  $r = 5 \cdot 10^{-10}$  m? Początkowo momenty dipolowe są ustawione równolegle, ale mają przeciwne zwroty. Momenty dipolowe są prostopadłe do wektora względnego położenia molekuł  $\vec{r}$ .

$$\begin{aligned}W_{nasza} &= E_{p \Rightarrow} - E_{p \Leftarrow} \\&= k(pp - (-pp))/r^3 \\&= 2kp^2/r^3 \\&\approx 33 \text{ meV}\end{aligned}$$

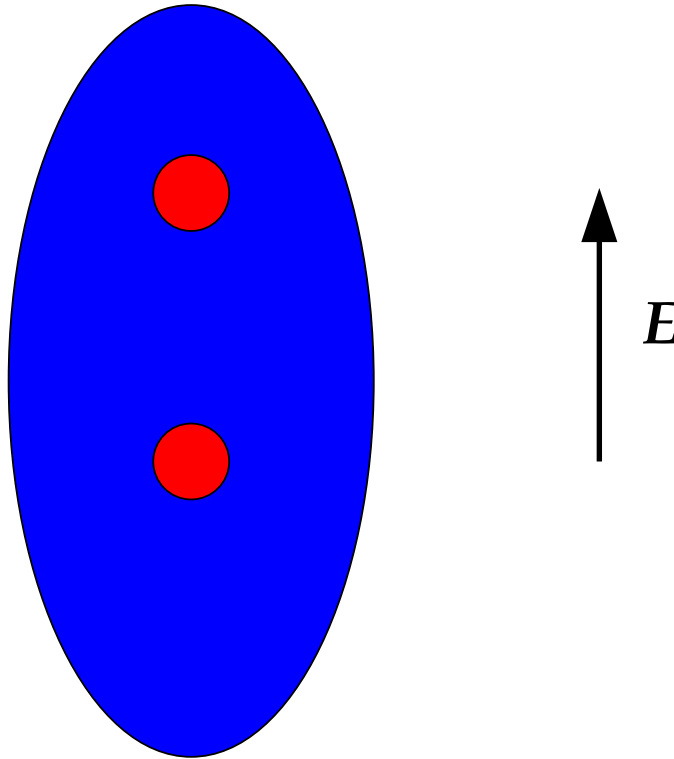
## A jeśli cząsteczka jest *niepolarna*?

Np. dla  $\text{H}_2$   $p = 0$ .



$$E=0$$

## Dipol indukowany



Jak jest skierowany wyindukowany  $\vec{p}$ ?

Jest to przykład tzw. *polaryzacji elektronowej*.

## Jak to opisać?

Wprowadzamy *polaryzowalność*  $\alpha$

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$$

Przykłady

dla  $\text{H}_2$   $\alpha \approx 10 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$

dla atomu sodu w stanie podstawowym  $\alpha \approx 24 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$ .



## Jaki moment dipolowy indukuje się w H<sub>2</sub> w polu HF?

Oszacuj indukowany moment dipolowy cząsteczki H<sub>2</sub>, która znajduje się na osi molekuly HF, w odległości  $r = 10$  nm.

$$\begin{aligned} p_{H_2} &= \varepsilon_0 \alpha_{H_2} E_{HF} \\ &= \varepsilon_0 \alpha_{H_2} 2 k p_{HF} / r^3 \\ &= \varepsilon_0 \alpha_{H_2} 2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p_{HF} / r^3 \\ &= \alpha_{H_2} \frac{1}{2\pi} p_{HF} / r^3 \\ &\approx 10^{-35} \text{ Cm} \end{aligned}$$

## Oddziaływanie ładunków i dipoli - podsumowanie

Układy i rodzaj zależności ich energii potencjalnej  $E_p$  oraz siły między obiektami  $F$

Układ	$E_p$	$F$
ładunek $Q$ + ładunek $q$	$\sim \frac{qQ}{r}$	$\sim \frac{qQ}{r^2}$
dipol trwały $p$ + ładunek $q$	$\sim \frac{pq}{r^2}$	$\sim \frac{pq}{r^3}$
dipol <b>indukowany</b> $p$ + ładunek $q$	$\sim \frac{pq}{r^2} \sim \frac{\alpha qq}{r^4}$	$\sim \frac{\alpha qq}{r^5}$
dipol trwały $p_1$ + dipol trwały $p_2$	$\sim \frac{p_1 p_2}{r^3}$	$\sim \frac{p_1 p_2}{r^4}$
dipol trwały $p_1$ + dipol <b>indukowany</b> $p_2$	$\sim \frac{p_1 p_2}{r^3} \sim \frac{p_1 \alpha p_1}{r^6}$	$\sim \frac{p_1 \alpha p_1}{r^7}$