Fizyka elementarna - materiały dla studentów. Część 5 i 6.

Przygotowanie: Piotr Nieżurawski (07.10.2008)

Literatura

Jan Blinowski, Włodzimierz Zielicz *„Fizyka i astronomia. Część 1”*: Rozdział 3 (strony 97–130).

Definicje

Wersorem związanym z wektorem $\vec{A}$ (wektor $\vec{A}$ ma długość $|\vec{A}| = A$) nazywamy wektor:

$$\hat{e}_A = \vec{A}/A$$

Oczywiste związki: $|\hat{e}_A| = 1$ oraz $\vec{A} = A\hat{e}_A$.

Wersory bazowe układu kartezjańskiego X, Y, Z:

$$\hat{e}_X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Równoważny zapis wektora:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{pmatrix} = v_X\hat{e}_X + v_Y\hat{e}_Y + v_Z\hat{e}_Z$$

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ to wektor $\vec{W}$:

$$\vec{W} = \vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\alpha\hat{e}_W \ ,$$

gdzie wersor $\hat{e}_W$ jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, gdy zaczepimy je w tym samym punkcie; zwrot wersora wyznaczamy za pomocą reguły śruby prawoskrętnej: śrubę ustawiamy prostopadle do płaszczyzny rozpiętej przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, śrubę obracamy po wybranym kącie α od wektora $\vec{A}$ do wektora $\vec{B}$, powoduje to wkręcanie w płaszczyznę lub wykręcanie śruby, zwrot wersora $\hat{e}_W$ jest zgodny z ruchem postępowym śruby.[1]

Z definicji wynika związek: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

W tzw. *prawoskrętnym układzie kartezjańskim*: $\hat{e}_Z = \hat{e}_X \times \hat{e}_Y$

Moment siły $\vec{M}$ spowodowany przez siłę $\vec{F}$ działającą na ramieniu $\vec{r}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Położenie środka masy $\vec{R}_{CM}$:

$$\vec{R}_{CM} = (\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k m_k)/(\sum_{k=1}^{N} m_k) = \int \vec{r}\, dm \,/ \int dm \ ,$$

gdzie indeks k wskazuje małe elementy, na które podzielono obiekt; masa elementu k jest równa m_k, a wektor $\vec{r}_k$ wskazuje położenie elementu k (rozmiary liniowe elementu są na tyle małe, że nieistotne jest, który punkt elementu wskazuje wektor $\vec{r}_k$).

[1] Jeśli ustalimy, że z dwóch kątów między wektorami wybieramy mniejszy (wtedy $\alpha \in [0,\ \pi]$), to $\sin\alpha \geq 0$ i zwrot iloczynu wektorowego jest zgodny ze zwrotem $\hat{e}_W$.

Pytania

1. Książka o masie 1 kg spoczywa na poziomym stole. Współczynnik tarcia statycznego książki o blat stołu wynosi $\mu = 0.5$. Jaka jest wartość siły tarcia działającej na książkę? Jaką siłą działa blat stołu na książkę?

2. Bardzo długi, jednorodny, prosty drut o stałym przekroju zawieszono za jeden z końców. W którym miejscu drut najprawdopodobniej się przerwie?

3. Dlaczego w pojazdach (np. w rowerze z przerzutką) stosuje się przekładnie biegów?

4. W jakich warunkach środek ciężkości pokrywa się ze środkiem masy dowolnego ciała? Podaj przykład układu, w którym są to dwa różne punkty.

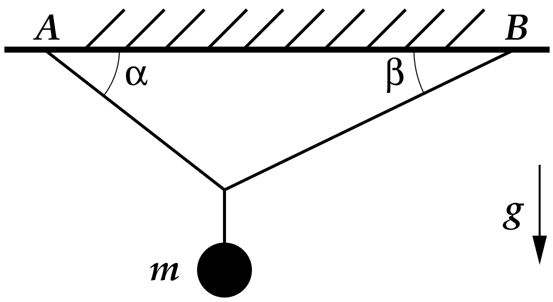
5. Do nieruchomego wagonu o masie m zbliża się z prędkością v wagon o masie m. Z jaką prędkością porusza się środek masy tych dwóch wagonów?

Zadania do rozwiązania na ćwiczeniach

Zadanie 1. Kulka o masie m została zawieszona za pomocą nieważkich, nierozciągliwych linek. Wyznacz siły – graficznie i algebraicznie – jakimi linki działają na sufit w punktach A i B w sytuacji przedstawionej na Rysunku 1. Kąty α i β oraz przyśpieszenie ziemskie g są dane.

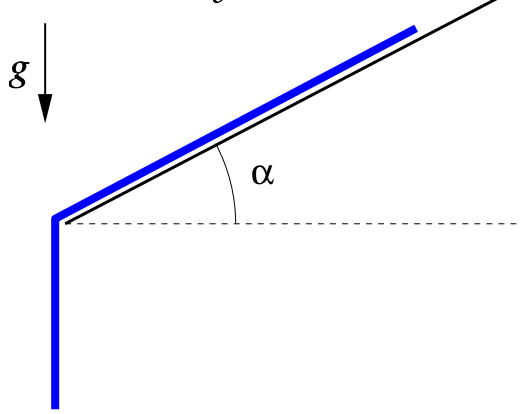
Po uzyskaniu odpowiedzi zastanów się, czy naprężoną linę rzeczywiście można rozerwać za pomocą niewielkiej, poprzecznej siły.

Rys. 1



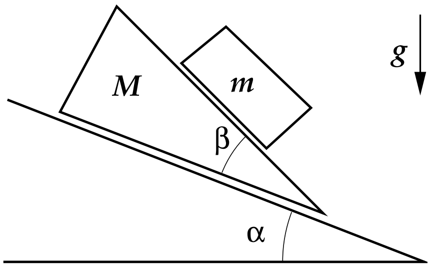
Zadanie 2. Część q elastycznej liny zwisa ze stołu, którego blat jest nachylony pod kątem α względem poziomu ($\alpha \in [0,\ \pi/2]$, Rys. 2). Część $1-q$ liny leży na blacie. Lina pozostaje w spoczynku. Co można powiedzieć o współczynniku tarcia statycznego liny o stół? Uzyskaj również wynik liczbowy, jeśli $q = 0,4$. Tuż przy brzegu blatu tarcie nie występuje (tam, gdzie zagina się lina).

Rys. 2



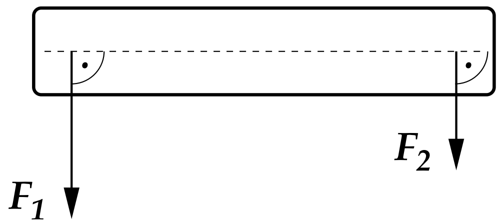
Zadanie 3. Na równi pochyłej o kącie nachylenia α postawiono równię o masie M i kącie nachylenia β (Rys. 3). Na równię o masie M położono odważnik o masie m. Konstrukcja jest stabilna. Ile wynoszą współczynniki tarcia statycznego między poszczególnymi elementami? Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $\alpha = 30°$ oraz $\beta = 15°$.

Rys. 3



Zadanie 4. Na bryłę sztywną działają dwie równoległe siły $\vec{F}_1$ oraz $\vec{F}_2$ (Rys. 4). Skonstruuj geometrycznie siłę równoważącą $\vec{F}_R$. Wyprowadź związek algebraiczny wiążący wartości sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ oraz odległości między prostymi ich działania a prostą działania siły równoważącej.

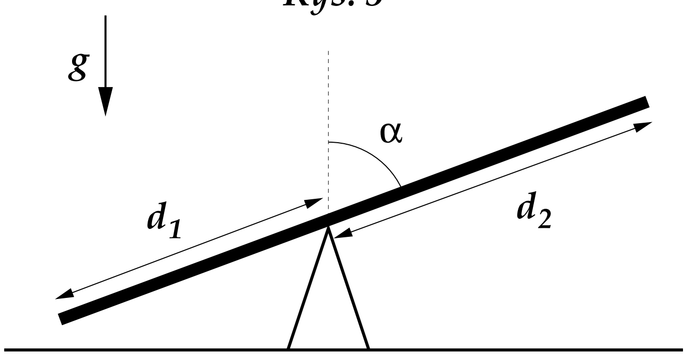
Rys. 4



Zadanie 5. Wyprowadź ogólny wzór na iloczyn wektorowy dwóch wektorów, posługując się składowymi tych wektorów w trójwymiarowym układzie kartezjańskim i korzystając z rozdzielności iloczynu względem dodawania wektorów:
$\vec{A} \times \vec{B} = (A_X\hat{e}_X + A_Y\hat{e}_Y + A_Z\hat{e}_Z) \times (B_X\hat{e}_X + B_Y\hat{e}_Y + B_Z\hat{e}_Z) = \ldots$
Wynik przedstaw w najprostszej postaci, obliczając iloczyny wersorów, $\hat{e}_i \times \hat{e}_j$, na podstawie geometrycznej definicji iloczynu wektorowego.
Oblicz moment siły, jeśli ramię siły w pewnym układzie kartezjańskim jest równe $\vec{r} = [1,\, 4,\, 0]$ m, a siła jest równa $\vec{F} = [-5,\, -2,\, 0]$ N.

Zadanie 6. Na bardzo lekkiej huśtawce, tworzącej z pionem kąt α (Rys. 5) siedzi dwoje dzieci. Dziecko o masie m_1 siedzi w odległości d_1 od punktu podparcia huśtawki, a dziecko o masie m_2 w odległości d_2.
a) Wyznacz sumę momentów sił działających na huśtawkę względem punktu jej podparcia.
b) Jaka powinna być wartość m_2, aby huśtawka się nie poruszała, jeśli $m_1 = 30$ kg, $d_1 = 2$ m oraz $d_2 = 1.5$ m?

Rys. 5



Zadanie 7. Środki trzech jednorodnych kul znajdują się na jednej prostej. Środek kuli o masie m_B znajduje się w odległości d_A od środka skrajnej kuli o masie m_A oraz w odległości d_C od środka skrajnej kuli o masie m_C. Oblicz odległość środka masy tych trzech kul od środka kuli o masie m_A. Uzyskaj również wynik liczbowy, jeśli $m_A = 4$ kg, $m_B = 1$ kg, $m_C = 2$ kg, $d_A = 1$ m oraz $d_C = 2$ m.

Zadanie 8. W ołowianej kuli o promieniu $a = 20$ cm znajduje się kuliste wydrążenie o promieniu $b = 3$ cm. Odległość między środkiem kuli a środkiem wydrążenia wynosi $d = 10$ cm. Znajdź położenie środka masy tej bryły.

Zadanie 9. Wierzchołki wyciętego z jednorodnej płyty trójkąta mają w pewnym układzie kartezjańskim współrzędne: $(0,\ 0)$; $(x_2,\ 0)$ oraz $(0,\ y_3)$. Wyznacz równania środkowych oraz położenie środka masy tej figury.