Dodatki matematyczne

Pojęcie pola:

Pole pewnej wielkości fizycznej A:

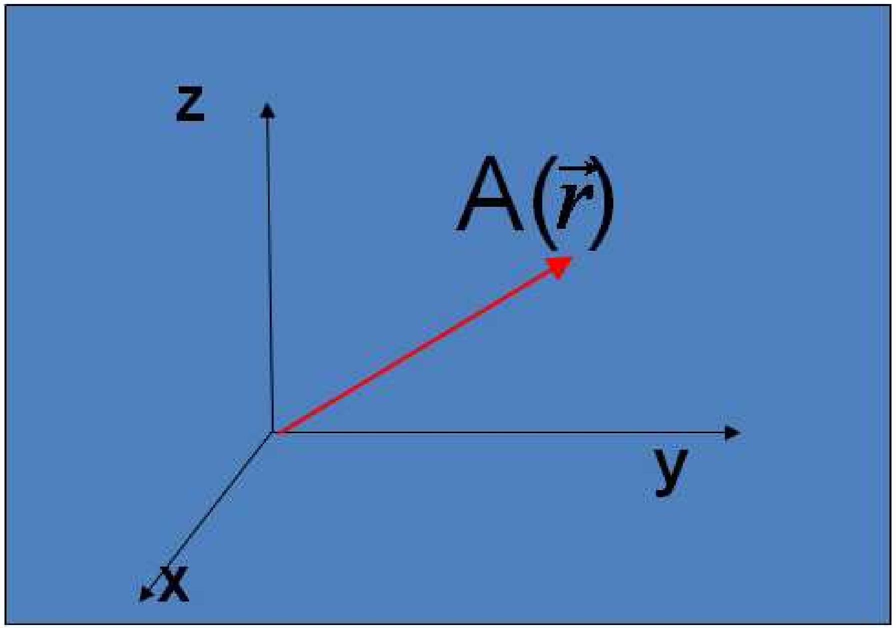
Obszar przestrzeni, dla którego w każdym punkcie ta wielkość fizyczna jest określona.

Dodatki matematyczne

Pojęcie pola:

Pole pewnej wielkości fizycznej A:

Obszar przestrzeni, dla którego w każdym punkcie ta wielkość fizyczna jest określona.



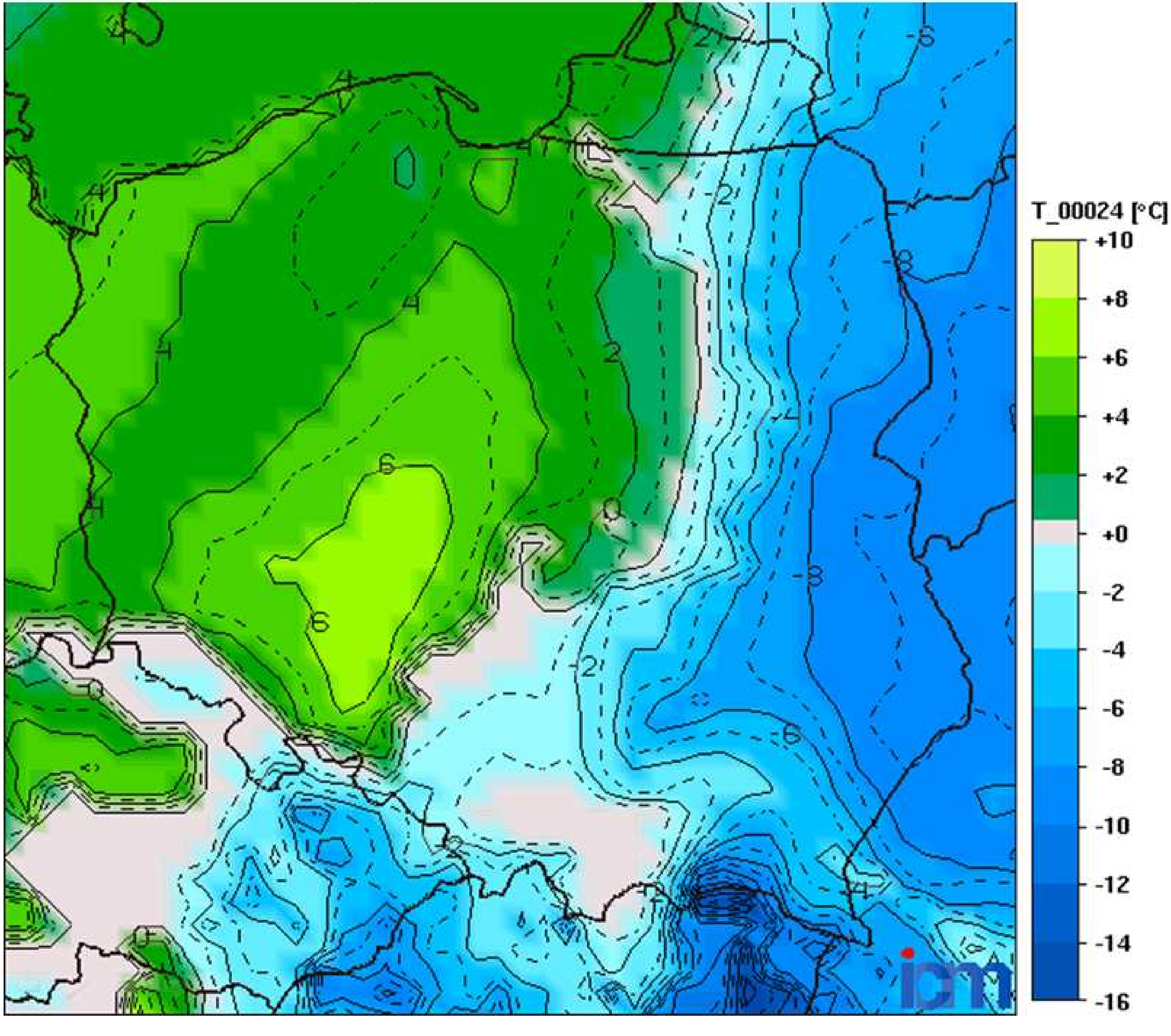
1. Pole skalarne

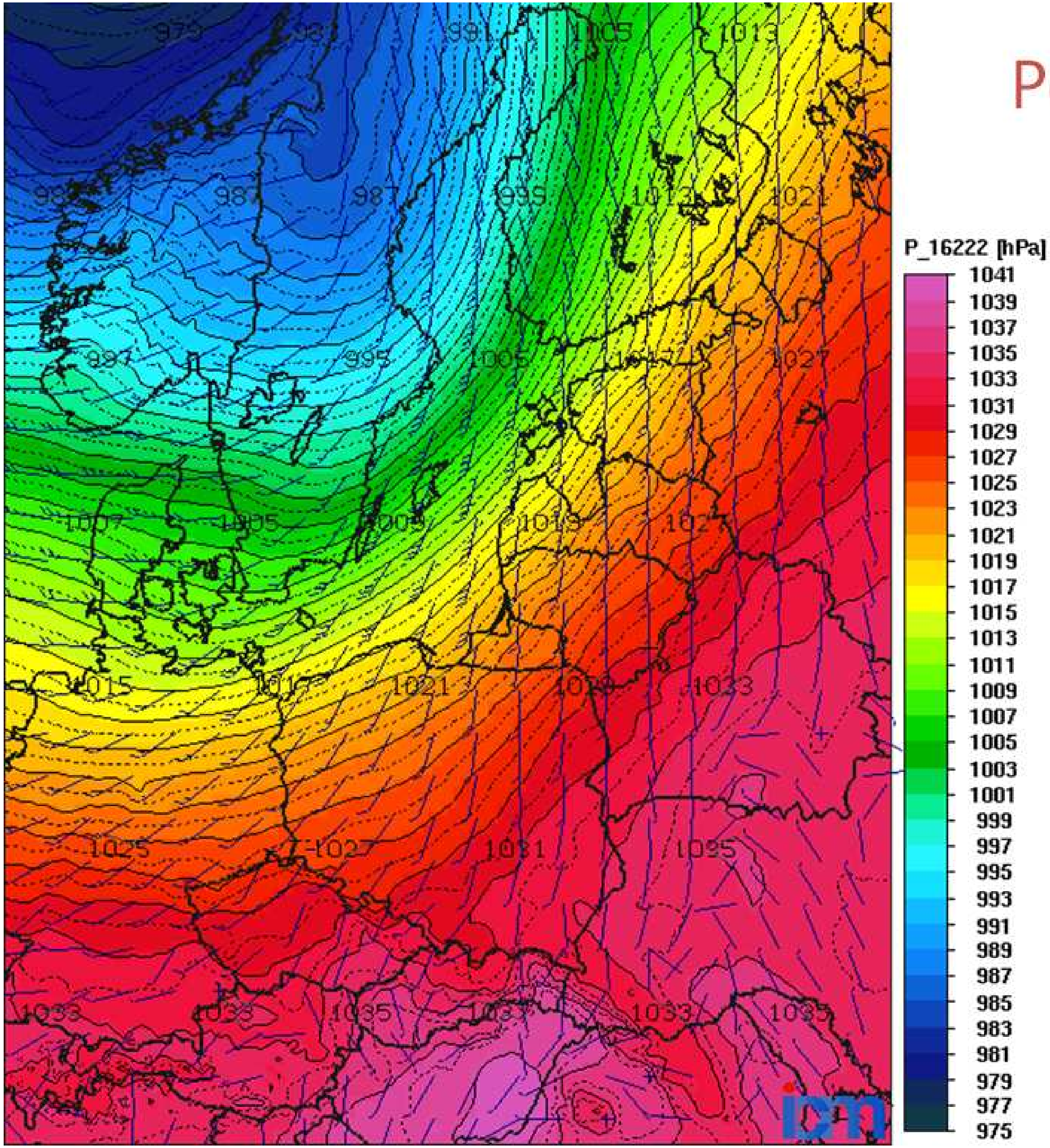
$$A(\vec{r}\,)$$

Funkcja wielu zmiennych:

$$A(\vec{r}\,) = A(x, y, z)$$

Pole temperatury T($\vec{r}$)





Pole ciśnienia

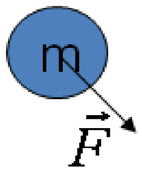
$$p(\vec{r})$$

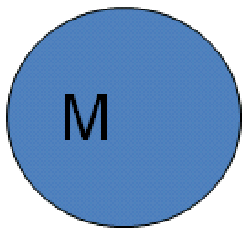
2. Pole wektorowe:

Pole wielkości wektorowej $\vec{A}(\vec{r})$

Na przykład:

Pole sił działających na masę m w przestrzeni wokół masy M





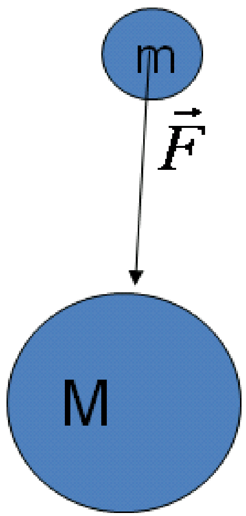
$$\vec{F}(\vec{r})$$

2. Pole wektorowe:

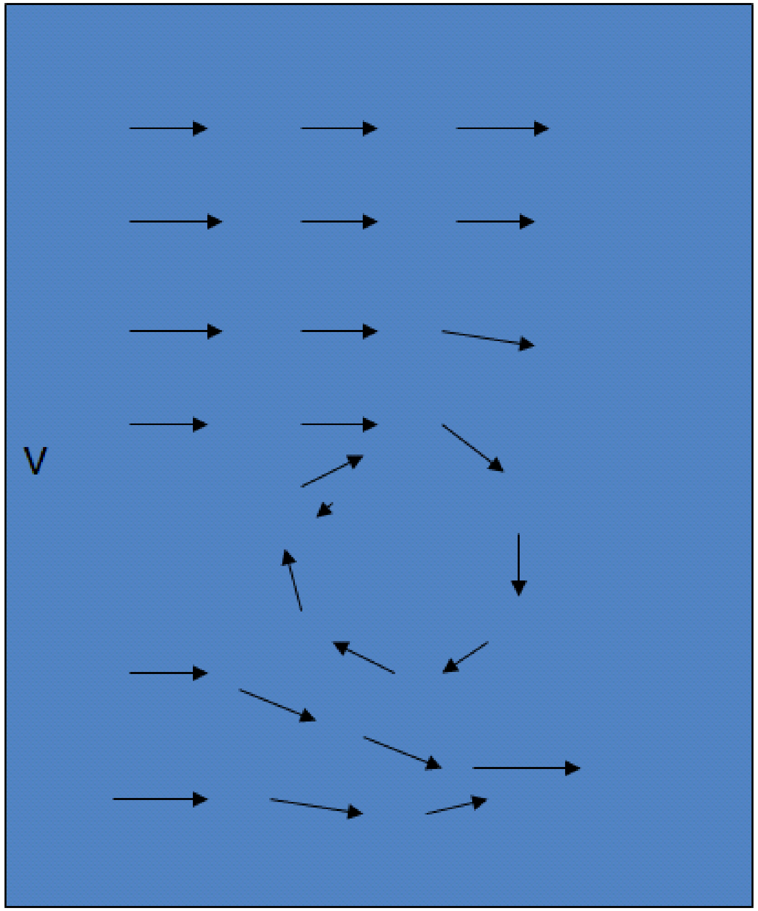
Pole wielkości wektorowej $\boxed{\vec{A}(\vec{r})}$

Na przykład:

Pole sił działających na masę m w przestrzeni wokół masy M



$$\boxed{\vec{F}(\vec{r})}$$



Pole prędkości płynącej cieczy

$$\vec{v}(\vec{r})$$

(wiry za mostem)

Operator NABLA $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Jest to operator wektorowy,
„tworzący” WEKTOR

Gradient:

$$\vec{\nabla} f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = grad f$$

Dywergencja

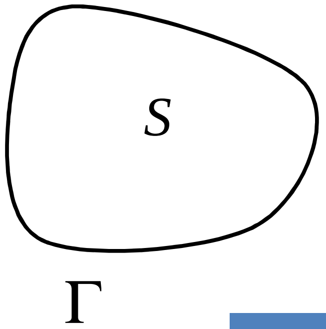
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{h} \equiv \partial h_x / \partial x + \partial h_y / \partial y + \partial h_z / \partial z$$

$$\equiv div \vec{h}$$

Rotacja

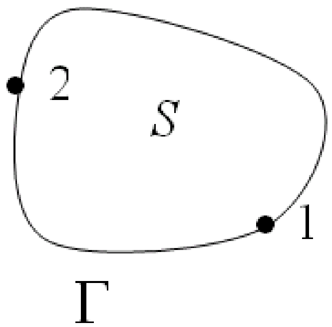
$$\vec{\nabla} \times \vec{h} \equiv rot \vec{h}$$

Twierdzenie Stokesa



$$\oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{s} = \int_{S} \left(\vec{\nabla} \times \vec{C} \right) \cdot \vec{n}\, da$$

Wnioski z twierdzenia Stokesa



$$\vee\,\Phi :: \quad \vec{C} = \vec{\nabla}\,\Phi \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\Gamma} \vec{C}\cdot d\vec{s} = 0$$

Γ można wybrać dowolne,

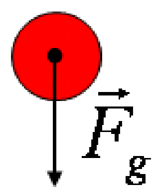
$$\vec{C} = \vec{\nabla}\,\Phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\,\Phi\right) \equiv 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{C}\cdot d\vec{s} = \int_{S} \left(\vec{\nabla}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{n}\,da = 0$$

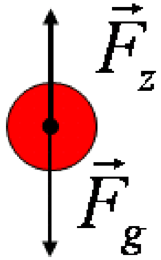
$$\Phi(2) - \Phi(1) = \int_{1}^{2} \vec{C}\cdot d\vec{s}$$

pole potencjalne

Praca w polu grawitacyjnym



Praca w polu grawitacyjnym



$$dW = \vec{F}_z \cdot d\vec{s} = -\vec{F}_g \cdot d\vec{s}$$

$$W = -\int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_p \cdot d\vec{s}$$

$$\Delta E_p = -\int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{s}$$

$$dE_p = -F_{gx}dx - F_{gy}dy - F_{gz}dz$$

$$F_{gx} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

$$F_{gy} = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$F_{gz} = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{F}_g = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)$$

$$\vec{F}_g(\vec{r}) = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r})$$

Przykład:

$$E_p = \boldsymbol{mgz}$$

$$\vec{F}_g = (0,0,-\boldsymbol{mg})$$