PODSTAWY FIZYKI - WYKŁAD 6

ELEKTROSTATYKA:
DIELEKTRYKI
POLARYZACJA
POLA ELEKTROSTATYCZNE W DIELEKTRYKACH

Piotr Nieżurawski

pniez@fuw.edu.pl

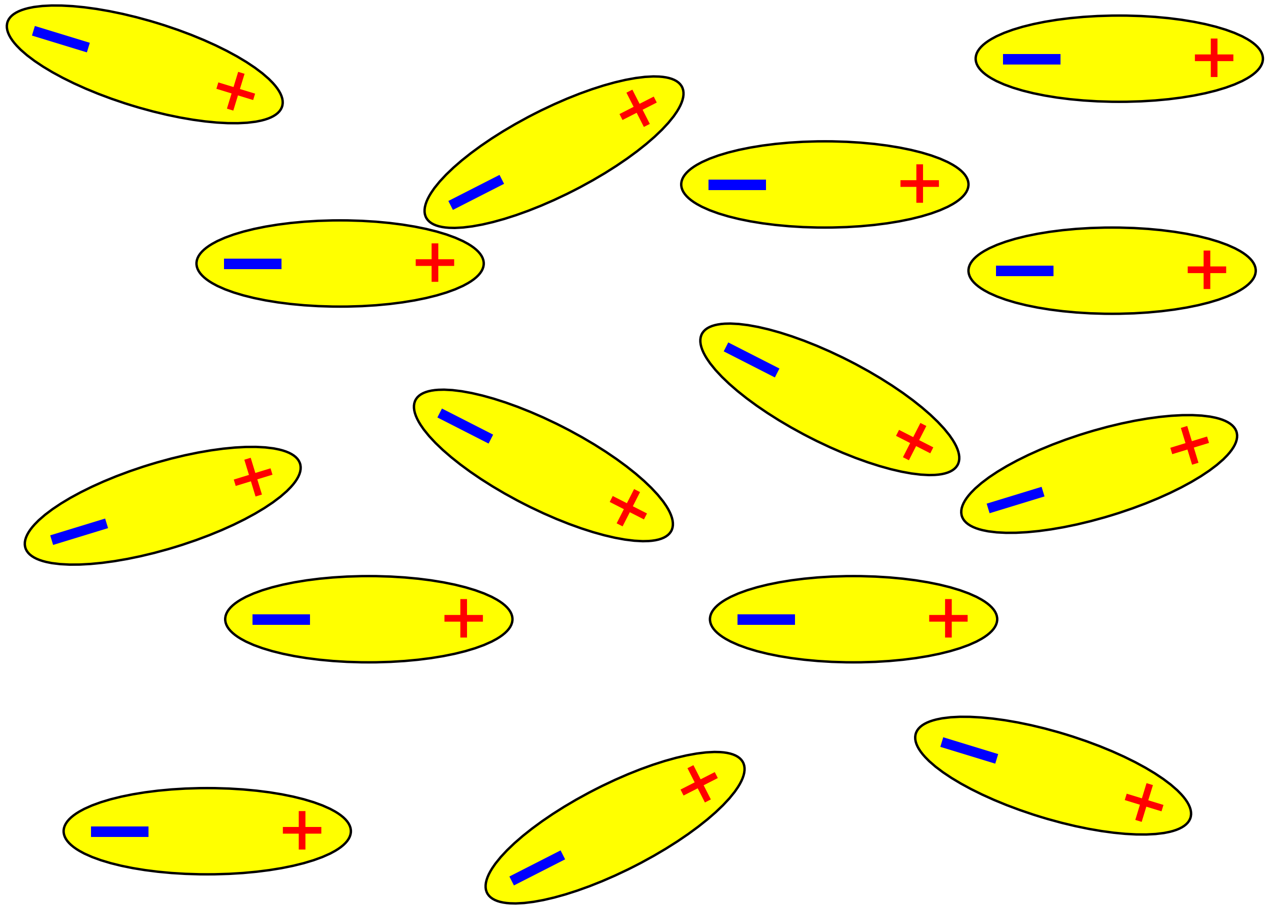
Wydział Fizyki

Uniwersytet Warszawski

http://www.fuw.edu.pl/~pniez/bioinformatyka/

Co to jest *dielektryk*?

Dielektrykiem nazywa się substancję, którą można opisać jako zbiór dipoli mogących zmieniać orientację, ale nie przesuwających się. Dielektryk jest więc izolatorem - można pominąć ruch postępowy ładunków w dielektryku.



Jak opisać 10^{23} dipoli?

Zamiast zajmować się pojedynczymi dipolami $\vec{p}_i$ wprowadzamy gęstość momentu dipolowego, tzw. ***polaryzację*** $\vec{P}$

$$\vec{P} \equiv \frac{1}{V} \sum_{i \in V} \vec{p}_i = n_d \, \vec{p} \ ,$$

gdzie n_d jest liczbą dipoli w jednostce objętości (np. 10^{23} dm^{-3}).

Pamiętamy, że

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \, \alpha \, \vec{E}$$

A więc

$$\vec{P} = n_d \, \vec{p} = \varepsilon_0 \, n_d \, \alpha \, \vec{E}$$

Wprowadzamy ***podatność elektryczną*** χ

$$\chi \equiv n_d \, \alpha$$

Wobec tego polaryzacja

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \, \chi \, \vec{E}$$

Po co ta *polaryzacja*?

Wartość polaryzacji w prostopadłościanie o objętości V i wysokości l

$$
\begin{aligned}
P &= n_d\, p \\
&= \frac{N_d}{V}\, lq \\
&= \frac{N_d}{S}\, q \\
&= \frac{Q_z}{S} \\
&= \sigma_z
\end{aligned}
$$

Objaśnienia:

N_d - liczba dipoli w objętości V

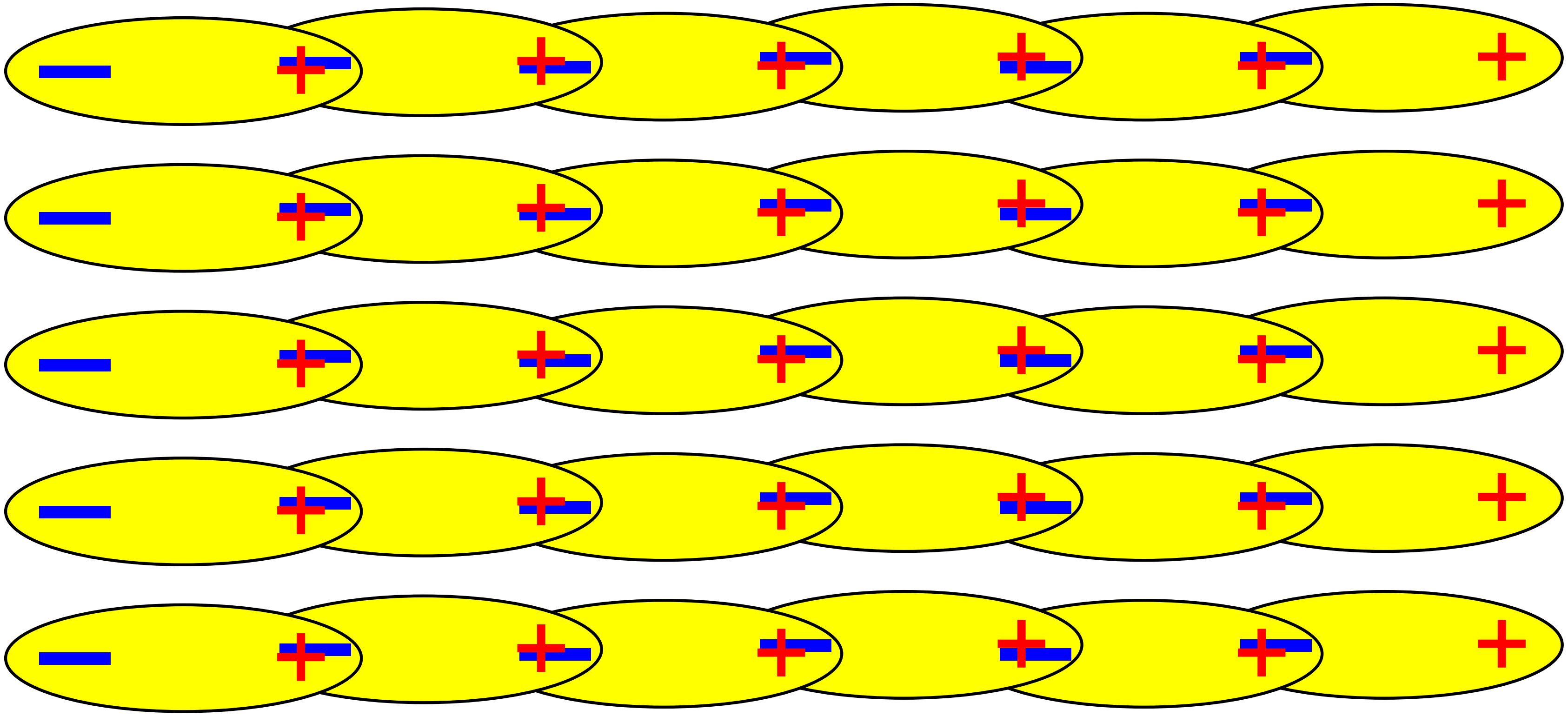
S - powierzchnia podstawy prostopadłościanu (prostopadła do $\vec{l}$)

Q_z - **z**wiązany ładunek dodatni w objętości V (oprócz niego jest oczywiście $-Q_z$)

σ_z - gęstość powierzchniowa **z**wiązanego ładunku dodatniego (czyli przy jednej z podstaw prostopadłościanu)

Po prawej stronie mamy gęstość powierzchniową ładunku związanego $\sigma_z = P$.

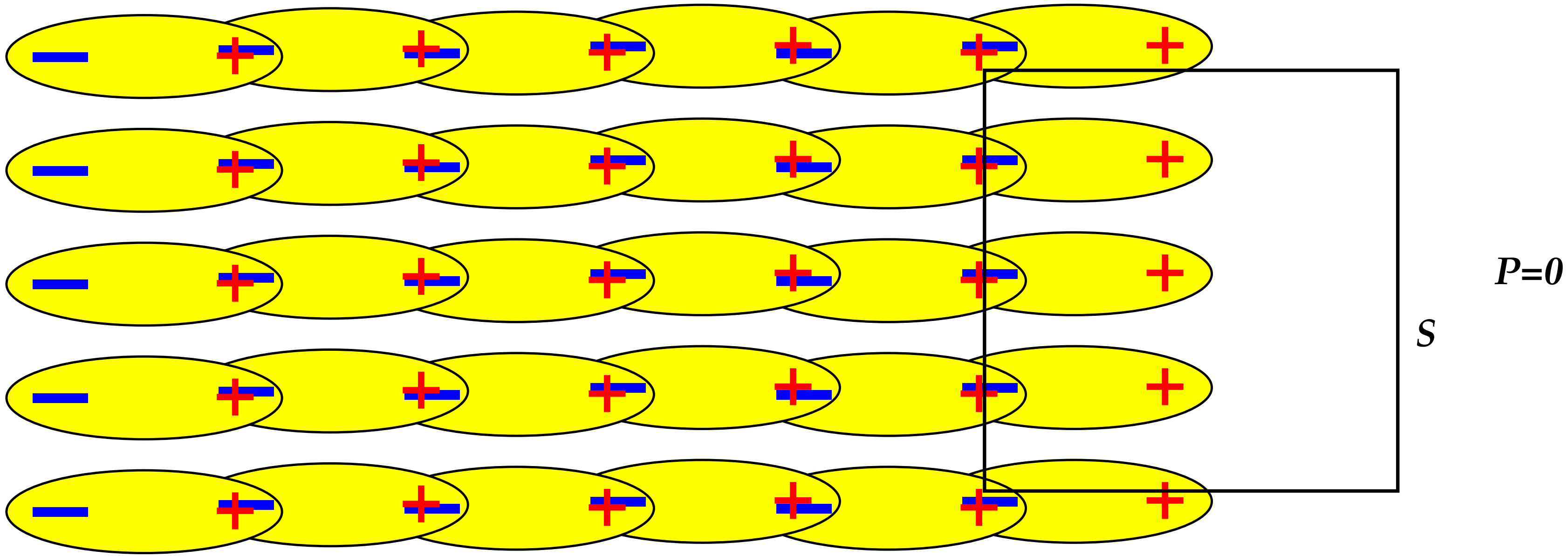
Po lewej stronie mamy gęstość powierzchniową ładunku związanego $-\sigma_z = -P$.



Prawo Gaussa dla ładunku związanego

$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -Q_z$$

$$-P\,S + 0\,S = -Q_z$$



A jeśli chcemy posługiwać się tylko ładunkami swobodnymi?

Pamiętamy, że pole $\vec{E}$ związane jest w ***wypadkowym ładunkiem***

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q$$

Wypadkowy ładunek jest sumą ładunków ***swobodnych*** oraz ***związanych***

$$Q = Q_s + Q_z$$

Spróbujmy uzyskać prawo Gaussa dla ładunku swobodnego

$$\begin{aligned} Q - Q_z &= Q_s \\ \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint \vec{P} \cdot d\vec{S} &= Q_s \\ \oint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} &= Q_s \end{aligned}$$

Wektor indukcji elektrycznej $\vec{D}$

Warto więc wprowadzić nowy wektor tzw. ***indukcję elektryczną***

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Pamiętamy, że

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \, \chi \, \vec{E}$$

A więc

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \, \chi \, \vec{E} \\ &= \varepsilon_0 \, (1 + \chi) \, \vec{E} \\ &= \varepsilon_0 \, \varepsilon \, \vec{E} \end{aligned}$$

$\varepsilon \equiv 1 + \chi$ to ***względna przenikalność elektryczna*** ośrodka.

Prawo Gaussa dla ładunku swobodnego

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_s$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \, \varepsilon \, \vec{E}$$

Dielektryki - podsumowanie

$$Q_s + Q_z = Q$$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_s$$

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -Q_z$$

Przykład - *Ładunek w dielektrycznej kuli*

Punktowy ładunek dodatni o wartości e znajduje się w geometrycznym środku szklanej kuli o promieniu $R = 1$ μm i względnej przenikalności elektrycznej $\varepsilon_{sz} = 4$. Wyznacz

a) pole $\vec{D}$ w całej przestrzeni,

b) pole $\vec{E}$ w całej przestrzeni,

c) pole $\vec{P}$ w całej przestrzeni,

d) ładunek wyindukowany na powierzchni kuli.

Uzyskaj wyniki liczbowe dla wartości pól w odległości $2R$ od środka kuli.

Układ ma symetrię sferyczną, a więc pola i ładunek muszą mieć taką symetrię. Pola są więc *radialne* względem środka kuli $\mathcal{O}$ (czyli mają kierunek taki jak wektor położenia zaczepiony w środku kuli).

a) Obliczmy strumień pola $\vec{D}$ przez dowolną sferę $(\mathcal{O},\, r)$:

$$\begin{aligned} \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q_s \\ 4\pi r^2 D &= e \\ D &= \frac{e}{4\pi r^2} \end{aligned}$$

Pole $\vec{D}$ jest radialne, skierowane „od ładunku” e.

b) Pole $\vec{E}$ znajdujemy, korzystając z równości $\vec{D} = \varepsilon_0 \, \varepsilon \, \vec{E}$:

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \, \varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 \, \varepsilon_{sz} r^2} = \dfrac{e}{16\pi\varepsilon_0 \, r^2} & \text{dla } r < R \\[2ex] \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 \, \varepsilon_{pr} r^2} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} & \text{dla } r > R \end{cases}$$

c) Pole $\vec{P}$ znajdujemy, korzystając z równości $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$:

$$P = D - \varepsilon_0 E = \begin{cases} \dfrac{3e}{16\pi r^2} & \text{dla } r < R \\ 0 & \text{dla } r > R \end{cases}$$

d) Ładunek zgromadzony na powierzchni kuli (ładunek związany) znajdujemy, korzystając z równości $\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -Q_z$. Bryła, przez powierzchnię której obliczamy strumień pola $\vec{P}$, musi obejmować ładunek, którym jesteśmy zainteresowani. Jako bryłę wybieramy piłkę o środku pokrywającym się ze środkiem szklanej kuli. Wewnętrzna powierzchnia piłki o promieniu $R_1 < R$ znajduje się jeszcze w szkle, a zewnętrzna powierzchnia o promieniu $R_2 > R$ poza szkłem.

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} &= -Q_z \\
-4\pi R_1^2 \frac{3e}{16\pi R_1^2} + 4\pi R_2^2 \cdot 0 &= -Q_z \\
Q_z &= \frac{3}{4} e \\
&\approx 1{,}2 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

Wartości pól w odległości $2R$ od środka kuli.

$$D = \frac{e}{4\pi(2R)^2} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-9}\ \text{C/m}^2$$

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 (2R)^2} \approx 360\ \text{N/C}$$

$$P = 0$$