Warszawa, 2020–03–25

Zbiór zadań do zajęć *Podstawy fizyki* dla kierunku *Bioinformatyka i biologia systemów*

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Wybór: Piotr Nieżurawski
Uwagi proszę kierować na adres Piotr.Niezurawski@fuw.edu.pl

Gdy jestem pytany, dlaczego zajmuję się nauką, odpowiadam: aby zaspokoić moją ciekawość, gdyż jestem z natury poszukiwaczem zrozumienia. Jeśli nie zdziwiło cię coś przez cały dzień, to nie był on zbyt udany.

John A. Wheeler (1911–2008)

Zadania na sprawdzianach i egzaminach będą modyfikacjami zadań z tego zbioru. Zadanie za dodatkowe punkty może być spoza tego zestawu, choć na końcu zbioru zamieszczam przykłady. Zbiór jest udostępniony w czterech wersjach:
1) z samymi treściami zadań,
2) z treściami zadań i wskazówkami
2) z treściami zadań i odpowiedziami oraz
3) z treściami zadań, wskazówkami i odpowiedziami.
Taka też jest zalecana kolejność korzystania z wersji zbioru.
Na sprawdzianach i egzaminach należy posiadać kalkulator naukowy oraz niezapisane maturalne karty wzorów i stałych!

Kinematyka

1 Zadanie – Echo

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-14, id: pl-prędkość-droga-czas-0003500, diff: 1

Anna słyszy dwa jednakowe dźwięki oddzielnie, jako echo, jeśli docierają do niej w odstępie czasu nie mniejszym niż 90 ms. Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od pionowej ściany odbijającej dźwięk powinna znajdować się Anna, aby po klaśnięciu w dłonie usłyszała echo. Przyjmij wartość prędkości dźwięku w powietrzu 343 m/s.

Wskazówka: Jaką drogę przebędzie dźwięk?

Odpowiedź: Minimalna odległości od ściany to około 15,4 m.

2 Zadanie – Sztafeta żółwi

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-14, id: pl-prędkość-droga-czas-0004500, diff: 1

Pałeczka niesiona przez trzy żółwie poruszała się ze średnią szybkością 210 cm/s przez 11 minut. Pierwszy żółw niosący pałeczkę w sztafecie poruszał się z szybkością 230 cm/s przez 2,5 minuty, po czym natychmiast pałeczkę przejął drugi żółw poruszający się z szybkością 180 cm/s przez 4,5 minuty, a potem przekazał ją błyskawicznie trzeciemu żółwiowi. Z jaką średnią szybkością poruszał się trzeci żółw?

Wskazówka: Ile czasu poruszał się trzeci żółw?

Wskazówka: Jaką drogę przebył trzeci żółw?

Odpowiedź: Średnia szybkość trzeciego żółwia to około 231 cm/s.

3 Zadanie – Koło ratunkowe

Piotr Nieżurawski, update: 2019-09-15, id: pl-prędkość-droga-czas-0006000-dpc, diff: 2

Wioślarz płynął łodzią w górę szerokiej, prostej i równomiernie płynącej rzeki. Gdy przepływał pod kładką, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po 18 min wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził koło w odległości 3000 m od kładki. Przyjmij, że wartość prędkości łodzi względem wody była stała i taka sama, gdy łódź płynęła w górę i gdy płynęła w dół rzeki. Załóż również, że koło od chwili, gdy wypadło z łodzi, nie poruszało się względem wody. Oblicz prędkość prądu rzeki względem brzegu w km/h.

Wskazówka: Rozważ całe zdarzenie w układzie współporuszającym się z wodą, aby łatwo określić czas całego zdarzenia.

Wskazówka: W układzie współporuszającym się z wodą woda oraz koło spoczywają, a więc wioślarz tyle samo czasu będzie odpływać od koła, co do niego wracać.

Odpowiedź: Prędkość prądu rzeki to

$$v = \frac{s}{2t_1} = 5 \text{ km/h}$$

gdzie s – odległość koła od kładki, gdy dopędził je wioślarz, t_1 – czas od wypadnięcia koła do chwili, gdy wioślarz to zauważył i zawrócił.

4 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-27, id: pl-kinematyka-0010000, diff: 2

Oblicz prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego w chwili $t_1 = 4$ s, którego położenie na osi X jest opisane równaniem

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + B\,t^2$$

gdzie $A = 2{,}4$ m, $\omega = 1{,}3\ \text{s}^{-1}$, $\phi = 1{,}6$ oraz $B = 0{,}7\ \text{m/s}^2$.

Wskazówka: $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka: $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$v(t) = A\,\omega\cos(\omega t + \phi) + 2B\,t$$

$$v(t_1) \approx 8{,}31\ \mathrm{m/s}$$

$$a(t) = -A\,\omega^2\sin(\omega t + \phi) + 2B$$

$$a(t_1) \approx -0{,}604\ \mathrm{m/s^2}$$

5 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 3D

Piotr Nieżurawski, update: 2018-10-26, id: pl-kinematyka-0010100, diff: 2

Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f_x t^2 + g_x t + h_x \\ g_y t + h_y \\ e_z t^3 + f_z t^2 + g_z t \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

f_x	g_x	h_x	g_y	h_y	e_z	f_z	g_z
$-3\,\mathrm{m/s^2}$	$-2\,\mathrm{m/s}$	$11\,\mathrm{m}$	$4\,\mathrm{m/s}$	$-14\,\mathrm{m}$	$1\,\mathrm{m/s^3}$	$3\,\mathrm{m/s^2}$	$-4\,\mathrm{m/s}$

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 2$ s.

Wskazówka: $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka: $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

Wskazówka:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}b_y}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}b_z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

Wskazówka:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2f_x t + g_x \\ g_y \\ 3e_z t^2 + 2f_z t + g_z \end{bmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} 2f_x \\ 0 \\ 6e_z t + 2f_z \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) = \begin{bmatrix} -14 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

6 Zadanie – Strzelec

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-14, id: pl-kinematyka-0004500, diff: 1

Antyterrorysta strzelił z poziomo ustawionego karabinu do pionowej tarczy oddalonej od niego o 170 m. Pocisk opuścił lufę z szybkością 970 m/s. Pomijając opory powietrza i przyjmując wartość przyśpieszenia ziemskiego 9,8 m/s^2, oblicz o ile opadł pocisk w pionie podczas lotu. Wynik wyraź w centymetrach.

Wskazówka: Jaką drogę w poziomie przebył pocisk?

Wskazówka: Ile czasu pocisk leciał?

Odpowiedź: Pocisk opadł o około 15 cm.

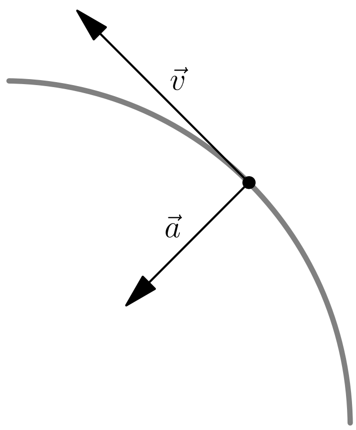
7 Zadanie – Na zakręcie

Piotr Nieżurawski, update: 2017-07-04, id: pl-kinematyka-0002000, diff: 2

Samochód jedzie po łuku o promieniu 45 m ze stałą wartością prędkości 48,6 km/h.
a) Narysuj fragment toru samochodu, zaznacz jego przykładowe położenie i narysuj wektor jego prędkości oraz wektor jego przyśpieszenia, opisz elementy rysunku.
b) Oblicz wartość przyśpieszenia samochodu w m/s^2.

Wskazówka: Wartość prędkości (szybkość) $v = 13{,}5$ m/s. Przyśpieszenie $a = v^2/R$.

Odpowiedź: a) Wektor prędkości $\vec{v}$ jest styczny do toru, a wektor przyśpieszenia $\vec{a}$ jest skierowany do środka okręgu, po fragmencie którego porusza się samochód.



b) Wartość przyśpieszenia dośrodkowego to ok. 4,05 m/s^2.

Dynamika

8 Zadanie – Statek kosmiczny Zazula

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-18, id: pl-dynamika-0000500, diff: 1

W przestrzeni kosmicznej, z dala od innych ciał spoczywał w układzie inercjalnym statek międzygalaktyczny Zazula. Na skutek eksplozji rozpadł się na trzy części. Jedna część o masie $17{,}9 \cdot 10^3$ kg porusza się z szybkością 3,2 m/s. Druga część o masie $23{,}3 \cdot 10^3$ kg nadal spoczywa. Oblicz masę trzeciego fragmentu statku, jeśli jego szybkość jest równa 6,7 m/s.

Wskazówka: Jakie wielkości są zachowane?

Wskazówka: Którą z zachowanych wielkości można obliczyć na podstawie danych?

Odpowiedź: Z zasady zachowania pędu układu, $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$, oraz z $\vec{p}_0 = 0$ i $\vec{p}_2 = 0$ otrzymujemy: $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1$. Obliczając wartość obu stron, $|\vec{p}_3| = |-\vec{p}_1|$, otrzymujemy równanie $p_3 = p_1$, czyli $m_3 v_3 = m_1 v_1$, co prowadzi do wyniku: $m_3 = m_1 v_1 / v_3 \approx 8{,}55 \cdot 10^3$ kg.

9 Zadanie – Spadochroniarz

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-16, id: pl-dynamika-0001000, diff: 1

Spadochroniarz wraz z wyposażeniem ma masę 142 kg i opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 5,2 m/s. Dzieje się to około 300 m nad poziomem morza, a przyśpieszenie ziemskie jest tam równe 9,8 m/s^2. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz z jego wyposażeniem.

Wskazówka: Jakim ruchem względem Ziemi porusza się spadochroniarz? Jakie siły na niego działają i jaki związek zachodzi między nimi?

Odpowiedź: Spadochroniarz porusza się z zerowym przyśpieszeniem, a więc wartość siły oporów ruchu jest równa wartości siły ciężkości skoczka: $Q = mg \approx 1390$ N.

10 Zadanie – Kula w polu dwóch sił

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-16, id: pl-dynamika-0004000, diff: 2

Kula o masie 4 kg porusza się pod wpływem siły ciężkości oraz poziomo skierowanej, stałej siły elektrostatycznej. Wpływ innych sił jest pomijalny. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość siły elektrostatycznej to 48 N. Oblicz:
a) wartość wypadkowej siły działającej na kulę,
b) wartość przyśpieszenia kuli,
c) wartość prędkości kuli po czasie 5 s, zakładając, że początkowo znajdowała się ona w spoczynku.

Wskazówka: Pod jakim względnym kątem skierowane są dwie siły? Z jakiego twierdzenia dotyczącego trójkąta prostokątnego można skorzystać?

Wskazówka: Wartość wypadkowej siły to ok. 62 N. Z której zasady dynamiki należy skorzystać, by obliczyć przyśpieszenie kuli?

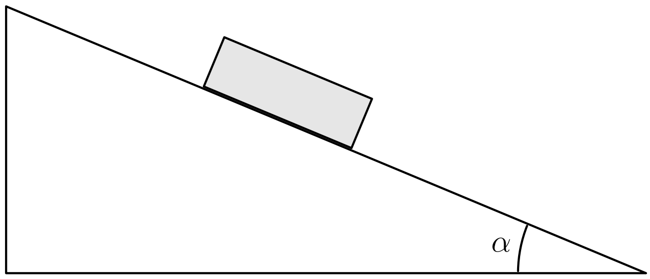
Wskazówka: Wartość przyśpieszenia to ok. 15,5 m/s^2. Przyśpieszenie to jest stałe. Jaką prędkość po czasie t osiągnie ciało poruszające się ze stałym przyśpieszeniem a?

Odpowiedź:
a) Wartość wypadkowej siły (po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa) to ok. 62 N.
b) Wartość przyśpieszenia to $a = F/m \approx 15{,}5$ m/s^2.
c) Wartość prędkości po czasie t to $v = at \approx 77{,}5$ m/s.

11 Zadanie – Równia pochyła (rysunek)

Piotr Nieżurawski, update: 2018-05-14, id: pl-dynamika-0006450, diff: 1

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 44°$ zsuwa się cegła o masie 4,2 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość kąta α na rysunku może być inna od podanej.



Wskazówka: Jakie siły działają na cegłę?

Wskazówka: W którym kierunku cegła się nie porusza?

Wskazówka: Ile wynosi składowa przyśpieszenia ziemskiego równoległa do równi?

Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin\alpha \approx 6{,}81$ m/s^2, w dół równi.

12 Zadanie – Rozpędzanie z oporem

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-15, id: pl-dynamika-0006800, diff: 1

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie 71 kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości 39 N na drodze 2,5 m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość 9 N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszać po rozpędzeniu.

Wskazówka: Jak praca wypadkowej siły związana jest ze zmianą szybkości ciała?

Wskazówka: Wartość wypadkowej siły działającej na łyżwiarza to $F - T$, gdzie F to wartość siły rozpędzającej, a T to wartość siły oporu.

Wskazówka: Praca wypadkowej siły na drodze S, czyli $W = (F - T)S$, jest równa zmianie energii kinetycznej łyżwiarza.

Odpowiedź: Końcowa szybkość łyżwiarza o masie m będzie równa $v = \sqrt{2(F-T)S/m} \approx 1{,}45$ m/s.

13 Zadanie – Spacer z sankami

Piotr Nieżurawski, update: 2017-10-27, id: pl-dynamika-0007000, diff: 1

Dziecko ciągnie sanki ze stałą prędkością, po poziomym boisku, wzdłuż odcinka o długości 20 m. Oblicz pracę, jaką wykona ono przy ciągnięciu, jeśli siła napięcia sznurka wynosi 69 N i tworzy on kąt 25° z poziomem.

Wskazówka: Jak obliczyć składową poziomą siły?

Odpowiedź: Dziecko wykona pracę równą $W = Fs\cos\alpha \approx 1250$ J.

14 Zadanie – Cegły z wykopaliska

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-20, id: pl-dynamika-0005000, diff: 1

Ilu studentów archeologii potrzeba, by wynieść 3100 cegieł z wykopaliska? Każda z cegieł ma masę 7 kg, a każdy student może wykonać pracę 40000 J, niosąc cegły samodzielnie albo w grupie. Każdą cegłę należy przenieść o 23 m wyżej w polu grawitacyjnym o natężeniu 9,8 N/kg.

Wskazówka: O ile zmieni się energia potencjalna cegieł?

Wskazówka: Ilu studentów potrzeba, by zmienić energię potencjalną cegieł o 4891180 J? Zwróć uwagę na fakt, że część studenta nie może wnosić cegieł :-)

Odpowiedź: Minimalna liczba studentów potrzebna do wniesienia cegieł to 123.

15 Zadanie – Wahadło

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-20, id: pl-dynamika-0006000, diff: 1

Kulkę o masie 60 dag zawieszoną na długiej, nierozciągliwej i bardzo lekkiej nici przymocowanej do nieruchomego zaczepu wychylono z położenia równowagi tak, że podniosła się ona na wysokość 3 cm. Nić cały czas była napięta. Po wypuszczeniu kulka wykonuje ruch wahadłowy. Zaniedbując opory ruchu, oblicz wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi. Przyjmij, że przyśpieszenie grawitacyjne jest równe 9,8 m/s^2.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania możesz skorzystać?

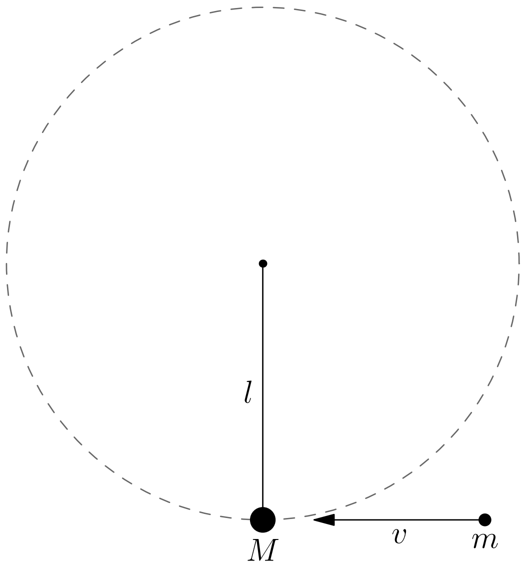
Wskazówka: Korzystając z równania opisującego zasadę zachowania energii mechanicznej, oblicz wartość prędkości kulki w najniższym punkcie jej toru.

Odpowiedź: Wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi to ok. 0,767 m/s.

16 Zadanie – Postrzelone wahadło

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-07, id: pl-dynamika-0010000, diff: 2

Metalowy ciężarek o masie $M = 309$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 54$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości v pocisk o masie $m = 49$ g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu l w płaszczyźnie pionowej? Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Pomiń opory ruchu bryły.



Wskazówka: Jaka będzie prędkość powstałej bryły tuż po zderzeniu i zlepienu się ciężarka i pocisku?

Wskazówka: Jaka będzie prędkość bryły w najwyższym punkcie okręgu?

Wskazówka: Jaki warunek musi być spełniony w najwyższym punkcie okręgu, by torem bryły był właśnie okrąg?

Wskazówka: Ile jest równa minimalna wartość prędkości spełniająca ten warunek?

Odpowiedź: Oznaczmy indeksem 1 prędkość bryły w najniższym punkcie okręgu, a przez 2 w najwyższym. Dodatkowo niech $\mu \equiv m + M$. Otrzymujemy układ równań:

$$mv = \mu v_1$$

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g 2l$$

$$\frac{v_2^2}{l} = g$$

Rozwiązaniem jest $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl} \approx 37{,}6$ m/s.

17 Zadanie – Przyśpieszenie planety

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-19, id: pl-dynamika-0008000, diff: 1

Oblicz wartość przyśpieszenia, z jakim porusza się planeta MLMC wokół gwiazdy PRPL. Przyjmij, że MLMC i PRPL są punktami materialnymi o masach odpowiednio $8{,}84 \cdot 10^{24}$ kg i $3{,}09 \cdot 10^{30}$ kg, a planeta porusza się ze stałą szybkością w odległości $420 \cdot 10^{6}$ km od gwiazdy. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym. Wpływ innych ciał jest nieistotny.

Wskazówka: Jaka siła działa na planetę?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie i siła?

Odpowiedź: Planeta porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = GM/r^2 \approx 1{,}17 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.

18 Zadanie – Naturalny satelita

Piotr Nieżurawski, update: 2017-04-25, id: pl-dynamika-0009000, diff: 2

Oblicz promień kołowej orbity naturalnego satelity o masie $82 \cdot 10^{3}$ kg okrążającego w czasie 63,4 h jednorodną planetę o masie $765 \cdot 10^{22}$ kg. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Wskazówka: Z jakim przyśpieszeniem porusza się satelita?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie dośrodkowe i szybkość?

Wskazówka: Jak powiązane są szybkość satelity, okres jego obiegu i promień orbity?

Wskazówka: Jaka siła działa na satelitę?

Odpowiedź: Promień orbity jest równy $r = \sqrt[3]{GMT^2/(4\pi^2)} \approx 87{,}6 \cdot 10^{3}$ km.

19 Zadanie – Dwie gwiazdy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-24, id: pl-dynamika-0009600, diff: 1

Gwiazda A ma masę M_A, a gwiazda B masę M_B. Gdy były w odległości d_1 od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercjalnym wynosiły odpowiednio v_{A1} oraz v_{B1}. Gwiazdy oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Wyznacz szybkość gwiazdy A w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do d_2, jeśli szybkość gwiazdy B była wtedy równa v_{B2}. Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_A = 3 \cdot 10^{30}$ kg, $M_B = 9 \cdot 10^{30}$ kg, $v_{A1} = 43$ km/s, $v_{B1} = 28$ km/s, $d_1 = 6 \cdot 10^{11}$ m, $v_{B2} = 24$ km/s, $d_2 = 11 \cdot 10^{11}$ m. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Wskazówka: Z jakiej zasady zachowania można skorzystać?

Wskazówka: Układ jest izolowany, więc zachowana jest całkowita energia.

Wskazówka: Zasadę zachowania energii dla dwóch ciał można zapisać następująco

$$E_{k\,A1} + E_{k\,B1} + E_{p\,A1-B1} = E_{k\,A2} + E_{k\,B2} + E_{p\,A2-B2}$$

Oznaczenia energii kinetycznych: $E_{k\,A1}$ – energia kinetyczna gwiazdy A w chwili początkowej; $E_{k\,A2}$ – energia kinetyczna gwiazdy A w chwili końcowej; analogicznie dla gwiazdy B.

Oznaczenia energii potencjalnych: $E_{p\,A1-B1}$ energia potencjalna układu obu gwiazd w chwili początkowej; analogicznie dla chwili końcowej.

Wskazówka: Zasada zachowania energii z użyciem wielkości wymienionych w treści zadania oraz z poszukiwaną szybkością v_{A2}:

$$\frac{1}{2}M_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B1}^2 - G\frac{M_A M_B}{d_1} = \frac{1}{2}M_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B2}^2 - G\frac{M_A M_B}{d_2}$$

Odpowiedź: Szybkość gwiazdy A w chwili końcowej

$$v_{A2} = \sqrt{v_{A1}^2 + (v_{B1}^2 - v_{B2}^2)M_B/M_A + 2GM_B(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1})}$$

$$\approx 39{,}5 \text{ km/s}$$

20 Zadanie – Ciężarek na lince

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-13, id: pl-dynamika-0008500, diff: 1

Przymocowany do linki ciężarek o bardzo małych rozmiarach rozkręcono tak, że w czasie 0,82 s zakreśla okrąg o promieniu 130 cm. Linkę można skracać, wyciągając ją w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się ciężarek. Oblicz okres obiegu tego ciężarka po okręgu, jeśli promień okręgu zostanie zmniejszony do 78 cm. Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu.

Wskazówka: Jaka siła działa na ciężarek?

Wskazówka: Jaka wielkość jest zachowana w tym przypadku?

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania momentu pędu.

Wskazówka: Jak powiązana jest wartość prędkości z okresem w ruchu jednostajnym po okręgu?

Odpowiedź: Okres obiegu po zmniejszeniu promienia z r_1 do r_2 jest równy $T_2 = T_1 \cdot (r_2/r_1)^2 \approx$ 0,295 s.

Płyny, ciepło

21 Zadanie – Przyssawka

Piotr Nieżurawski, update: 2017-03-28, id: pl-statyka-0001000, diff: 1

Oblicz maksymalną masę odważnika, który może wisieć przyczepiony do okrągłej przyssawki przylegającej do poziomego sufitu. Średnica przyssawki jest równa 35 cm. Przyjmij, że między przyssawką a sufitem jest próżnia, ciśnienie atmosferyczne jest równe 1028 hPa, a przyśpieszenie ziemskie 9,8 m/s^2.

Wskazówka: $F = p\,A$

Wskazówka: $A = \pi(d/2)^2$

Wskazówka: $F \approx 9890$ N.

Wskazówka: $m = F/g$

Odpowiedź: Maksymalna masa odważnika jest równa ok. 1010 kg.

22 Zadanie – Pod wodą

Piotr Nieżurawski, update: 2016-10-21, id: pl-statyka-0002000, diff: 1

Oblicz ciśnienie wody działające na nurka znajdującego się na głębokości 30 m. Przyjmij gęstość wody 1012 kg/m^3 oraz natężenie pola grawitacyjnego 9,8 N/kg.

Wskazówka: $p = dgh$

Odpowiedź: Ciśnienie wody jest równe ok. 298 kPa. Jeśli chcesz uwzględnić ciśnienie atmosferyczne, to należy dodać ok. 100 kPa.

23 Zadanie – Kula w cieczy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-29, id: pl-dynamika-0004500, diff: 1

Pełna kula wykonana z materiału o gęstości 1900 kg/m^3 pływa w cieczy o gęstości 2300 kg/m^3. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz stosunek objętości tej części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli.

Wskazówka: Jakie siły działają na kulę?

Wskazówka: Jaka jest wartość wypadkowej siły?

Wskazówka: $V_2\, d_l\, g = V\, d_b\, g$

Wskazówka: $V_1 + V_2 = V$

Wskazówka: $V_1/V = 1 - V_2/V$

Odpowiedź: Stosunek objętości części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli jest równy $1 - d_b/d_l \approx 0{,}174$.

24 Zadanie – Wąż ogrodowy

Piotr Nieżurawski, update: 2016-08-29, id: pl-prędkość-droga-czas-0007000, diff: 1

Gumowy wąż ogrodowy o wewnętrzej średnicy 13 mm zakończony jest otworem o średnicy 3 mm. Z jaką szybkością wylatuje woda z otworu, jeśli w wężu porusza się ona z szybkością 50 cm/s?

Wskazówka: Skorzystaj z tego, że wodę w tym przypadku można uznać za ciecz nieściśliwą.

Wskazówka: $v_1tA_1 = v_2tA_2$, gdzie $A_i \propto d_i^2$

Odpowiedź: Szybkość wody w otworze to ok. 939 cm/s.

25 Zadanie – Parowanie wody

Małgorzata Berajter, update: , id: pl-ciepło-0000900, diff: 1

Do naczynia zawierającego 0,3 kg wody włożono grzałkę o mocy 900 W, a następnie doprowadzono wodę do wrzenia. Ile wody wyparowało w ciągu 2 minut wrzenia? Przyjmij, że ciepło parowania wody wynosi 2270 kJ/kg.

Wskazówka:

$$Q = P \cdot t$$

Q - przekazane ciepło, P - moc grzałki, t - czas.

Wskazówka: Wykonaj bilans energetyczny.

Odpowiedź: Wyparowało 47,6 g wody.

26 Zadanie – Lodowiec

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-04, id: pl-ciepło-0004000, diff: 1

Oszacuj masę stopionego lodu z lodowca, który zsunął się i zatrzymał w dolinie. Początkowo lodowiec spoczywał na wysokości 399 m nad doliną i miał masę $14 \cdot 10^9$ kg. Załóż, że energia tracona przez zsuwający się lodowiec i spływającą wodę powstałą podczas topnienia lodowca powoduje dalsze topnienie lodu. Przyjmij ciepło topnienia lodu 334 kJ/kg. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2.

Wskazówka: Zmiana energii potencjalnej jest równa energii, która została zużyta na stopienie lodu.

Odpowiedź: Masa stopionego lodu to około $m_i = m_0\, g\, h/l \approx 160 \cdot 10^6$ kg, gdzie m_0 jest początkową masą lodowca, h zmianą wysokości lodowca, l ciepłem topnienia lodu, a g wartością przyśpieszenia ziemskiego. Oszacowanie to m.in. zakłada, że h jest zmianą wysokości środka masy lodowca razem z powstałą z niego wodą.

Elektryczność, obwody

27 Zadanie – Łamigłówka z elektrostatyki

Zofia Drabek, update: 2018-07-19, id: pl-elektrodynamika-0000100, diff: 1

Do dyspozycji masz uziemienie oraz trzy jednakowe metalowe kule, dwie z nich naładowane są ładunkiem Q, a trzecia ładunkiem $-Q$. Otrzymaj na jednej z nich ładunek $\frac{3}{8}Q$. Możesz łączyć kule ze sobą oraz z uziemieniem.

Odpowiedź: Najszybsza droga do uzyskania na jednej kuli ładunku o wartości $\frac{3}{8}Q$:

I połączenie kul o ładunkach Q i $-Q$

II połączenie kul o ładunkach 0 i Q

III połączenie kul o ładunkach $\frac{1}{2}Q$ i 0

IV połączenie kul o ładunkach $\frac{1}{2}Q$ i $\frac{1}{4}Q$

V i w ten sposób uzyskaliśmy ładunek $\frac{3}{8}Q$.

Uwaga! Za każdym razem łączymy kule na tyle długo, aby uzyskać taki sam ładunek na obydwu kulach.

28 Zadanie – Natężenie pola elektrycznego

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-16, id: pl-elektrodynamika-0001000, diff: 1

Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego w odległości 13 nm od jądra atomowego o liczbie atomowej 9. Opisz również kierunek i zwrot wektora natężenia pola elektrycznego względem jądra. Pomiń wpływ innych obiektów. Przyjmij, że ładunek protonu jest równy $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, jego masa to $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg, a stała Coulomba wynosi $8{,}988 \cdot 10^{9}$ Nm^2/C^2.

Wskazówka: Ile protonów znajduje się w jądrze?

Wskazówka: Jaki jest ładunek elektryczny protonu?

Odpowiedź: Wartość natężenia pola elektrycznego $|\vec{E}| = kne/r^2 \approx 76{,}7 \cdot 10^6$ N/C, gdzie n jest liczbą atomową, e ładunkiem protonu, a k stałą elektryczną. Kierunek wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ jest taki sam jak prosta przechodząca przez jądro i punkt, w którym określamy pole. Zwrot $\vec{E}$ jest *od jądra*.

29 Zadanie – Przyciągnięty elektron

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-19, id: pl-elektrodynamika-0002000, diff: 1

Oblicz pracę siły elektrostatycznej ciężkiego jonu o wypadkowym ładunku $+6e$, gdzie e jest ładunkiem protonu, podczas przyciągania elektronu z odległości 3 mm do 4 nm. Przyjmij, że elektron na początku i na końcu procesu spoczywa. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

Wskazówka: Pracę siły zachowawczej można wyrazić jako różnicę energii potencjalnych.

Wskazówka: Praca podczas przyciągania z odległości r_1 do r_2 jest równa $W_{1\to 2} = E_{p\,1} - E_{p\,2}$, gdzie $E_{p\,1}$ oznacza energię potencjalną układu jon-elektron na początku, a $E_{p\,2}$ na końcu ruchu.

Odpowiedź: Praca

$$W_{1\to 2} = -k\,n\,e\,e\,\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \approx 2{,}16 \text{ eV} \approx 346 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

gdzie $n = +6$.

30 Zadanie – Praca nad ładunkiem w polu dipola elektrycznego

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-19, id: pl-elektrodynamika-0003500, diff: 1

Oblicz pracę, jaką wykonała zewnętrzna siła, przemieszczając proton po półokręgu w polu trwałego, nieruchomego dipola elektrycznego o wartości momentu dipolowego $5 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo proton spoczywał na symetralnej dipola w odległości 1,9 nm od tego dipola. Na końcu proton również spoczywał na symetralnej dipola, ale w odległości 3,4 nm od tego dipola i po jego drugiej stronie.

Wskazówka: Pracę siły zachowawczej można wyrazić jako różnicę energii potencjalnych.

Wskazówka: Ile pracy wykona zewnętrzna siła, przesuwając ładunek wzdłuż symetralnej dipola, jeśli na końcu i na początku ładunek spoczywa?
Albo:
Ile pracy wykona zewnętrzna siła, przesuwając jednostajnie ładunek wzdłuż symetralnej dipola?

Wskazówka: Jak jest skierowane natężenie pola elektrycznego na symetralnej dipola?

Odpowiedź: Praca zewnętrznej siły jest równa 0.

31 Zadanie – Obrót molekuły w polu innej cząsteczki

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-04, id: pl-elektrodynamika-0004000, diff: 1

Oblicz, ile energii zostanie przekazane otoczeniu, gdy molekuła posiadająca moment dipolowy o wartości $1{,}9 \cdot 10^{-30}$ Cm ustawi się tak, by jej moment dipolowy był skierowany przeciwnie do momentu dipolowego drugiej, unieruchomionej molekuły znajdującej się w odległości 1,5 nm. Wartość momentu dipolowego drugiej molekuły jest równa $15{,}7 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo momenty dipolowe są ustawione równolegle i mają zgodne zwroty. Momenty dipolowe są prostopadłe do wektora względnego położenia molekuł. Przyjmij, że molekuły są trwałymi dipolami punktowymi. Energia potencjalna dwóch dipoli punktowych jest równa

$$E_p = k\left(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r}\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{r}}{r}\right)\frac{1}{r^3}$$

gdzie k jest stałą elektryczną, $\vec{p}_i$ momentem dipolowym, a $\vec{r}$ wektorem względnego położenia dipoli. Korzystając z tego wzoru, uzasadnij, które jego składowe są istotne w rozważanym problemie. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

Wskazówka: Pracę siły zachowawczej można wyrazić jako różnicę energii potencjalnych.

Wskazówka: Momenty dipolowe w początkowym i końcowym ustawieniu są prostopadłe do wektora względnego położenia, więc $\vec{p}_i \cdot \vec{r} = 0$. Istotny jest tylko składnik $k\,\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2/r^3$.

Odpowiedź: Energia przekazana otoczeniu

$$W_{A\to B} = E_{pA} - E_{pB} = 2\,k\,p_1\,p_2/r^3 \approx 992\ \mu\text{eV} \approx 1590 \cdot 10^{-25}\ \text{J}$$

32 Zadanie – Alarm samochodowy

Piotr Nieżurawski, Andrzej Twardowski, update: 2018-01-31, id: pl-obwody-elektryczne-0000510, diff: 1

Przez pewien alarm samochodowy w trybie czuwania przepływa prąd o średnim natężeniu 35 mA. Oblicz ładunek, który przepłynął przez ten układ w trakcie 23 dób. Wynik podaj w kulombach i amperogodzinach.

Wskazówka: $I = Q/t$

Wskazówka: 1 Ah = 1 A · 1 h

Wskazówka: 1 C = 1 A · 1 s

Odpowiedź: Przepłynął ładunek równy $Q = It \approx 19{,}3$ Ah ≈ 69600 C.

33 Zadanie – Opornik

Piotr Nieżurawski, update: 2017-06-24, id: pl-obwody-elektryczne-0001000, diff: 1

Gdy przez opornik płynął stały prąd o natężeniu 20 mA, napięcie mierzone między końcówkami opornika było równe 0,56 V.
a) Oblicz opór opornika.
b) Zakładając, że opornik spełnia prawo Ohma, oblicz natężenie prądu płynącego przez opornik, gdy napięcie mierzone między jego końcówkami jest równe 4,48 V.

Wskazówka: $U = RI$

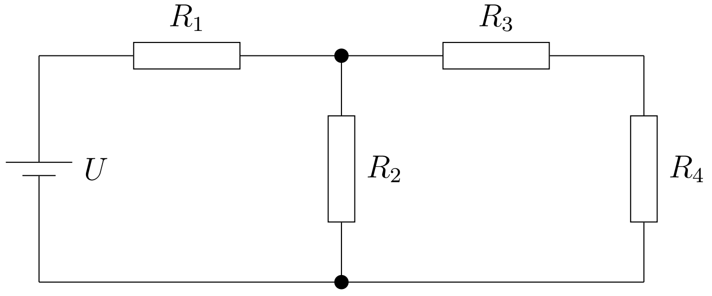
Wskazówka: $I_1/U_1 = I_2/U_2$

Odpowiedź:
a) Opór $R = U_1/I_1 = 28\ \Omega$.
b) Natężenie prądu $I_2 = U_2/R = I_1U_2/U_1 = 160$ mA.

34 Zadanie – Napięcie na oporniku – obwód 3

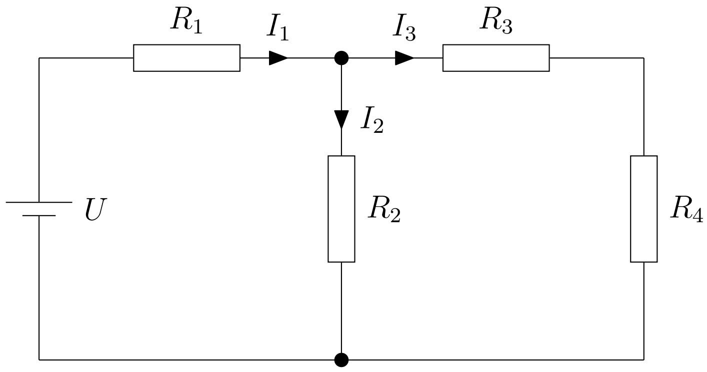
Piotr Nieżurawski, update: 2019-06-09, id: pl-obwody-elektryczne-0005200, diff: 1

Oblicz spadek napięcia na oporniku R_4 w poniższym obwodzie, jeśli $R_1 = 9\ \Omega$, $R_2 = 14\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 9\ \Omega$, $U = 17$ V.



Wskazówka: Skorzystaj z praw Kirchhoffa.

Wskazówka: Zapisz prawa Kirchhoffa. Użyj natężeń oznaczonych na poniższym rysunku.



Wskazówka: I prawo Kirchhoffa dla górnego węzła:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

II prawo Kirchhoffa dla oczka $U\, R_1\, R_2$:

$$U = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

II prawo Kirchhoffa dla oczka $R_3\, R_4\, R_2$:

$$0 = (R_3 + R_4) I_3 - R_2 I_2$$

Wskazówka: Spadek napięcia na oporniku R_4 jest równy $U_4 = R_4 I_3$.

Odpowiedź: Spadek napięcia na oporniku R_4 to

$$U_4 = U \frac{R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)/R_2 + R_1}$$

Dla podanych wartości $U_4 \approx 3{,}8$ V.

Fizyka kwantowa

35 Zadanie – Wzbudzone atomy wodoru

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-06, id: pl-fizyka-kwantowa-0001000, diff: 1

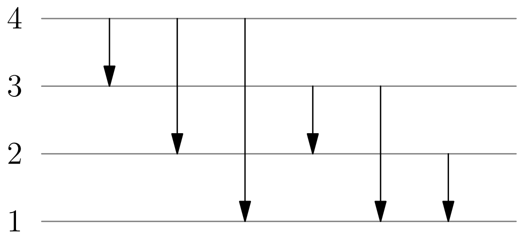
Próbka składa się z wielu atomów wodoru, a każdy z nich na początku znajduje się w stanie wzbudzonym o głównej liczbie kwantowej $n = 4$.
a) Narysuj schemat przedstawiający poziomy energetyczne atomu wodoru wraz z wartościami odpowiadającej im głównej liczby kwantowej n (odległości między poziomami mogą być dowolne). Zaznacz na rysunku wszystkie możliwe bezpośrednie i pośrednie przejścia elektronów, których skutkiem jest emisja fotonu z atomów próbki.
b) Oblicz liczbę linii emisyjnych, które można zaobserwować, mierząc promieniowanie badanej próbki.
c) Napisz, dla którego przejścia emitowane fotony mają najmniejszą częstotliwość spośród wszystkich emitowanych przez próbkę.

Wskazówka: $n = 1, 2, ...$

Wskazówka: $E_\gamma = E_i - E_f = hf$.

Wskazówka: $E_n \propto -n^{-2}$.

Odpowiedź:
a) Schemat poziomów i przejść (odległości między poziomymi liniami nie odzwierciedlają rzeczywistych odległości między poziomami):



b) Można zaobserwować 6 linii.
c) Przejście z poziomu 4 na poziom 3.

36 Zadanie – Liczby kwantowe atomu wodoru

Piotr Nieżurawski, update: 2017-01-18, id: pl-fizyka-kwantowa-0002000, diff: 1

Opisz wszystkie kombinacje liczb kwantowych orbitalnej l i magnetycznej m określające możliwe stany elektronu w atomie wodoru, jeśli wiadomo, że elektron znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej $n = 5$.

Wskazówka: $l = 0, 1, ..., n - 1$.

Wskazówka: $m = -l, ..., 0, ..., +l$.

Odpowiedź: Możliwe stany to:
$l = 0$ z $m \in \{0\}$
$l = 1$ z $m \in \{-1, 0, 1\}$
$l = 2$ z $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$l = 3$ z $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$l = 4$ z $m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

37 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa w atomie wodoru

Andrzej Twardowski, Piotr Nieżurawski, update: 2018-10-04, id: pl-fizyka-kwantowa-0004900, diff: 2

Dla każdego ze stanów opisanych następującymi funkcjami falowymi oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na jądrze atomu wodoru:
a)
$$\Psi_{100}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$
b)
$$\Psi_{210}(x, y, z) = \frac{z}{4\sqrt{2\pi} a_0^{5/2}} e^{-r/(2a_0)}$$
gdzie $a_0 \approx 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m. Wyniki podaj w jednostkach nm^{-3}. Funkcje falowe określone są w układzie kartezjańskim XYZ, jądro spoczywa w środku tego układu, a r jest odległością od środka układu do punktu (x, y, z).

Wskazówka:
$$e^0 = 1$$

Wskazówka:
$$\Psi_{210} \propto z$$

Odpowiedź:
a)
$$|\Psi_{100}(0{,}0{,}0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \approx 2150 \ \mathrm{nm}^{-3}$$
b)
$$|\Psi_{210}(0{,}0{,}0)|^2 = 0 \ \mathrm{nm}^{-3}$$

38 Zadanie – Liczba fotonów

Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fizyka-kwantowa-0003000, diff: 1

Impuls monochromatycznego światła o długości fali 610 nm w próżni padł na ciemną płytkę, która pochłania 79% energii padającego na nią promieniowania. Oblicz liczbę fotonów w tym impulsie, jeśli wiadomo, że na skutek oświetlenia energia płytki zwiększyła się o 35 mJ. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s i stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s.

Wskazówka:
$$E_\gamma = hf$$
E_γ – energia fotonu; f – częstotliwość światła.

Wskazówka:

$$\lambda = c/f$$

λ – długość fali.

Wskazówka: $E_\gamma = hc/\lambda \approx 3{,}26 \cdot 10^{-19}$ J.

Wskazówka:

$$E_i = E_{\mathrm{abs}}/\varepsilon_{\mathrm{eff}}$$

E_i – energia impulsu; E_{abs} – energia zaabsorbowana przez płytkę; $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$ – efektywność pochłaniania energii przez płytkę.

Odpowiedź: Liczba fotonów w impulsie $n = E_i/E_\gamma = E_{\mathrm{abs}}/(\varepsilon_{\mathrm{eff}} E_\gamma) \approx 1360 \cdot 10^{14}$.

39 Zadanie – Efekt fotoelektryczny

Piotr Nieżurawski, update: 2018-01-09, id: pl-fizyka-kwantowa-0004000, diff: 1

Metalową płytkę oświetlono promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali 250 nm. Maksymalna energia kinetyczna wybijanych z płytki elektronów jest równa 1,89 eV. Oblicz pracę wyjścia elektronu z powierzchni tego metalu. Wynik podaj w eV. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, ładunku elementarnego $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s $= 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV $\cdot$ s.

Wskazówka:

$$E_\gamma = W + E_k$$

E_γ – energia fotonu; W – praca wyjścia; E_k – maksymalna energia kinetyczna elektronu.

Wskazówka:

$$E_\gamma = hf$$

f – częstotliwość światła.

Wskazówka:

$$\lambda = c/f$$

λ – długość fali światła.

Wskazówka: $E_\gamma = hc/\lambda \approx 4{,}96$ eV.

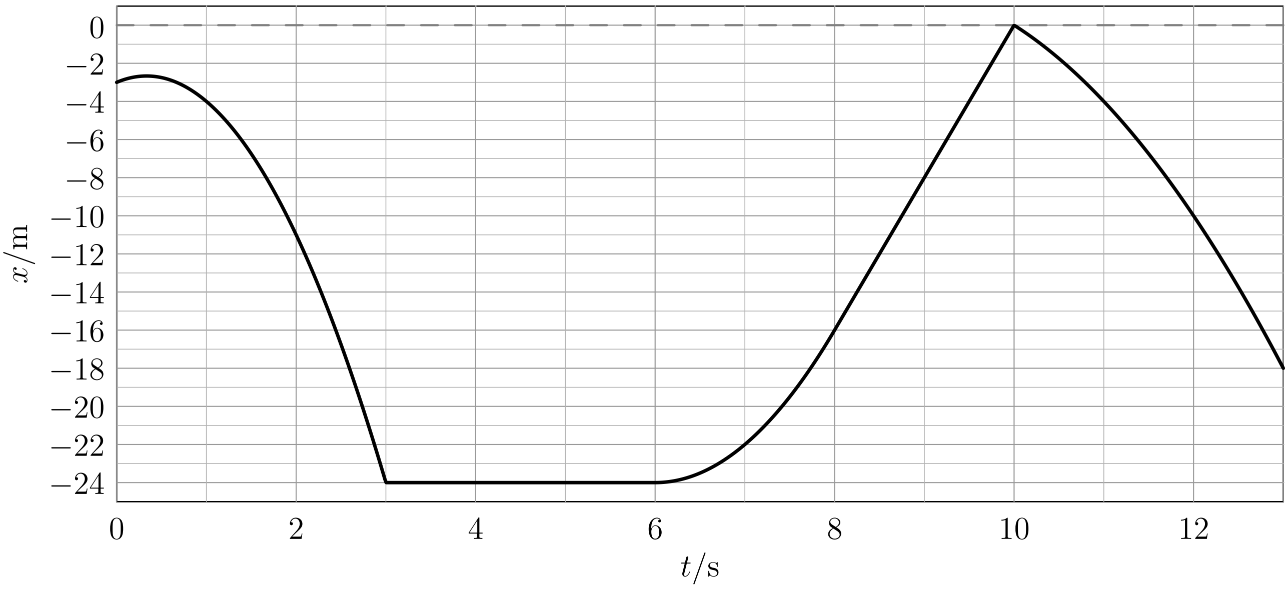
Odpowiedź: Praca wyjścia $W = E_\gamma - E_k \approx 3{,}07$ eV.

Zadania dodatkowe, nieobowiązkowe!

40 Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-21, id: pl-kinematyka-0001000, diff: 2

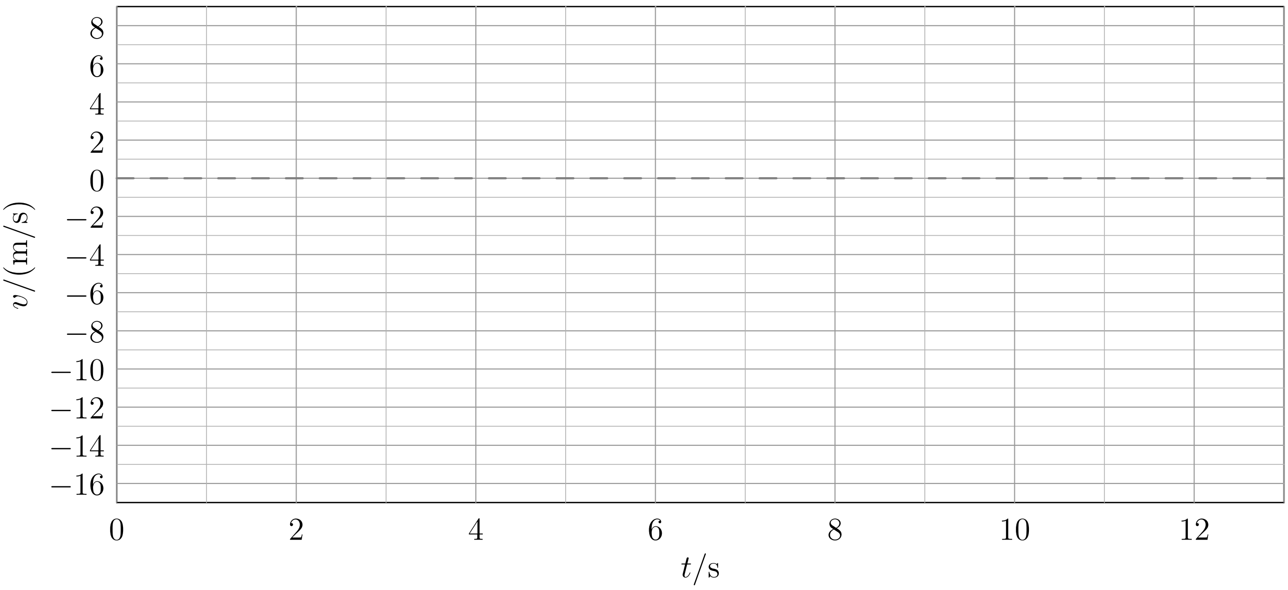
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi X. Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia x od czasu t.



W tabeli podano przyśpieszenie a punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

t/s	$[0,3[$	$]3,6[$	$]6,8[$	$]8,10[$	$]10,13]$
$a/(\mathrm{m/s^2})$	-6	0	4	0	-2

Wykonaj wykres zależności prędkości v od czasu dla tego punktu materialnego dla $t \in [0,13]$ s.



Wskazówka: Jeśli v jest dodatnie, to punkt materialny porusza się zgodnie ze zwrotem osi X, a jeśli v jest ujemne, to punkt materialny porusza się w przeciwną stronę.

Wskazówka:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Wskazówka: Wygodniej będzie posłużyć się zmianami wielkości. Po danym interwale czasowym Δt mamy:

$$\Delta x = v_0\,\Delta t + \frac{1}{2}a\,\Delta t^2,$$

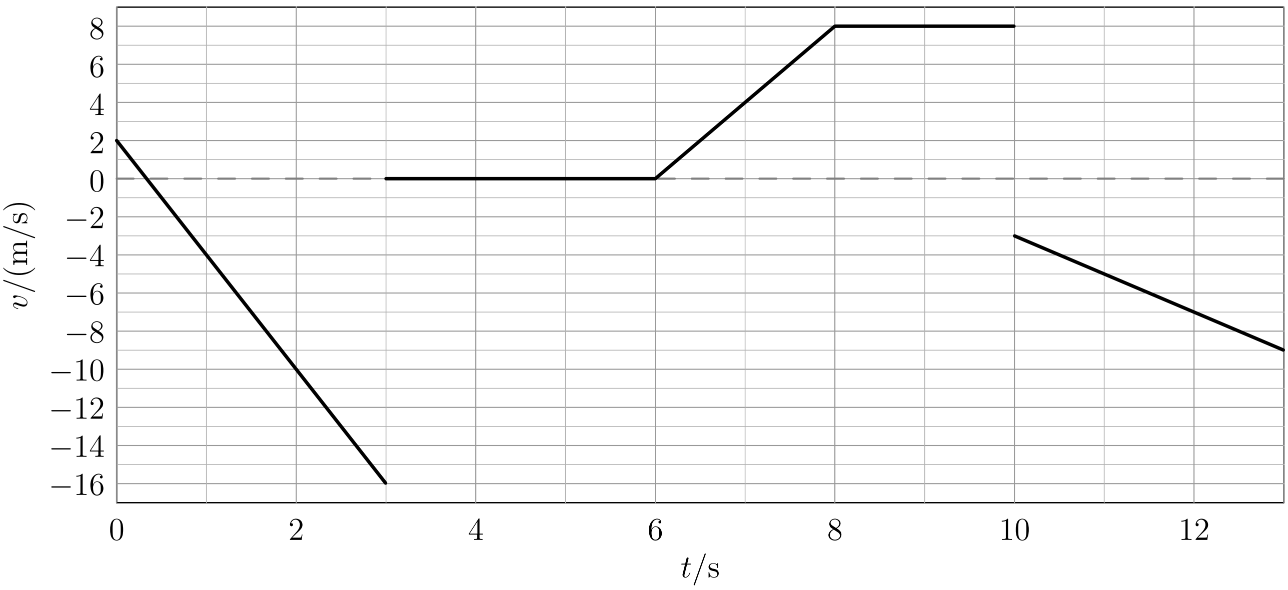
więc prędkość na początku przedziału to

$$v_0 = \Delta x/\Delta t - \frac{1}{2}a\,\Delta t$$

Wskazówka: Na końcu interwału czasowego Δt prędkość to

$$v_f = v_0 + a\,\Delta t = \Delta x/\Delta t + \frac{1}{2} a\,\Delta t$$

Odpowiedź: Poprawny wykres:



41 Zadanie – Przecięcie torów?

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-07, id: pl-kinematyka-0009000, diff: 2

Mały, metalowy ciężarek wisi na bardzo lekkim sznurku. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej. Udowodnij, że tor ciężarka, gdy porusza się on po takim okręgu, nie przecina się z torem, po jakim poruszałby się, gdyby sznurek zwolniono w momencie, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu. Pomiń opory ruchu.

Wskazówka: Jaka musi być wartość prędkości v ciężarka, by poruszał się on po okręgu o promieniu l w okolicy najwyższego punktu tego okręgu?

Wskazówka: Wartość prędkości w najwyższym punkcie okręgu musi spełniać warunek $v^2/l \geq g$, czyli przyśpieszenie dośrodkowe musi być większe lub równe przyśpieszeniu grawitacyjnemu. Sznurek jest wtedy rozciągnięty. Łatwo wykazać, że jeśli spełniony jest ten warunek w najwyższym punkcie, to ciężarek będzie się poruszał po okręgu. Wystarczy wykazać, że sznurek będzie zawsze napięty poniżej najwyższego punktu, a to oznacza, że przyśpieszenie dośrodkowe musi być większe niż składowa przyśpieszenia ziemskiego równoległa do sznurka. Z zasady zachowania energii wynika, że na mniejszej wysokości prędkość v' ciężarka będzie większa niż v. Z geometrii wynika, że składowa g_l przyśpieszenia ziemskiego równoległa do sznurka będzie mniejsza niż g. A więc jeśli $v^2/l \geq g$, to $v'^2/l > g_l$.

Wskazówka: Rozwiąż układ równań: okręgu i paraboli, po której poruszałby się cieżarek, gdyby zwolniono sznurek, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu.

Wskazówka: Równanie okręgu: $x^2 + y^2 = l^2$.

Wskazówka: Równanie ruchu, gdyby zwolniono sznurek, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu: $x = vt$ oraz $y = l - gt^2/2$.

Wskazówka: Równanie paraboli: jeśli $v \neq 0$, to $t = x/v$ i otrzymujemy równanie toru $y = l - \frac{g}{2v^2}x^2$.

Odpowiedź:
I sposób – graniczna wartość v.
Minimalna wartość prędkości v_m spełnia równanie $v_m^2 = gl$. Równanie paraboli w tym przypadku można przekształcić do postaci $x^2 = 2l(l - y)$. Po wstawieniu tego wyniku do równania okręgu otrzymujemy równanie $2l(l - y) + y^2 = l^2$, a ono sprowadza się do $(l - y)^2 = 0$, a więc ostatecznie jest tylko jeden podwójny pierwiastek $y_{1,2} = l$. Oznacza to, że parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$, ale go nie przecina. Wystarczy rozpatrzyć ruch z minimalną wartością prędkości v_m, gdyż dla większych wartości prędkości v parabola jest położona nie bliżej okręgu niż parabola dla wartości prędkości v_m. Sprawdzenie: $l - \frac{g}{2v^2}x^2 \geq l - \frac{g}{2v_m^2}x^2$ prowadzi do warunku $v \geq v_m$.
II sposób – równanie na y.
Oznaczenie: $A \equiv \frac{2v^2}{g}$. Z równania paraboli otrzymujemy $x^2 = A(l - y)$. Z równania okręgu, $A(l - y) + y^2 = l^2$, otrzymujemy $(l - y)(l + y - A) = 0$. Równanie to ma pierwiastek $y_1 = l$, czyli punkt $(0, l)$ jest wspólny dla paraboli i okręgu . Drugi pierwiastek, $y_2 = A - l$, powininen też mieścić się w zakresie dopuszczalnych wartości y dla punktów okręgu, czyli $y \in [-l, l]$. Stąd $A \in [0, 2l]$, a więc $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $y_2 = y_1 = l$. W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.
III sposób – równanie na x.
Oznaczenie: $B \equiv \frac{g}{2v^2}$. Równanie paraboli: $y = l - Bx^2$. Z równania okręgu, $x^2 + (l - Bx^2)^2 = l^2$, otrzymujemy $x^2(1 - 2lB + B^2x^2) = 0$. Równanie to ma podwójny pierwiastek $x_{1,2} = 0$, czyli parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$. Drugi pierwiastek, $x_2 = \pm\sqrt{2lB - 1}/B$, istnieje, jeśli $2lB - 1 \geq 0$, czyli gdy $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $x_{3,4} = 0$ (czyli równanie ma jeden czterokrotny pierwiastek). W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

42 Zadanie – Wiewiórka na stacji kosmicznej

Piotr Nieżurawski, update: 2019-03-17, id: pl-dynamika-0015100, diff: 2

Wiewiórka o masie m odbiła się od ściany stacji kosmicznej i leci w pomieszczeniu wypełnionym powietrzem. Wyprowadź zależność prędkości v wiewiórki od czasu t, jeśli na początku miała ona prędkość v_0 w układzie stacji. Na wiewiórkę działa jedynie siła oporu powietrza o wartości kv^2, gdzie k jest stałą.

Wskazówka: Równianie ruchu:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2$$

Wskazówka: Oznaczmy $b \equiv k/m$. Całkujemy:

$$\int_{v_0}^{v} v'^{-2}\,\mathrm{d}v' = -b\int_0^t \mathrm{d}t'$$

Wskazówka: Całkowanie prowadzi do

$$v^{-1} - v_0^{-1} = bt$$

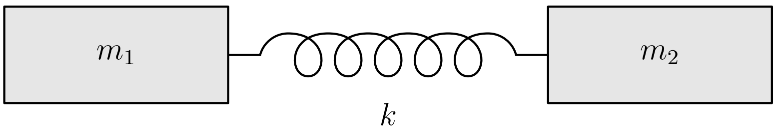
Odpowiedź:

$$v = \frac{1}{v_0^{-1} + bt} = \frac{1}{v_0^{-1} + \frac{k}{m}t}$$

43 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Piotr Nieżurawski, update: 2018-05-14, id: pl-dynamika-0008200, diff: 1

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k. Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 47$ N/m, $m_1 = 3$ kg oraz $m_2 = 6$ kg.



Wskazówka: Opiszmy położenie ciężarków za pomocą współrzędnych x_1 oraz x_2, przyjmijmy zwrot osi X w prawo. Odstęp między nimi to $u \equiv x_2 - x_1$.

Wskazówka: Niech l będzie długością swobodną sprężyny. Siła sprężystości działająca na drugi ciężarek będzie równa: $-k(u - l)$.

Wskazówka: Równiania ruchu dla obu ciężarków:

$$m_1\ddot{x}_1 = +k(u - l)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(u - l)$$

Wskazówka: Po wyznaczeniu przyśpieszeń i odjęciu równań stronami otrzymujemy:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(u - l)$$

Ale

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \ddot{u}$$

Prowadzi to do równania oscylatora

$$\ddot{u} = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(u - l)$$

Odpowiedź: Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Wynik liczbowy $T \approx 1{,}3$ s.

44 Zadanie – Kosmiczny walc

Piotr Nieżurawski, update: 2017-09-30, id: pl-dynamika-0009500, diff: 2

Dwa kuliste, jednorodne obiekty o masach M_a oraz M_b wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. W układzie inercjalnym, w którym środek układu spoczywa, okres tego ruchu wynosi T. Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.
a) Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit.
b) Uprość wyniki w przypadku, gdy $M_a/M_b \to 0$, oraz w przypadku, gdy $M_a = M_b$.
c) Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_a = 36 \cdot 10^{22}$ kg, $M_b = 66 \cdot 10^{22}$ kg oraz $T = 860$ h. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Wskazówka: Jakim ruchem poruszają się te obiekty?

Wskazówka: Jak powiązane są przyśpieszenie dośrodkowe i szybkość?

Wskazówka: Jak powiązane są szybkość obiektu, okres jego obiegu i promień orbity?

Wskazówka: Jaka siła działa na obiekty?

Odpowiedź: a) Dla odległości między środkami obiektów $d \equiv r_a + r_b$, gdzie r_a i r_b są promieniami orbit, druga zasada dynamiki prowadzi do równań:

$$v_a^2/r_a = GM_b/d^2$$

$$v_b^2/r_b = GM_a/d^2$$

gdzie v_a i v_b oznaczają szybkości ciał. Ponieważ $v_i = 2\pi r_i/T$, otrzymujemy

$$r_a/M_b = \alpha d^2$$

$$r_b/M_a = \alpha d^2$$

gdzie $\alpha \equiv GT^2/(4\pi^2)$. Prawe strony równań są identyczne, więc $r_a M_a = r_b M_b$ (jak inaczej uzyskać to równanie?). Eliminujemy z pierwszego równania r_b i uzyskujemy wyniki

$$r_a = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_b}{(1 + M_a/M_b)^2}}$$

$$r_b = r_a M_a/M_b = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_a}{(1 + M_b/M_a)^2}}$$

$$d = r_a + r_b = \sqrt[3]{\alpha(M_a + M_b)}$$

b) W przypadku $M_a/M_b \to 0$:

$$r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

$$r_b = 0$$

$$d = r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

W przypadku, gdy $M \equiv M_a = M_b$

$$r_a = r_b = \sqrt[3]{\alpha M/4}$$

$$d = 2r_a = \sqrt[3]{2\alpha M}$$

c) Wyniki liczbowe: $r_a \approx 165 \cdot 10^3$ km, $r_b \approx 89{,}9 \cdot 10^3$ km, $d \approx 255 \cdot 10^3$ km.

45 Zadanie – Tunel średnicowy

Piotr Nieżurawski, update: 2017-05-07, id: pl-dynamika-0009250, diff: 2

Oblicz szybkość, z jaką poruszałaby się jednoosobowa kapsuła w odległości 3800 km od środka planety RBRTHK w tunelu wydrążonym wzdłuż jej średnicy. Przyjmij, że planeta RBRTHK jest jednorodną kulą, jej masa jest równa $8{,}08 \cdot 10^{24}$ kg, a jej promień 7300 km. Kapsuła porusza się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego planety, a na początku podróży, na powierzchni planety spoczywała. Zmiany pola grawitacyjnego wynikające z wydrążenia tunelu oraz opory ruchu są pomijalne. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym, w którym planeta spoczywa.

Wskazówka: Jak powiązane są praca siły działającej na ciało i zmiana energii kinetycznej tego ciała?

Wskazówka: Siła grawitacji wewnątrz tej planety, w odległości r od jej środka jest równa sile grawitacji pochodzącej tylko od masy wewnątrz kuli o promieniu r i środku w środku planety.

Odpowiedź: Korzystam z zasady zachowania energii $E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to 2}$, gdzie E_{k2} jest energią kinetyczną kapsuły na końcu, E_{k1} energią kinetyczną kapsuły na początku (tu równą 0), a $W_{1\to 2}$ pracą siły grawitacji nad kapsułą od położenia początkowego do końcowego. Siła grawitacji w planecie $\vec{F}(r) = -GMm\frac{r}{R^3}\frac{\vec{r}}{r}$, gdzie M jest masą planety, R jej promieniem, m masą kapsuły, a $\vec{r}$ wektorem położenia o początku w środku planety. Praca

$$W_{1\to 2} = \int_R^r \vec{F}(r') \cdot d\vec{r}\,' = -\int_R^r F(r')\, dr' = -\frac{GMm}{R^3}\int_R^r r'\, dr' = \frac{1}{2}GMm(R^2 - r^2)/R^3$$

Oczywiście $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$, gdzie v jest poszukiwaną szybkością. Ostatecznie

$$v = \sqrt{GM(R^2 - r^2)/R^3} \approx 7340 \text{ m/s}$$

46 Zadanie – Ołów, lód i woda

Piotr Nieżurawski, update: 2019-10-06, id: pl-dynamika-0004750, diff: 2

Kulę o masie 7,5 kg wykonaną ze stopu ołowiu zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego pojemnika, którego poziome dno ma powierzchnię 0,35 m^2. Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie, cześciowo zanurzona. Gęstość użytego stopu ołowiu jest równa 10300 kg/m^3, a gęstość wody 1000 kg/m^3. Lód, z którego zbudowana jest lodowa kula, powstał z zamrożenia takiej samej wody, jaka znajduje się w pojemniku. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz, o ile zmieni się wysokość poziomu wody w pojemniku, gdy lód stopnieje. Napisz, czy poziom wody w pojemniku się podniesie, obniży, czy się nie zmieni.

Wskazówka: Jak związana jest wysokość lustra wody w pojemniku z objętością wody i ciał w niej zanurzonych?

Wskazówka: Jaką objętość wody wypiera kula lodowa zawierająca kulę ołowianą?

Wskazówka: Jaką objętość wody wyprze ołowiana kula po stopieniu lodu?

Wskazówka: Ile wody powstanie ze stopionego lodu?

Wskazówka: Kula lodowa zawierająca kulę ołowianą wypiera objętość wody równą $(m_p + m_i)/\rho_w$, gdzie m_p jest masą ołowianej kuli, m_i masą lodu, a ρ_w gęstością wody.

Wskazówka: Po stopieniu lodu ołowiana kula opadnie na dno i będzie wypierać objętość wody równą własnej objętości, a więc m_p/ρ_p, gdzie ρ_p to gęstość użytego stopu ołowiu.

Wskazówka: Lód stopi się, a powstała woda będzie mieć objętość m_i/ρ_w, czyli taką samą, jaką wypierał lód.

Odpowiedź: Wysokość lustra wody zmieni się o

$$\Delta h = m_p \left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_w}\right)\frac{1}{S} \approx -19{,}4 \text{ mm}$$

gdzie S to pole powierzchni dna pojemnika. A więc poziom wody w pojemniku się obniży.