Fizyka elementarna – materiały dla studentów. Części 18 i 19.
Prawo Gaussa

Częściowo przygotowane na podstawie materiałów z roku akademickiego 2007/8.
Agnieszka Korgul

Literatura:
J. Blinowski, J. Trylski „Fizyka dla kandydatów na wyższe uczelnie"
J. Blinowska,J.Gaj,A.Szymacha,W. Zielicz „ *Fizyka i astronomia. Część II"* Rozdział 1

Energia potencjalna oddziałujących ładunków wyraża się zależnością:

$E_{pot} = k\frac{Qq}{r}$, Qq <0 *pole sił przyciągania*, Qq>0 *pole sił odpychania*

Wartość strumienia wektora natężenia pola elektrycznego E przechodzącego przez dowolną zamkniętą powierzchnię S jest równa wartości ładunku całkowitego zawartego wewnątrz tej powierzchni. Co zapisujemy

dla pola elektrycznego $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ dla pola grawitacyjnego $\Phi = -4\pi GM$

Widzimy tu analogie, że G odpowiada $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Analogia pomiędzy polem elektrostatycznym a grawitacyjnym

	Pole grawitacyjne	Pole elektrostatyczne
Źródło	Masa M	Ładunek Q
Natężenie pola	$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$
Natężenie pola centralnego	$\vec{\gamma} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$	$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$
Siła oddziaływania dwóch obiektów	$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$	$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$
Energia potencjalna	$E_{pg} = \frac{-GMm}{r}$ pole sił przyciągania	$E_{pe} = k\frac{Qq}{r}$, gdy Qq <0 pole sił przyciągania, Qq>0 pole sił odpychania

Wprowadzenie – różne układy współrzędnych.

Materiał do samodzielnego opracowania przez studentów.

1. Współrzędne biegunowe

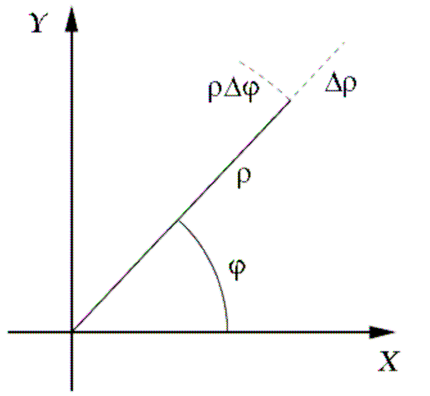
Na płaszczyźnie wybieramy układ kartezjański X,Y. Współrzędne biegunowe punktu (ρ, ϕ) to odpowiednio długość jego wektora wodzącego ρ oraz kąt między dodatnia półosią X a wektorem wodzącym ϕ, tzw. kąt azymutalny ($\phi = 0$ dla punktu na tej półosi). Związek pomiędzy współrzędnymi biegunowymi a kartezjańskimi:

$$x = \rho \cdot \cos\phi$$

$$y = \rho \cdot \sin\phi$$

Na poniższym rysunku zaznaczono nowe współrzędne oraz zmiany położenia przy niezależnych przyrostach zmiennych biegunowych.

Uwaga! Symbol ρ może oznaczać gęstość, współrzędną w układzie biegunowym oraz walcowym.



2. Współrzędne cylindryczne (walcowe)

W przestrzeni 3-wymiarowej wybieramy kartezjański układ X,Y,Z. Współrzędne cylindryczne punktu (ρ, ϕ, z) to odpowiednio:

$\rho -$ odległość od osi Z,

$\phi -$ kąt między dodatnia półosią X a rzutem wektora wodzącego na płaszczyźnie z=0, ϕ, tzw. kąt azymutalny ($\phi = 0$ dla punktu na dodatniej półosi X),

$z -$ zwykła współrzędna kartezjańska.

Związek pomiędzy współrzędnymi cylindrycznymi a kartezjańskimi:

$$x = \rho \cdot \cos\phi$$

$$y = \rho \cdot \sin\phi$$

$$z = z$$

Uwaga! Dla ustalonego układ cylindryczny jest układem biegunowym.

Wersory jednostkowe w układzie cylindrycznym

Każdej współrzędnej można przypisać wersor. Geometrycznie, wersor $\widehat{e}_\rho$ w punkcie A jest prostopadły do zbioru punktów tak samo odległych od początku układu współrzędnych co punkt A i ma zwrot od mniejszych do większych wartości ρ. Podobnie wersor $\widehat{e}_\phi$ w punkcie A jest prostopadły do zbioru punktów o takim samym kacie azymutalnym co punkt A i ma zwrot od mniejszych do większych wartości ϕ. Analogicznie sytuacja wygląda z „z” która jest podobna jak współrzędna kartezjańska.

Przykład :
Wyraź wektor wodzący punktu za pomocą wersorów w układzie cylindrycznym.

W małym przesunięciu $\Delta\vec{l} = \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z$ w układzie karteziańskim.
Wyraźmy zatem x i y w układzie cylindrycznym.

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{l} &= \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\
&\Delta(\rho \cdot \cos\phi) \cdot \vec{e}_x + \Delta(\rho \cdot \sin\phi) \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\
&(\Delta\rho \cdot \cos\phi + \rho \cdot \Delta\cos\phi) \cdot \vec{e}_x + (\Delta\rho \cdot \sin\phi + \rho \cdot \Delta\sin\phi) \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\
&(\Delta\rho \cdot \cos\phi - \rho \cdot \sin\phi\Delta\sin\phi) \cdot \vec{e}_x + (\Delta\rho \cdot \sin\phi + \rho \cdot \cos\phi\Delta\phi) \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\
&\Delta\rho(\cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y) + \Delta\phi\rho(-\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y) + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\
&\Delta\rho \cdot \vec{e}_\rho + \Delta\phi\rho \cdot \vec{e}_\phi + \Delta z \cdot \vec{e}_z
\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}
\vec{e}_\rho &= \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y \\
\vec{e}_\phi &= -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y \\
\vec{e}_z &= \vec{e}_z
\end{aligned}$$

wektor wodzący $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y = \rho \cdot \vec{e}_\rho$

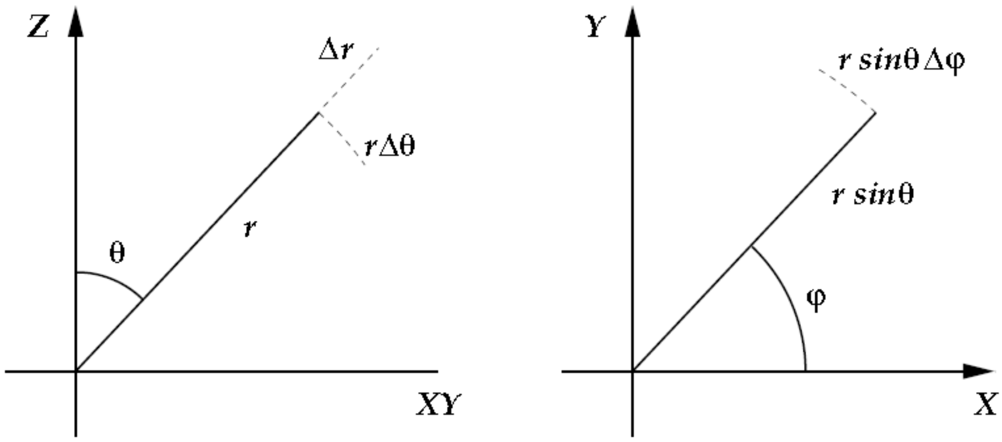
3. Współrzędne sferyczne (kuliste)

W przestrzeni 3-wymiarowej wybieramy kartezjański układ X,Y,Z. Współrzędne sferyczne punktu (r, θ, ϕ) to odpowiednio:
$r -$ odległość od początku układu współrzędnych,
$\theta -$ kąt między wektorem wodzącym punktu a dodatnią półosią Z. $\theta = 0$ dla punktów leżących na tej półosi, tzw. kąt biegunowy (polarny).
$\phi -$ identycznie jak w układzie cylindrycznym, $\phi -$ kąt między dodatnia półosią X a rzutem wektora wodzącego na płaszczyźnie z=0, tzw. kąt azymutalny.

Związek pomiędzy współrzędnymi cylindrycznymi a kartezjańskimi:

$$\begin{aligned}
x &= r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi \\
y &= r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi \\
z &= r \cdot \cos\theta
\end{aligned}$$

Na poniższym rysunku zaznaczono nowe współrzędne oraz zmiany położenia przy niezależnych przyrostach zmiennych sferycznych.



Przykład :
Wyraź wektor wodzący punktu za pomocą wersorów w układzie sferycznym.

W małym przesunięciu $\Delta\vec{l} = \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z$ w układzie kartezjańskim.
Wyraźmy zatem x i y w układzie sferycznym.

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{l} &= \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\
&\Delta(r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) \cdot \vec{e}_x + \Delta(r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) \cdot \vec{e}_y + \Delta(r \cdot \cos\theta) \cdot \vec{e}_z = \\
&\Delta r(\sin\theta \cdot \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z) + \\
&\Delta\theta r(\cos\theta \cdot \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\theta \cdot \sin\phi \cdot \vec{e}_y - \sin\theta \cdot \vec{e}_z) + \\
&\Delta\phi r \sin\theta(-\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y) = \Delta r \cdot \vec{e}_r + \Delta\theta r \cdot \vec{e}_\theta + \Delta\phi r \sin\theta \cdot \vec{e}_\phi
\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \sin\theta \cdot \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z \\
\vec{e}_\theta &= \cos\theta \cdot \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\theta \cdot \sin\phi \cdot \vec{e}_y - \sin\theta \cdot \vec{e}_z \\
\vec{e}_\phi &= -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y
\end{aligned}$$

wektor wodzący $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z = r \cdot \vec{e}_r$

Zadania do rozwiązania na ćwiczeniach

Zadanie 1
Udowodnij, że na punkt materialny o masie m umieszczony wewnątrz jednorodnej powłoki sferycznej o dowolnych rozmiarach nie działa żadna siła.

Zadanie 2 (wprowadzenie pojęcia strumienia)
Przez czas T=10 h padał pionowo deszcz o natężeniu $j = 0{,}1\,\frac{kg}{m^2 h}$. Oblicz, ile wody zebrała stojąca pionowo beczka, której poziomy otwór ma powierzchnię $S = 1 m^2$. Ile wody byłoby w beczce po tym samym deszczu, gdyby beczka była przechylona tak, że jej oś tworzyłaby kąt α z pionem ?

Wprowadzenie do zadania 3 (układ sferyczny)

Zadanie 3
Oblicz strumień natężenia pola grawitacyjnego przechodzący przez sferę o promieniu R (orientacja „na zewnątrz"), w środku której znajduje się punkt materialny o masie M.

Jak wyznaczyć natężenie pola grawitacyjnego lub elektrycznego, w przypadku, gdy rozkład ładunków wytwarzających to pole jest symetryczny oraz gdy ładunki znajdują się na powierzchniach ?

1. Daną powierzchnię, na której znajduje się masa lub ładunek należy otoczyć powierzchnią o symetrii kulistej, cylindrycznej lub względem płaszczyzny. Może nią być powierzchnia kuli, walca lub prostopadłościanu.
2. Otoczenia naładowanej powierzchni dokonujemy tak, aby przewidywany wektor pola był w każdym punkcie prostopadły do powierzchni z punktu 1. Przy takim wyborze kąt pomiędzy $\vec{S}$ a $\vec{E}$ będzie równy zero.
3. Stosujemy prawo Gaussa

   dla pola grawitacyjnego $\Phi = -4\pi GM$ dla pola elektrycznego $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$
4. Obliczamy wartość strumienia za pomocą wartości natężenia pola i powierzchni
$$\Phi = E \cdot S$$
5. Porównujemy 4 oraz 5

Wyjaśnijmy dokładniej punkt 1 rozwiązując poniższe zadanie.

Zadanie 4
W pustej przestrzeni znajduje się punktowe źródło o natężeniu $\vec{E}(\vec{r}) = a\frac{\vec{r}}{r^3}$, gdzie a jest pewna stałą, a $\vec{r}$ wektorem położenia o początku w źródle pola. Pokaż, że strumień natężenia pola przez zamkniętą, otaczającą źródło powierzchnię nie zależy od jej kształtu.
Wskazówka: Podziel przestrzeń na ostrosłupy o wierzchołkach w źródle pola.

Zadanie 5 (gęstość objętościowa ładunku)
Przedstaw zależność natężenia pola elektrycznego od odległości od środka kuli o promieniu R, równomiernie naładowanej dodatnim ładunkiem Q o gęstości objętościowej ρ.

Zadanie 6 (gęstość powierzchniowa ładunku)
Przedstaw zależność natężenia pola elektrycznego od odległości od środka kuli równomiernie naładowanej powierzchniowo, ładunkiem dodatnim o gęstości σ.

Zadanie 7
Dwie duże płaszczyzny umieszczono równolegle do siebie. Na jednej z nich znajduje się ładunek dodatni, a na drugiej ujemny o gęstości powierzchniowej σ. Oblicz natężenie pola elektrycznego wewnątrz i na zewnątrz płaszczyzn.

Wprowadzenie do zadania 7 (układ cylindryczny)

Zadanie 8
Znajdź natężenie pola E w walcowym wydrążeniu w jednorodnie naładowanym walcu. Gęstość ładunkowa wynosi ρ. Promienie walców to odpowiednio r_1 (duży- patzr rysunek) oraz r_2.(mały) Odległość między środkami R $(r_1 > R + r_2)$