

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Marcin Jarzyna

Nr albumu: 249706

Realistyczna estymacja fazy przy użyciu stanów ściśniętych

Praca magisterska
na kierunku FIZYKA
w zakresie FIZYKI TEORETYCZNEJ

Praca wykonana pod kierunkiem
dr Rafała Demkowicza-Dobrzańskiego,
z Katedry Optyki Kwantowej i Fizyki Atomowej
Instytutu Fizyki Teoretycznej

Warszawa, sierpień 2011

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca magisterska została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora pracy

Streszczenie

W pracy przedstawiłem ograniczenie na najlepszą precyzję pomiaru różnicy przesunięć fazowych w interferometrze Macha-Zehndera ze stratami przy użyciu stanów ściśniętego i koherentnego. Rozważyłem zarówno sytuację, w której pomiar dokonywany jest dzięki zliczaniu fotonów na wyjściu układu, jak i w ogólnym przypadku, bez ograniczania się do konkretnego pomiaru. Otrzymałem skalowanie Heisenberga w przypadku gdy straty są nieobecne oraz skalowanie na poziomie szumu śrutowego w przeciwnym przypadku. Okazało się, że należy uwzględnić fakt iż opóźnienie fazowe określone jest względem pewnego odniesienia, co wobec możliwości istnienia przesunięć fazowych w obu ramionach układu skutkuje koniecznością traktowania problemu jako estymacji dwuparametrowej i uwzględnienia dodatkowej wiązki odniesienia.

Słowa kluczowe

estymacja, interferometria, stan ściśnięty, wiązka odniesienia, metrologia kwantowa, interferometr Macha-Zehndera

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.2 Fizyka

Tytuł pracy w języku angielskim

Realistic phase estimation using squeezed states

Podziękowania

Na wstępie chciałbym podziękować dr Rafałowi Demkowiczowi-Dobrzańskiemu, pod którego opieką napisałem tę pracę. Nie doszedłbym do poniższych rezultatów, gdyby nie liczne dyskusje i uwagi udzielane mi przez niego. Podziękowania należą się też dr hab. Konradowi Banaszkowi, który wprowadził mnie w podstawy optyki kwantowej i sprawił że zainteresowałem się tematem tej pracy. Ponadto chciałbym podziękować wszystkim tym, którzy nauczali mnie mechaniki kwantowej i różnych jej zastosowań a także moim znajomym i rodzinie, którzy mobilizowali mnie do pisania.

Spis treści

1	Wstęp	4
2	Teoria estymacji i kwantowa natura światła	6
2.1	Ogólne definicje	7
2.2	Estymacja jednoparametrowa	7
2.3	Estymacja wieloparametrowa	9
2.4	Pomiary z użyciem światła	10
2.5	Stany koherentne i ściśnięte - wprowadzenie	12
2.6	Estymacja kwantowa	17
3	Optymalna precyzja przy użyciu zliczania fotonów	21
3.1	Rezultaty obliczeń	21
3.2	Rezultaty numeryczne	25
3.3	Procedura dopasowywania faz do czynników o różnej całkowitej liczbie fotonów	29
3.4	Porównanie wyników	31
3.5	Porównanie ze strategią optymalną	36
3.6	Podsumowanie	36
4	Optymalna precyzja w ogólnym przypadku	38
4.1	Kwantowa informacja Fischera	38
4.1.1	Przypadek z fazą w jednym ramieniu	39
4.1.2	Przypadek z równomiernie rozdzieloną fazą	43
4.2	Przypadek dwóch różnych faz w ramionach	44
4.2.1	Uśrednienie po fazie	48
4.2.2	Przykład: Splątany stan koherentny na wejściu układu	51
4.3	Podsumowanie	54
5	Precyzja w obecności dodatkowego modu odniesienia	55
5.1	Jeden mod sygnałowy	55
5.1.1	Bez wiązki odniesienia	56
5.1.2	W obecności wiązki odniesienia	57
5.1.3	Przypadek graniczny $ \alpha ^2 \rightarrow 0$	59

5.1.4	Przypadek graniczny $ \alpha ^2 \rightarrow \infty$	59
5.1.5	Ogólny stan mieszany na wejściu	60
5.2	Dwa mody sygnałowe	63
5.2.1	Bez wiązki odniesienia	64
5.2.2	W obecności wiązki odniesienia	65
5.2.3	Przypadek graniczny $ \alpha ^2 \rightarrow 0$	68
5.2.4	Przypadek graniczny $ \alpha ^2 \rightarrow \infty$	69
5.2.5	Przykład: superpozycja stanów o różnych liczbach fotonów	70
5.3	Przykład: stan ściśnięty i koherentny na wejściu interferometru Macha-Zehndera	72
5.4	Podsumowanie	77
6	Zakończenie	79
	Bibliografia	81

Rozdział 1

Wstęp

Pomiar opóźnienia fazowego jest jedną z najważniejszych metod wykorzystywanych w badaniach różnych zjawisk fizycznych. Nie dziwi więc fakt długotrwałych poszukiwań procedur mających na celu uzyskanie jak najlepszej precyzji takich pomiarów. Mimo to, przez długi czas najlepsza możliwa do uzyskania precyzja osiągała tzw. Standard Quantum Limit (SQL) czyli granicę zwykłego szumu śrutowego, możliwą do uzyskania nawet przy użyciu zasobów wyłącznie klasycznych i przewidywaną również przez teorię półklasyczną. Przełom nastąpił w latach 80. wraz z pracą Cavesa [1], w której wykorzystał on światło ściśnięte do detekcji małych przesunięć jednego z ramion w interferometrze Michelsona, co miało ulepszyć precyzję pomiaru fal grawitacyjnych. Dzięki temu po raz pierwszy pojawił się rezultat teoretyczny przekraczający SQL. W kolejnych latach pojawiały się kolejne rezultaty dające precyzję przewyższającą granicę szumu śrutowego, uzyskano także nową, nieprzekraczalną granicę, wynikającą z mechaniki kwantowej. Granica ta, zwana granicą Heisenberga (Heisenberg Limit), daje najlepsze możliwe do uzyskania skalowanie precyzji fazy wraz ze wzrostem średniej liczby fotonów użytych do pomiaru.

Spośród wielu układów wykorzystywanych do mierzenia fazy, na szczególną uwagę zasługuje interferometr Macha-Zehndera. Jest to jeden z podstawowych układów, znajdujący zastosowanie w wielu dziedzinach, począwszy od badań fizycznych, a skończywszy na renowacji dzieł sztuki. Pojawiło się zatem pytanie o najlepszą możliwą precyzję pomiaru, którą można w takim układzie uzyskać. Kolejnym problemem, który należało rozwiązać, aby uzyskać bardziej realistyczne wyniki, było uwzględnienie strat, które są nieuniknione w eksperymentach. Szczególnie obiecujące wydaje się użycie światła w stanie koherentnym (klasycznego) oraz niewielkiej domieszki światła w stanie ściśniętym, gdyż jest to obecnie najłatwiejszy do generacji stan nieklasyczny.

Kolejnym pytaniem, na które należy odpowiedzieć, jest uwzględnienie dodatkowych modów odniesienia, na które przesunięcie fazy nie wpływa, ale z których możemy korzystać w procedurze pomiarowej. Obecność takiego dodatkowego modu odniesienia może zasadniczo zmienić możliwą do uzyskania precyzję, o czym należy pamiętać, rozważając konkretne układy. Szczególnie ważne są tu dwa przypadki. Pierwszy: gdy nie mamy dodatkowej wiązki odniesienia, używamy wówczas tylko wiązek sygnałowych do pomiaru. Drugim zaś ważnym przypadkiem jest sytuacja w której mamy do dyspozycji klasyczny

mod odniesienia, czyli wiązkę o nieskończonej liczbie cząstek.

W mojej pracy postarałem się odpowiedzieć na powyższe pytania. W rozdziale drugim podałem wprowadzenie do teorii estymacji oraz krótki wstęp historyczny dotyczący pomiarów z użyciem światła. Szczególną uwagę zwróciłem na problem estymacji wieloparametrowej, który należy uwzględnić przy rozważaniu najogólniejszych pomiarów kwantowych w układach takich jak interferometr Macha-Zehndera, a który bywa pomijany w literaturze na ten temat. W rozdziale trzecim podałem rezultaty obliczeń dotyczące optymalnej precyzji pomiaru opóźnienia fazowego w interferometrze Macha-Zehndera w obecności start za pomocą zliczania liczby fotonów i przy wykorzystaniu światła w stanie koherentnym z niewielką domieszką światła w stanie ściśniętym. Rozdział czwarty poświęciłem na omówienie najlepszej możliwej precyzji przy użyciu wyżej wymienionych stanów i w tym samym układzie, jednak bez więzu ograniczającego możliwe pomiary do zliczania fotonów. Szczególną uwagę poświęciłem wykazaniu różnic, jakie pojawiają się w obliczeniach teoretycznych, jeśli nie uwzględni się we właściwy sposób wieloparametrowości tego problemu. W rozdziale piątym przeprowadziłem rozważania dotyczące optymalnej precyzji pomiaru w obecności dodatkowego modu odniesienia w stanie koherentnym, podałem też graniczne przypadki w sytuacji, gdy taki mod jest nieobecny, bądź też gdy przechodzi do granicy klasycznej (nieskończona liczba fotonów). W ostatnim rozdziale umieściłem zakończenie i podsumowanie całej pracy.

Rozdział 2

Teoria estymacji i kwantowa natura światła

Informacje o jakichkolwiek wielkościach fizycznych jesteśmy w stanie otrzymać tylko poprzez pomiar. Czasem, aby zmierzyć jakąś skomplikowaną wielkość, konieczne jest użycie zaawansowanej aparatury eksperymentalnej, a czasami wystarczy tylko spojrzeć, np. gdy chcemy poznać kolor krzesła. Wszystkie te operacje są jednak pomiarami, w których oddziałujemy w jakiś sposób z badanym układem. Nawet gdy po prostu patrzymy na ciało, to rejestrujemy światło, które zostało przez nie odbite lub wyemitowane. Wiele wielkości podlega bezpośrednim pomiarom, np. długość stołu możemy zmierzyć przy użyciu miarki, niektóre jednak, bardziej skomplikowane, trzeba mierzyć w sposób pośredni. Dokonujemy wówczas pomiaru jakiejś innej wielkości zależnej od badanej i na jej podstawie wnioskujemy o jej wartości. Taką procedurę nazywamy właśnie estymacją parametru, gdzie jako parametr traktujemy szukaną przez nas wielkość. Oczywiście, jak w każdej procedurze eksperymentalnej, także i tutaj otrzymany przez nas wynik będzie obciążony pewną niepewnością. W tym jednak przypadku zależy ona nie tylko od użytej aparatury, ale również od sposobu, w jaki wnioskujemy o wartości szukanej wielkości na podstawie wyników pomiarów.

Podstawowym celem estymacji jest znalezienie jak najlepszego oszacowania na wartość poszukiwanego parametru. Oznacza to, że chcemy poznać, w jaki sposób z wyników pomiarów skonstruować wielkość najlepiej przybliżającą parametr. Taki sposób nazywamy estymatorem i jest on pewną funkcją wyników pomiarów. Oczywiście, im lepszy estymator, tym bardziej zbliżoną wartość do wartości prawdziwej parametru powinien dawać. Oznacza to także, że niepewność znajomości parametru, spowodowana przez użycie tego estymatora, powinna być jak najmniejsza.

Poniżej przedstawię krótkie wprowadzenie do klasycznej teorii estymacji, najpierw na przykładzie estymacji jednego parametru, a następnie omówię ogólny przypadek estymacji wieloparametrowej. Na końcu tego rozdziału opiszę też pokrótce historię pomiarów z użyciem światła oraz opiszę uogólnienie estymacji klasycznej na problemy kwantowe.

2.1. Ogólne definicje

Teoria estymacji zajmuje się problemem znalezienia jak najlepszego oszacowania (estymatora) na poszukiwaną wielkość. Załóżmy, że mierzymy n wielkości $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, które związane są z pewnymi parametrami $\theta_j, j = 1, 2, \dots, m$ w ten sposób, że stanowią zmienne losowe z rozkładu $p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta})$, gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$. Naszym celem jest poznanie wartości nieznanych parametrów θ_j z wyników pomiarów wielkości x_i . W tym celu tworzymy funkcje $\hat{\theta}_j(\mathbf{x})$ zwane estymatorami, które dają nam oszacowanie wartości θ_j . Estymatory, jako dowolne funkcje zmiennych x_i , dzielą się na różne klasy w zależności od swoich właściwości. Niektóre z tych klas są bardziej użyteczne niż inne, dlatego też warto wiedzieć jakie są ich cechy.

Jednym z podstawowych wymagań stawianych wobec estymatorów jest, aby oszacowanie parametru θ_j nie różniło się za bardzo od jego prawdziwej wartości. Oznacza to, że chcemy by estymator średnio dawał w wyniku wartość równą prawdziwej. Wymaganie to można zapisać w następujący sposób

$$E[\hat{\theta}_j] = \theta_j, \quad (2.1)$$

gdzie θ_j oznacza prawdziwą wartość estymowanego parametru. Estymatory spełniające warunek (2.1) nazywamy nieobciążonymi i dalej będziemy zajmować się tylko i wyłącznie nimi.

Nałożenie warunku nieobciążenia na estymatory nadal daje całkiem dużą dozę swobody w ich wyborze. Chcielibyśmy jednak, aby nasz estymator był jak najlepszy, co oznacza w tym wypadku, że jego wariancja powinna być jak najmniejsza, gdyż wtedy będziemy znali prawdziwą wartość parametru z najmniejszą niepewnością.

2.2. Estymacja jednoparametrowa

W celu ułatwienia wprowadzenia, a także dlatego, że jest to jeden z najczęściej rozważanych przypadków, zajmijmy się najpierw estymacją jednego parametru. Oznacza to, że mierzymy n wielkości $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ związanych z parametrem θ , którego wartość pozostaje nieznaną. Chcielibyśmy teraz wybrać estymator $\hat{\theta}(\mathbf{x})$, który da nam najlepsze oszacowanie na θ . Naszym celem jest więc znalezienie takiego estymatora, by $\Delta\hat{\theta}$ było jak najmniejsze. Jeśli posiadamy jakiś estymator będący funkcją mierzonych wielkości, to w celu wyznaczenia wariancji oszacowania szukanego parametru wystarczy posłużyć się liniową propagacją błędów. W przypadku, gdy mierzymy tylko jedną wielkość wariancja estymatora jest dana wzorem:

$$(\Delta\hat{\theta})^2 = \left(\frac{d\hat{\theta}}{dx}\Delta x\right)^2 \quad (2.2)$$

Jeśli mierzymy więcej niż jedną wielkość i na ich podstawie dokonujemy estymacji parametru θ to wówczas musimy zastosować uogólnienie powyższego wzoru:

$$(\Delta\hat{\theta})^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial\hat{\theta}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \text{cov}[x_i, x_j] \frac{\partial\hat{\theta}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \quad (2.3)$$

gdzie $\text{cov}[x_i, x_j] = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$ oznacza kowariancję zmiennych x_i i x_j .

Powyższe równania pozwalają na wyznaczenie dokładności estymacji przy zadanym estymatorze, nie mówią jednak nic o optymalnym przypadku. Chcielibyśmy więc zoptymalizować (zminimalizować) $\Delta\theta$ po różnych estymatorach, aby znaleźć najlepszy estymator. W ogólności jest to trudne zadanie, można jednak zadowolić się czymś nieco łatwiejszym. Możemy się bowiem zastanowić, jaka jest najmniejsza możliwa do uzyskania wariancja estymatora bez względu na estymator. Prościej mówiąc, chcielibyśmy uzyskać ograniczenie dolne na $\Delta\hat{\theta}$ obowiązujące dla wszystkich estymatorów nieobciążonych. Zadanie to nie wygląda na łatwe, mimo to jest wykonalne. Wprowadźmy następującą wielkość, zwaną klasyczną informacją Fischera (zakładamy przy tym, że $p(\mathbf{x}|\theta)$ są wszędzie różniczkowalne):

$$F(\theta) = \sum_{\mathbf{x}} \frac{1}{p(\mathbf{x}|\theta)} \left(\frac{dp(\mathbf{x}|\theta)}{d\theta} \right)^2. \quad (2.4)$$

Informacja Fischera jest w ogólności wielkością zależną od θ i daje pewną miarę zmienności rozkładu $p(\mathbf{x}|\theta)$. Dla estymatorów nieobciążonych zachodzi nierówność Cramera-Rao:

$$\Delta\hat{\theta} \geq \frac{1}{\sqrt{F}}. \quad (2.5)$$

Dla dowodu tej nierówności wystarczy rozważyć wielkości $A_{\mathbf{x}} = \hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta$ i $B_{\mathbf{x}} = \frac{1}{p(\mathbf{x}|\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} p(\mathbf{x}|\theta)$ i skorzystać z nierówności Schwarz'a:

$$\left(\sum_{\mathbf{x}} A_{\mathbf{x}}^2 p(\mathbf{x}|\theta) \right) \left(\sum_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}}^2 p(\mathbf{x}|\theta) \right) \geq \left(\sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}|\theta) A_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}} \right)^2. \quad (2.6)$$

Ponieważ nasz estymator jest nieobciążony, zachodzi $\sum_{\mathbf{x}} A_{\mathbf{x}}^2 p(\mathbf{x}|\theta) = (\Delta\hat{\theta}(\mathbf{x}))^2$ i $\sum_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}}^2 p(\mathbf{x}|\theta) = F(\theta)$, zatem dostajemy, że

$$(\Delta\hat{\theta}(\mathbf{x}))^2 F(\theta) \geq \sum_{\mathbf{x}} (\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} p(\mathbf{x}|\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{\mathbf{x}} \hat{\theta}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}|\theta) \right) - \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}|\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \theta = 1. \quad (2.7)$$

Z racji, że informacja Fischera daje najmniejszą możliwą wariancję ze wszystkich estymatorów, dalej będziemy używać oznaczenia $\Delta\theta$ i nazywać tę wielkość precyzją pomiaru parametru θ .

Kwestią wartą uwagi jest problem osiągnięcia granicy danej przez informację Fischera, tzn. znalezienia estymatora dla którego jest ona osiągnięta. Okazuje się, że jeśli będziemy powtarzać eksperyment k razy (tzn. robimy k razy ten sam zestaw pomiarów), to w granicy $k \rightarrow \infty$ możemy podać estymator tzw. maximum likelihood, który daje precyzję pomiaru parametru równą $\Delta\theta = \frac{1}{\sqrt{kF}}$. Oznacza to, że dokładność estymacji dana poprzez informację Fischera, jest osiągnięta asymptotycznie, dla bardzo dużej liczby powtórzeń eksperymentu.

Jak już było napisane wcześniej, informacja Fischera jest zależna od prawdziwej wartości estymowanego parametru. Oznacza to, że jest ona wielkością lokalną, tzn. daje w efekcie precyzję pomiaru parametru, jeśli jesteśmy już dostatecznie blisko jego prawdziwej

wartości. Oszacowanie na precyzję, dane równaniem (2.5), będzie możliwe do osiągnięcia tylko wtedy, gdy początkową część pomiarów przeznaczymy na zbliżenie się wartości estymowanego parametru do wartości prawdziwej, a następnie, posiadając już tę informację, użyjemy na pozostałej reszcie wyników optymalnego estymatora do precyzyjnego wyznaczenia wartości estymowanego parametru [15].

2.3. Estymacja wieloparametrowa

W ogólnym przypadku możemy dokonywać estymacji wielu nieznanymi parametrów θ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ na podstawie pomiarów innych wielkości x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Mamy wówczas do czynienia z różnymi estymatorami, na które chcielibyśmy nałożyć podobne warunki co poprzednio. W szczególności chcielibyśmy, by wariancja każdego z estymatorów była jak najmniejsza. Tak samo jak w poprzedniej sekcji, znalezienie zespołu optymalnych estymatorów jest zadaniem trudnym, da się jednak uzyskać odpowiednik nierówności Cramera-Rao, czyli uzyskać ograniczenie dolne na wariancję obowiązujące dla wszystkich estymatorów nieobciążonych.

Definiujemy macierz informacji Fischera w następujący sposób:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1m} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mm} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

gdzie $F_{ij} = \sum_{\mathbf{x}} \frac{1}{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = F_{ji}$. Korzystając z macierzy (2.8), możemy zapisać uogólnienie nierówności Cramera-Rao na przypadek estymacji wieloparametrowej:

$$\Delta \theta_i \geq \sqrt{(\mathcal{F}^{-1})_{ii}}. \quad (2.9)$$

Dowód powyższego wzoru można znaleźć w [16]. Z postaci nierówności (2.9) wynika, że w ogólności musimy uwzględnić całą macierz Fischera, bo jest to konieczne, by znaleźć macierz odwrotną występującą w nierówności Cramera-Rao.

Podobnie jak w przypadku estymacji jednego parametru, także tutaj precyzja, dana równaniem (2.9) jest osiągana w granicy bardzo dużej liczby powtórzeń eksperymentu. W sytuacji tej możemy bowiem skonstruować estymator maximum likelihood. Kolejną rzeczą wartą uwagi jest fakt, że F_{ij} są w ogólności funkcjami prawdziwych wartości parametrów $\boldsymbol{\theta}$. Oznacza to, że również w tym przypadku precyzja każdego z parametrów jest dana tylko lokalnie, czyli musimy w jakiś sposób wiedzieć wcześniej w pobliżu jakiej wartości przeprowadzamy estymację (na przykład dokonując kilku pierwszych pomiarów po to, by zbliżyć się do wartości prawdziwej).

Szczególnym przypadkiem estymacji wieloparametrowej jest estymacja dwóch parametrów, którą będziemy rozważać w dalszej części pracy. Dla tej sytuacji macierz informacji Fischera ma następującą postać:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Stąd możemy znaleźć optymalną precyzję pomiaru parametrów θ_1 i θ_2 , otrzymując zgodnie z wzorem (2.9)

$$\Delta\theta_1 = \sqrt{\frac{F_{22}}{F_{22}F_{11} - F_{12}^2}}, \quad (2.11)$$

$$\Delta\theta_2 = \sqrt{\frac{F_{11}}{F_{22}F_{11} - F_{12}^2}}. \quad (2.12)$$

Więcej informacji na temat estymacji parametrów można znaleźć w wielu książkach, np w [16] lub [17].

2.4. Pomiary z użyciem światła

Historia pomiarów z użyciem światła sięga najdawniejszych czasów. Można wręcz powiedzieć, że większość eksperymentów z wczesnego okresu fizyki wykorzystywała światło, gdyż polegały one na wzrokowej obserwacji pewnych zjawisk. Pomijając jednak ten aspekt, badania i rozważania dotyczące samego światła prowadzono już od starożytności. W epoce renesansu pojawiły się dwie konkurencyjne idee dotyczące natury światła, mianowicie idea korpuskularna zakładająca, że światło złożone jest z cząstek, oraz teoria głosząca, że światło jest falą. Rozstrzygnięcie, która z tych teorii jest prawdziwa, nastąpiło znacznie później, bo dopiero na początku XIX wieku, a dokonał go Thomas Young, rozważając interferencję dwóch wiązek światła. Otrzymanego wzoru interferencyjnego nie dało się łatwo wyjaśnić za pomocą teorii korpuskularnej, natomiast teoria falowa tłumaczyła to zjawisko w sposób naturalny.

W XIX wieku nastąpił dalszy rozwój wiedzy o świetle; odkryto, że jest ono tak naprawdę promieniowaniem elektromagnetycznym, dzięki czemu udało się je połączyć z pozostałą częścią fizyki klasycznej. Pomimo tych niewątpliwych sukcesów, na początku XX wieku okazało się, że obowiązujące teorie trzeba zmienić. Za sprawą zmian w teorii, które były konieczne, aby dobrze opisać zjawiska takie jak promieniowanie ciała doskonale czarnego lub efekt fotoelektryczny, pojawiło się w fizyce pojęcie fotonu, czyli swoistej „cząstki światła”. Szybki rozwój mechaniki kwantowej sprawił, że w krótkim czasie udało się teoretycznie opisać sposób oddziaływania światła z materią, a w efekcie odkryć wiele nowych zjawisk. Dzięki pracom Glaubera, w latach 60. pojawiła się kwantowa teoria spójności światła, przewidująca nowe zjawiska, takie jak antygrupowanie fotonów. W ciągu następnych lat przewidziano i potwierdzono doświadczalnie wiele efektów będących odzwierciedleniem kwantowej natury światła. Udało się także wykorzystać te zjawiska do badań innych przewidywań mechaniki kwantowej w różnych dziedzinach fizyki, jak również poza nią.

Oczywiście, wraz z rozwojem wiedzy o naturze światła i związanych z tym efektów, rozwijały się rozmaite metody eksperymentalne wykorzystujące światło do badania innych zjawisk. Należy tu wymienić przede wszystkim powstałą na początku XIX wieku spektroskopię. Dzięki niej udało się zbadać skład atmosfery Słońca (co przez wieki było przytaczane jako przykład wiedzy dla człowieka nieosiągalnej) i odkryć nowy pierwiastek

- hel. Głównym jednak osiągnięciem było wykazanie, że każdemu pierwiastkowi odpowiada pewne charakterystyczne widmo, ujawniające się pod postacią linii spektralnych. Dzięki temu odkryciu stało się możliwe badanie - przy wykorzystaniu światła - składu rozmaitych związków chemicznych.

Dzięki znajomości i podstawom teoretycznym zjawiska interferencji rozwinęła się także interferometria. Pozwalała ona początkowo na dokładne pomiary długości i precyzyjną metrologię. Chyba najslawniejszym doświadczeniem wykorzystującym interferometr był eksperyment Michelsona-Morleya z 1887 roku. Doświadczenie to wykazało, iż Ziemia nie porusza się względem eteru, będącego hipotetycznym ośrodkiem, w którym rozchodzą się fale elektromagnetyczne. Stało się to podstawą do stworzenia teorii względności. Wraz z rozwojem fizyki badano przy użyciu interferometrii coraz to nowe zjawiska dające w efekcie różnicę faz wiązek w interferometrze. Tworzono także nowe interferometry takie jak - obecnie jeden z najczęściej stosowanych - interferometr Macha-Zehndera, czy interferometr Sagnaca.

Wynalezienie lasera w 1960 roku oznaczało prawdziwy przełom nie tylko w optyce, ale też w wielu innych dziedzinach fizyki. Wynalazek ten umożliwił bowiem dostęp do tanich i łatwych w konstrukcji źródeł monochromatycznego światła o bardzo dużej spójności. Dzięki temu możliwe było zwiększenie dokładności pomiarów oraz obserwacja wielu nowych zjawisk takich jak np. parametryczny podział częstości, czy też różne efekty optyki nieliniowej. Lasery stały się w krótki czasie bardzo popularnymi urządzeniami, wykorzystywanymi obecnie niemal wszędzie, od skomplikowanych procesów przemysłowych, poprzez komputery, konserwację dzieł sztuki, medycynę, aż po wskaźniki do tablicy.

Od lat 60. datuje się gwałtowny rozwój optyki kwantowej, zajmującej się badaniem kwantowej natury światła. Zastosowanie coraz doskonalszych laserów i innych nowoczesnych technologii, pozwoliło na generację zupełnie nowych stanów światła o niespotykanych wcześniej właściwościach, takich jak np. stany ściśnięte lub stany splątane. Pozwoliło to na badanie czysto kwantowych własności światła (i nie tylko światła), jak splątanie czy interferencja jednofotonowa. Również przy użyciu światła dokonuje się doświadczalnych realizacji takich procesów, jak teleportacja kwantowa, czy też schematów przewidzianych przez informatykę kwantową

W tym czasie rozwijała się również interferometria. Dokładność pomiarów interferometrycznych, nawet przy wykorzystaniu laserów, była ograniczona przez tzw. szum śrutowy, co powodowało to trudności w detekcji zjawisk, których efektem były bardzo małe przesunięcia fazowe między wiązkami interferometrów. Jednym z najważniejszych, do tej pory niepotwierdzonych, zjawisk z tej klasy są przewidywane przez ogólną teorię względności (która, swoją drogą, rozwinęła się m.in. dzięki wspomnianemu wcześniej eksperymentowi Michelsona-Morleya) fale grawitacyjne. W celu ich wykrycia prowadzi się skomplikowane eksperymenty, których podstawą jest właśnie interferometria. Ponieważ ewentualne efekty powodowane przez te fale są bardzo małe, ważna jest jak największa dokładność tych pomiarów. Był to bodziec, który zapoczątkował metrologię kwantową (quantum enhanced metrology). W latach 80. Caves [1] zaproponował użycie stanów ściśniętych do zwiększenia precyzji pomiarów, co pozwoliło na pokonanie bariery szumu śrutowego. W kolejnych latach pojawiły się następne rezultaty teoretyczne, przewidujące

zwiększoną dokładność pomiarów w różnych układach i przy użyciu światła w różnych stanach kwantowych ([2–6]). W latach 90. Brauenstein i Caves [7] wyznaczyli nowe ograniczenie na precyzję, zwane granicą Heisenberga. W kolejnych latach pojawiły się różne propozycje kwantowych stanów światła osiągających tę granicę, m.in. stany NOON. Wraz z rozwojem optyki doświadczalnej możliwa stała się realizacja tych przewidywań dzięki uzyskiwaniu coraz to lepszego światła ściśniętego oraz coraz lepszych stanów splątanych. Ostatnie wyniki eksperymentalne [14] sugerują, że możliwa jest produkcja kwantowych stanów maksymalnie splątanych (stanów NOON) o dowolnie wysokiej liczbie fotonów, co pozwoliłoby na znaczne zwiększenie dokładności pomiarów interferometrycznych, jak i znalazło szereg innych zastosowań. Produkcja tych stanów odbywa się jednak przy wykorzystaniu modelu rozważanego już przez Cavesa, mianowicie mieszania stanu koherentnego i ściśniętego.

2.5. Stany koherentne i ściśnięte - wprowadzenie

W pracy będę bardzo często rozważać pewne szczególne stany światła, mianowicie stany ściśnięte i koherentne. Są one jednymi z najczęściej rozpatrywanych i stosowanych stanów światła. Poniżej podam ich podstawowe własności

Najpierw rozważmy jednomodowe stany Focka. Są to stany własne hamiltonianu swobodnego pola elektromagnetycznego $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$. Podstawową ich własnością jest dobrze ustalona liczba cząstek. Dzieje się tak, gdyż są one również stanami własnymi operatora liczby cząstek $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Dla stanów Focka zachodzi dodatkowo następująca równość:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|vac\rangle. \quad (2.13)$$

gdzie $|vac\rangle$ oznacza stan próżni, czyli stan podstawowy hamiltonianu swobodnego pola elektromagnetycznego (stan o najniższej energii).

Stany Focka tworzą bazę ortonormalną ($\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$, $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$).

Kolejną właściwością stanów Focka jest fakt, że nie niosą one żadnej informacji o fazie. Gdy stan Focka przechodzi przez przesunięcie fazowe ξ , to jest on poddawany przekształceniu $|n\rangle \rightarrow e^{in\xi}|n\rangle$, co - z racji, iż mechanika kwantowa jest niezmiennicza względem mnożenia stanów przez globalną fazę - sprawi, że stan nie ulegnie zmianie. Oczywiście, jeśli mielibyśmy do dyspozycji superpozycję stanów Focka, sytuacja mogłaby wyglądać inaczej.

Wytwarzanie stanów Focka napotyka duże trudności eksperymentalne. Przeprowadzono już doświadczenia, w których produkowane były stany $|n\rangle$ o niewielkiej liczbie fotonów, niestety nie udało się do tej pory utworzyć stanów z dużą liczbą cząstek.

Jeśli chodzi o stany koherentne, zwane też stanami spójnymi, to definiujemy je jako stany własne operatora anihilacji.

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.14)$$

gdzie α jest dowolną liczbą zespoloną. Stany koherentne można zapisać jako superpozycję

stanów Focka z odpowiednimi wagami:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.15)$$

Z powyższego równania widać, że stany koherentne posiadają poissonowską statystykę cząstek, tzn. wyniki pomiaru liczby cząstek w takim stanie mają rozkład Poissona. Oznacza to jednak, iż nie mają one dobrze ustalonej liczby cząstek. Można jednak przyjąć, w analogii do stanów Focka, że posiadają pewną średnią liczbę cząstek:

$$\langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (2.16)$$

W przeciwieństwie do stanów Focka, stany koherentne mogą nieść pewną informację o fazie. Po przejściu przez przesunięcie fazowe φ , stan koherentny przekształca się w następujący sposób:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \rightarrow e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi} \alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |e^{i\varphi} \alpha\rangle. \quad (2.17)$$

Warto zwrócić uwagę, że ta operacja nie jest po prostu mnożeniem całego stanu przez wspólną fazę. Każdy czynnik o ustalonej liczbie fotonów jest tu mnożony przez inną fazę, zatem w efekcie dostajemy istotnie inny stan wyjściowy.

Zauważmy, że aby w pełni scharakteryzować stan koherentny $|\alpha\rangle$ konieczna jest znajomość $\alpha = |\alpha|e^{i\xi}$, będącej w ogólności liczbą zespoloną. Oznacza to że musimy znać dwie wielkości: $|\alpha|$, co nie jest trudne, wystarczy bowiem w tym celu znać średnią ilość fotonów w wiązce światła, oraz fazę ξ , którą możemy zdefiniować tylko względem jakiejś innej wiązki odniesienia. Jeśli bylibyśmy pozbawieni wiązki odniesienia, to nie bylibyśmy w stanie poznać fazy stanu koherentnego i w efekcie, rozważany przez nas stan musielibyśmy po fazie uśrednić, otrzymując stan mieszany dany następującą macierzą gęstości:

$$\hat{\rho} = \int \frac{d\xi}{2\pi} |\alpha e^{i\xi}\rangle \langle \alpha e^{i\xi}| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^n}{n!} |n\rangle \langle n|. \quad (2.18)$$

To również jest stan o poissonowskiej statystyce cząstek, jednak - w przeciwieństwie do stanu koherentnego - jako zwykła mieszanina statystyczna stanów Focka, nie niesie żadnej informacji o ewentualnej fazie. Oznacza to że obecność dodatkowej wiązki odniesienia może wpływać na estymację fazy przy użyciu światła, co omówię w dalszej części pracy. Obszerniejszą dyskusję powyższego problemu można znaleźć w pracach [19–22].

Stany ściśnięte definiujemy przy użyciu operatora ściskania

$$\hat{S}(re^{i\theta}) = \exp \left[\frac{1}{2} (re^{-i\theta} \hat{a}^2 - re^{i\theta} \hat{a}^{\dagger 2}) \right]. \quad (2.19)$$

Działając operatorem danym równaniem (2.19) na stan próżni, dostajemy stan ściśniętej próżni, który dalej będziemy nazywać też po prostu stanem ściśniętym.

$$\hat{S}(re^{i\theta}) |vac\rangle = |re^{i\theta}\rangle. \quad (2.20)$$

Stan ściśniętej próżni, podobnie jak stan koherentny, można zapisać w postaci superpozycji stanów Focka:

$$|re^{i\theta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^{n/2} \frac{H_n(0)}{\sqrt{n!}} e^{in\theta/2} |n\rangle \quad (2.21)$$

gdzie $H_n(0) = \frac{(-1)^{n/2} n!}{(\frac{1}{2}n)!}$ dla n parzystych i 0 dla n nieparzystych, oznaczają wartości n -tych wielomianów Hermitte'a w 0. Z równania (2.21) widać więc, że stan ściśnięty zawiera tylko czynniki o parzystej liczbie cząstek. Stany te nie mają dobrze ustalonej liczby cząstek, możemy jednak wyznaczyć ich średnią liczbę

$$\langle re^{i\theta} | \hat{a}^\dagger \hat{a} | re^{i\theta} \rangle = \sinh^2 r. \quad (2.22)$$

Jak widać, wbrew nazwie, stan ściśniętej próżni zawiera niezerową liczbę cząstek.

Podobnie jak w przypadku stanów koherentnych, tak samo stany ściśnięte mogą nieść informację o fazie. Po przejściu przez przesunięcie fazowe ξ , stan $|re^{i\theta}\rangle$ ulegnie przekształceniu

$$\begin{aligned} |re^{i\theta}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^{n/2} \frac{H_n(0)}{\sqrt{n!}} e^{in\theta/2} |n\rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^{n/2} \frac{H_n(0)}{\sqrt{n!}} e^{in\theta/2+in\varphi} |n\rangle = |re^{i(\theta+2\varphi)}\rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Światło w stanach ściśniętych wytwarza się dzięki różnym procesom nieliniowym. Najczęściej stosowaną techniką jest wykorzystanie zjawiska zwanego parametrycznym podziałem częstości. Konieczne jest w tych sposobach użycie kryształów z nieliniową podatnością, które oświetla się zwykłym światłem laserowym.

Aby pokazać inną ważną cechę stanów ściśniętych i koherentnych, definiujemy operatory kwadratur:

$$\hat{x} = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.24)$$

$$\hat{y} = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (2.25)$$

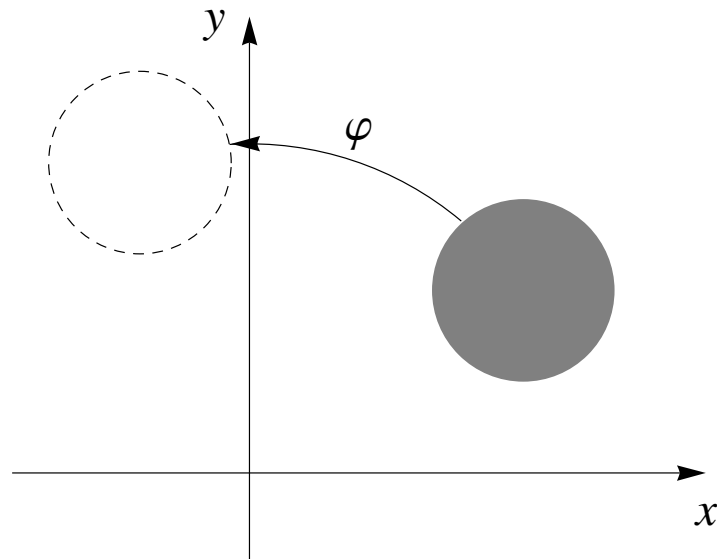
Komutator tych operatorów jest równy $[\hat{x}, \hat{y}] = 2i$, stąd dostajemy zasadę nieoznaczoności:

$$\Delta x \Delta y \geq 1. \quad (2.26)$$

Okazuje się, że dla stanów ściśniętych i koherentnych powyższa nierówność jest wysycana, tzn. $\Delta x \Delta y = 1$. Jest to powód, dla którego mówi się, że stany te tworzą klasę stanów o najmniejszej nieoznaczoności. Dla stanów koherentnych obowiązuje $\Delta x = \Delta y = 1$. Z kolei stany ściśnięte wykazują w ogólności właściwość $\Delta x \neq \Delta y$, zatem z racji obowiązywania nierówności (2.26) okazuje się, że zwiększając wariancję jednej kwadratury, obniżamy wariancję drugiej, a co za tym idzie, możemy mierzyć jedną z kwadratur ze zwiększoną precyzją niż w przypadku użycia stanu koherentnego. Jest to jedna z przyczyn

dla których rozważa się zastosowanie stanów ściśniętych w pomiarach interferometrycznych wymagających dużej dokładności. Przesunięcie fazowe wpływa bowiem na to którą kwadraturę możemy mierzyć z jaką dokładnością. Aby lepiej to zobaczyć przedstawmy stany przy pomocy rysunku w przestrzeni fazowej. Jeśli zrobimy wykres na którego jednej osi będziemy odkładać wartości kwadratury \hat{x} a na drugiej wartości \hat{y} na danym stanie, to, ponieważ każda z kwadratur jest dana z pewną niepewnością Δx , jako reprezentację stanu przyjmijmy obszar o charakterystycznych wielkościach danych przez Δx i Δy i znajdujący się w punkcie o współrzędnych $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{y} \rangle$.

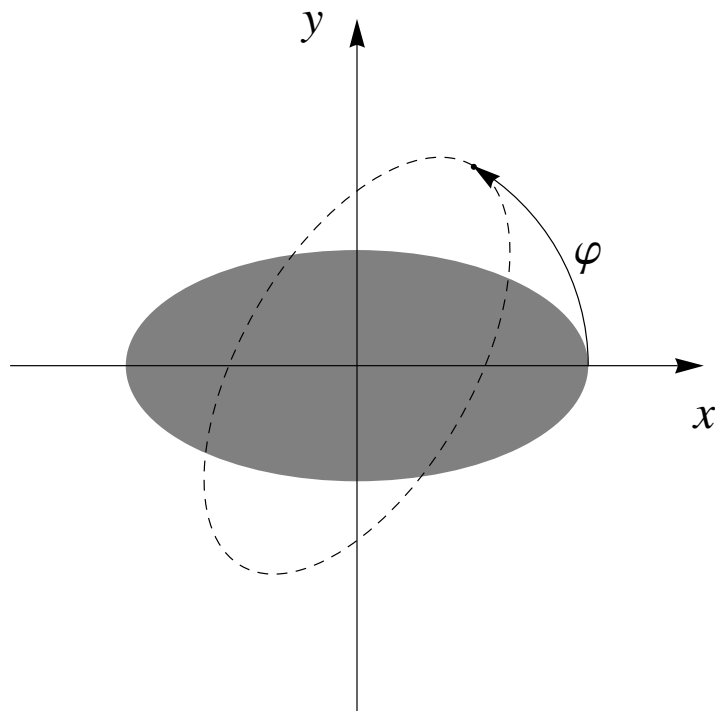
Dla stanu koherentnego $|\alpha\rangle = ||\alpha|e^{i\xi}\rangle$ niepewności obu kwadratur są sobie równe, więc reprezentujemy go przez koło o promieniu 1 i środku w punkcie $2\text{Re}(\alpha) = 2|\alpha|\cos\xi$, $2\text{Im}(\alpha) = 2|\alpha|\sin\xi$. Jeśli stan taki przejdzie przez przesunięcie fazowe φ , dozna transformacji $||\alpha|e^{i\xi}\rangle \rightarrow ||\alpha|e^{i(\xi+\varphi)}\rangle$, czyli środek koła będzie teraz w punkcie $(2|\alpha|\cos(\xi + \varphi), 2|\alpha|\sin(\xi + \varphi))$. Nie wpływa to jednak na wartości Δx i Δy , więc w tym przypadku dostaniemy taką samą niepewność pomiaru mierząc dowolną z kwadratur. Schematyczny rysunek jest dla stanu koherentnego znajduje się na rys. (2.1)



Rysunek 2.1: Rysunek ilustrujący zachowanie się stanu koherentnego pod wpływem przesunięcia fazowego φ . Szare koło reprezentuje początkowy stan koherentny, zaś przerywany okrąg stan po przejściu przez przesunięcie fazowe.

Stan ściśniętej próżni zachowuje się jednak inaczej. W tym przypadku mamy wariancję jednej z kwadratur mniejszą od drugiej, co ilustrujemy używając, zamiast koła z poprzedniego przykładu, elipsy o półosiach równych odpowiednio Δx i Δy . Jeśli stan ściśnięty przejdzie przez przesunięcie fazowe φ , to elipsa obróci się o odpowiedni kąt. Jak widać z rys. (2.2), na którym proces ten został przedstawiony graficznie, dla stanu po przesunięciu fazowym wariancje kwadratur nie są już równe półosiom elipsy. Jedna z

niepewności wzrosła, podczas gdy inna zmalała.



Rysunek 2.2: Rysunek ilustrujący zachowanie się stanu ściśniętej próżni pod wpływem przesunięcia fazowego φ . Szara elipsa reprezentuje stan przed przesunięciem, zaś przerywana stan z przesuniętą fazą.

Wygodny sposób na opis stanów ściśniętych i koherentnych stanowią funkcje kwadratur, w szczególności funkcja Wignera. Jeśli rozważymy jakiś n modowy stan o macierzy gęstości $\hat{\rho}$, to możemy dla każdego modu zdefiniować odpowiednie operatory kwadratur:

$$\hat{x}_k = (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) \quad (2.27)$$

$$\hat{y}_k = i(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k). \quad (2.28)$$

Dostajemy w ten sposób wektor $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \dots, \hat{x}_n, \hat{y}_n) = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_{2n})$. Korzystając z tej definicji, definiujemy funkcję Wignera dla stanu $\hat{\rho}$ w następujący sposób:

$$W(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\pi^{2n}} \int \text{Tr}(\hat{\rho} e^{i\mathbf{X}^T \Omega \boldsymbol{\lambda}}) e^{i\boldsymbol{\lambda}^T \Omega \boldsymbol{\alpha}} d^{2n} \boldsymbol{\lambda} \quad (2.29)$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ stanowią wektory w przestrzeni \mathbb{R}^{2n} , zaś Ω jest macierzą zdefiniowaną w następujący sposób:

$$\Omega = \bigoplus_{i=1}^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Dowolny stan $\hat{\rho}$ jest całkowicie opisany przez swoją funkcję Wignera. Funkcja Wignera jest nazywana quasi-prawdopodobieństwem, gdyż może przyjmować wartości ujemne, np. dla stanu Focka (w przeciwieństwie do zwykłego prawdopodobieństwa, które zawsze musi być nieujemne).

Dodatkowym pojęciem, które jest bardzo pomocne do opisu rozważanych przez nas stanów jest macierz kowariancji. Element i, j macierzy kowariancji σ dla stanu $\hat{\rho}$ jest dany następującym wzorem:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \langle \hat{X}_i \hat{X}_j + \hat{X}_j \hat{X}_i \rangle - \langle \hat{X}_i \rangle \langle \hat{X}_j \rangle \quad (2.31)$$

Okazuje się, że stany ściśnięte i koherentne stanowią szczególne przypadki pewnej szerszej klasy stanów, zwanych stanami gaussowskimi. Stany takie charakteryzują się tym, że ich funkcja Wignera ma postać gaussowską. Aby kompletnie opisać dany stan gaussowski wystarczy podać jego funkcję Wignera, która dla dowolnego stanu z tej klasy przyjmuje prostą postać:

$$W(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\pi \sqrt{\det \sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} - \bar{\mathbf{X}})^T \sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha} - \bar{\mathbf{X}})\right) \quad (2.32)$$

gdzie $\bar{\mathbf{X}} = \langle \hat{\mathbf{X}} \rangle$.

Ponieważ $W(\boldsymbol{\alpha})$ całkowicie charakteryzuje dany stan, więc aby w zupełności opisać dany stan gaussowski wystarczy znajomość jego macierzy kowariancji oraz $\bar{\mathbf{X}}$. Wykorzystanie stanów gaussowskich jest bardzo powszechnie rozważane w literaturze z racji ich prostej formy oraz względnej prostoty ich wytworzenia. Z tego powodu ich właściwości są również obszernie opisane w wielu pozycjach np. w [23].

2.6. Estymacja kwantowa

Informacja Fischera dana równaniem (2.4), pozwala na uzyskanie ograniczenia dolnego na precyzję obowiązującego dla wszystkich estymatorów nieobciążonych. Ponieważ prawdopodobieństwo występujące w definicji (2.4) bezpośrednio zależy od rodzaju pomiaru jakiego dokonujemy na układzie, nierówność Cramera-Rao daje najlepszą możliwą do uzyskania dokładność estymacji w przypadku pomiaru konkretnej wielkości. Oczywiście mierząc różne wielkości, moglibyśmy uzyskać różne informacje Fischera dla estymacji tego samego parametru. Chcielibyśmy się zatem pozbyć ograniczenia tylko do konkretnego rodzaju eksperymentu i przeprowadzić optymalizację informacji Fischera po wszystkich możliwych pomiarach. Dzięki temu dostalibyśmy najlepszą możliwą precyzję, bez względu na użyty estymator i pomiar.

Założmy, że do naszego układu wpuszczamy stan o macierzy gęstości $\hat{\rho}$. Działanie układu na stan wejściowy niech będzie opisane operacją unitarną $\hat{U}_\theta = \exp(-i\theta\hat{G})$, gdzie θ jest parametrem, który chcemy poznać, zaś \hat{G} - generatorem przesunięcia w tym parametrze. Schemat rozważanego przez nas układu znajduje się na rys. (2.3) W pracy [7] wykazano, że najlepsza możliwa do uzyskania, bez względu na pomiar, wartość informacji Fischera jest równa

$$F_Q = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Lambda}^2). \quad (2.33)$$



Rysunek 2.3: Schemat układu do pomiaru parametru θ . $\hat{\rho}$ jest macierzą gęstości stanu wejściowego, \hat{U}_θ operacją unitarną opisującą działanie układu na stan wejściowy, zaś $\hat{\Pi}$ oznacza pomiar dokonywany na końcu eksperymentu.

gdzie $\hat{\Lambda}$ to operator nazywany symetryczną pochodną logarytmiczną (SLD) i jest on zdefiniowany w sposób uwikłany równaniem:

$$\frac{1}{2}(\hat{\Lambda}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\Lambda}) = \frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = -i(\hat{G}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{G}). \quad (2.34)$$

Dowód powyższego twierdzenia, podobnie jak dla przypadku klasycznej informacji Fischera bazuje na zastosowaniu nierówności Schwarzera i podaję go poniżej.

Dla pomiaru opisanego operatorem $\hat{\Pi}(\mathbf{x})$ prawdopodobieństwo uzyskania konkretnego wyniku \mathbf{x} jest równe $p(\mathbf{x}|\theta) = \text{Tr}(\hat{\Pi}(\mathbf{x})\hat{\rho})$, więc zapisując informację Fischera (równanie (2.4)) otrzymujemy:

$$F(\theta) = \sum_{\mathbf{x}} \frac{[\text{Tr}(\hat{\Pi}(\mathbf{x})\partial\hat{\rho}/\partial\theta)]^2}{\text{Tr}(\hat{\Pi}(\mathbf{x})\hat{\rho})} \quad (2.35)$$

Ponieważ SLD jest hermitowskie, więc wstawiając $\partial\hat{\rho}/\partial\theta$ do równania (2.35) dostajemy:

$$F(\theta) = \sum_{\mathbf{x}} \frac{(\text{Re}[\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Pi}(\mathbf{x})\hat{\Lambda})])^2}{\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Pi}(\mathbf{x}))} \leq \sum_{\mathbf{x}} \frac{|\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Pi}(\mathbf{x})\hat{\Lambda})|^2}{\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Pi}(\mathbf{x}))} = \sum_{\mathbf{x}} |\text{Tr}(\frac{\hat{\rho}^{1/2}\hat{\Pi}(\mathbf{x})^{1/2}}{\sqrt{\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Pi}(\mathbf{x}))}}\hat{\Pi}(\mathbf{x})^{1/2}\hat{\Lambda})\hat{\rho}^{1/2}|^2 \quad (2.36)$$

Zastosujmy teraz nierówność Schwarzera $|\text{Tr}(\hat{A}^\dagger\hat{B})|^2 \leq \text{Tr}(\hat{A}^\dagger\hat{A})\text{Tr}(\hat{B}^\dagger\hat{B})$ do (2.36), biorąc $\hat{A} = \frac{\hat{\rho}^{1/2}\hat{\Pi}(\mathbf{x})^{1/2}}{\sqrt{\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Pi}(\mathbf{x}))}}$ i $\hat{B} = \hat{\Pi}(\mathbf{x})^{1/2}\hat{\Lambda}\hat{\rho}^{1/2}$ dostajemy:

$$F(\theta) \leq \sum_{\mathbf{x}} |\text{Tr}(\frac{\hat{\rho}^{1/2}\hat{\Pi}(\mathbf{x})^{1/2}}{\sqrt{\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Pi}(\mathbf{x}))}}\hat{\Pi}(\mathbf{x})^{1/2}\hat{\Lambda})\hat{\rho}^{1/2}|^2 \leq \sum_{\mathbf{x}} \text{Tr}(\hat{\Pi}(\mathbf{x})\hat{\Lambda}\hat{\rho}\hat{\Lambda}) = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Lambda}^2) \quad (2.37)$$

co należało udowodnić.

F_Q nazywamy kwantową informacją Fischera i daje ona ograniczenie na najlepszą możliwą do uzyskania precyzję pomiaru parametru θ przy użyciu danego stanu wejściowego $\hat{\rho}$ w układzie opisanym generatorem \hat{G} .

Alternatywnie kwantową informację Fischera można też wyznaczyć korzystając z następującego równania

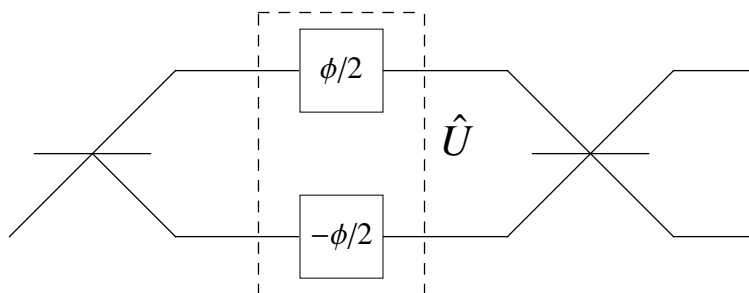
$$F_Q = 4 \sum_{n,k} p_n \left(\frac{p_n - p_k}{p_n + p_k} \right)^2 (\hat{G}^2)_{n,k} = 4\langle \hat{G}^2 \rangle - 8 \sum_{n,k} \frac{p_n p_k}{p_n + p_k} \hat{G}_{nk} \hat{G}_{kn} \quad (2.38)$$

gdzie p_n oznaczają wartości własne macierzy gęstości stanu wejściowego, sumowanie przebiega po wszystkich stanach własnych $\hat{\rho}$, zaś \hat{G}_{nk} są elementami macierzowymi operatora \hat{G} w bazie stanów własnych $\hat{\rho}$. W przypadku, gdy na wejściu układu mamy stan czysty $|\Psi\rangle$, równanie (2.38) redukuje się do następującego

$$F_Q = 4(\langle\partial\Psi|\partial\Psi\rangle - |\langle\partial\Psi|\Psi\rangle|^2) \quad (2.39)$$

gdzie $|\partial\Psi\rangle = \frac{d}{d\theta}\hat{U}_\theta|\Psi\rangle$.

Dla przykładu rozważmy problem pomiaru fazy w symetrycznym interferometrze Macha-Zehndera przy użyciu stanu koherentnego $|\alpha\rangle$ i stanu NOON, schemat takiego układu znajduje się na rys. (2.4).



Rysunek 2.4: Interferometr Macha-Zehndera

Jeśli efekt względnego opóźnienia fazowego ϕ pomiędzy ramionami zapiszemy przy użyciu operatora ewolucji $\hat{U} = \exp(i\phi(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b})/2)$, to w pierwszym przypadku dostajemy, że stan po przejściu przez pierwszą płytkę światłodzielną i opóźnienie fazowe jest równy

$$|\alpha\rangle \rightarrow \left| \frac{\alpha e^{i\phi/2}}{\sqrt{2}}, \frac{\alpha e^{-i\phi/2}}{\sqrt{2}} \right\rangle \quad (2.40)$$

Wstawiając to do równania (2.39) otrzymujemy

$$F_Q = |\alpha|^2 \quad (2.41)$$

Ponieważ $|\alpha|^2$ jest równe średniej liczbie fotonów N , to dostajemy precyzję równą $\Delta\phi = 1/\sqrt{N}$. Jest to tak zwana granica szumu śrutowego (standard quantum limit, SQL), możliwa do osiągnięcia przy użyciu zwykłego światła klasycznego.

Jeśli użyjemy teraz stanu $|N00N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N0\rangle + |0N\rangle)$ (przyjmujemy, że jest to stan już za pierwszą płytką światłodzielną), to po przejściu przez opóźnienie fazowe stan ten przekształci się do następującego:

$$|N00N\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{iN\phi/2}|N0\rangle + e^{-iN\phi/2}|0N\rangle) \quad (2.42)$$

Wstawiając ten rezultat do równania (2.39) dostajemy

$$F_Q = N^2 \quad (2.43)$$

Stąd precyzja pomiaru fazy w tym przypadku wynosi $\Delta\phi = 1/N$, czyli jest istotnie mniejsza (dokładniejsza) niż przy użyciu stanów koherentnych. Skalowanie dane równaniem (2.43) nosi nazwę granicy Heisenberga i jest najlepszym możliwym skalowaniem dopuszczalnym przez mechanikę kwantową. Ponieważ jednak produkcja stanów NOON nie jest łatwa, więc z tego powodu poszukuje się obecnie innych stanów wejściowych dających takie skalowanie.

Rozumowanie przeprowadzone dla estymacji jednego parametru można rozszerzyć na przypadek wieloparametrowy. W takiej sytuacji transformacja stanu zadana jest przez operator ewolucji $\hat{U}_\theta = e^{-i\theta^T \hat{G}}$, gdzie $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ i $\hat{G} = (\hat{G}_1, \hat{G}_2, \dots, \hat{G}_n)$. Wówczas elementy macierzy Fischera dane są równaniem

$$F_{ij}^Q = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\Lambda}_i \hat{\Lambda}_j + \hat{\rho} \hat{\Lambda}_j \hat{\Lambda}_i). \quad (2.44)$$

gdzie $\hat{\Lambda}_i$ oznacza SLD dla i -tego parametru i jest zdefiniowane równaniem (2.34) z generatorem \hat{G}_i . Wykorzystując wartości i stany własne macierzy gęstości stanu wejściowego, możemy dostać uogólnienie równania (2.38) na przypadek wieloparametrowy

$$F_{ij}^Q = 2\langle \hat{G}_i \hat{G}_j + \hat{G}_j \hat{G}_i \rangle - 8 \sum_{n,m} \frac{p_n p_m}{p_n + p_m} \hat{G}_{i,nm} \hat{G}_{j,mn}. \quad (2.45)$$

Analogicznie można uzyskać wzór na element macierzy Fischera dla czystych stanów wejściowych:

$$F_{ij}^Q = 4\text{Re}(\langle \partial_i \Psi | \partial_j \Psi \rangle - \langle \partial_i \Psi | \Psi \rangle \langle \Psi | \partial_j \Psi \rangle) \quad (2.46)$$

Aby obliczyć precyzję pomiaru odpowiedniego parametru, wystarczy teraz skorzystać z równania (2.9).

Równania (2.45) dają w wyniku elementy macierzy Fischera zoptymalizowane po wszystkich możliwych pomiarach i estymatorach. Jedynym parametrem, od którego w dalszym ciągu zależy precyzja, pozostaje więc macierz gęstości stanu wejściowego. W ogólności, znalezienie stanu jakiego powinno się użyć, by otrzymać najlepszą precyzję jest trudnym zadaniem, zazwyczaj trzeba się w tym celu posłużyć metodami numerycznymi. Nawet gdy takie zadanie uda się wykonać, pozostaje jeszcze problem aplikacyjny, czyli łatwość wytworzenia takiego stanu przy użyciu obecnych technologii. Optymalizacji po stanach wejściowych z pewnej szczególnej klasy będzie poświęcona dalsza część pracy.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w ogólności można wysycić kwantową nierówność Cramera-Rao. Konieczne w tym celu jest zastosowanie takiego pomiaru, dla którego klasyczna informacja Fischera byłaby równa kwantowej informacji Fischera. Przykładem takiego pomiaru może być np. pomiar w bazie wektorów własnych symetrycznej pochodnej logarytmicznej. Wówczas operatorem pomiaru jest po prostu SLD.

Rozdział 3

Optymalna precyzja przy użyciu zliczania fotonów

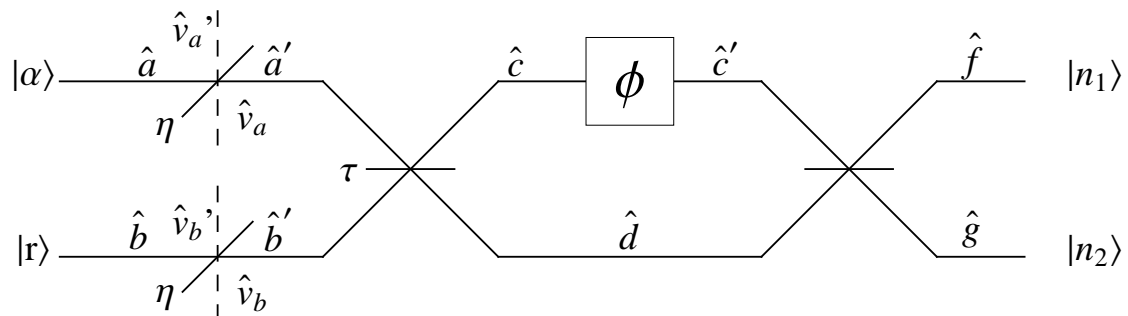
Jednym z najczęściej wykorzystywanych układów służących do pomiaru fazy jest interferometr Macha-Zehndera. W układzie takim nieuniknione są straty światła wynikłe z różnych czynników, takich jak rozpraszanie, straty na odbiciach czy wydajności detektorów. Konieczne zatem jest uwzględnienie tych strat w opisie realistycznego eksperymentu. W poniższym rozdziale przedstawiłem obliczenia dotyczące optymalnej możliwej do uzyskania precyzji przy użyciu zliczania fotonów, czyli obecnie jednej z głównych technik eksperymentalnych. Rozważanym przeze mnie układem był interferometr Macha-Zehndera z jednakowymi stratami w obu ramionach. Następnie porównałem ze sobą otrzymane przeze mnie wyniki pod kątem najlepszej uzyskiwanej precyzji oraz optymalnego stanu wejściowego układu w każdym podejściu. Ponieważ znalezienie ogólnego stanu, który dawałby najlepszą możliwą do osiągnięcia precyzję, nie jest zadaniem łatwym, ograniczyłem się w swoich obliczeniach do sytuacji gdy na wejście interferometru wpuszczamy w jednym ramieniu stan koherentny, a w drugim stan ściśnięty. Wybór ten podyktowany jest głównie faktem, że są to stany wytwarzane obecnie w prosty sposób w wielu eksperymentach a ich zastosowanie w metrologii kwantowej było opisywane już w początkach tej dziedziny [2–6] jak i w ostatnim czasie [10–12]. Można znaleźć też ogólne stany optymalne o ustalonej liczbie fotonów dla tego problemu [8, 9], jednak ich wytwarzanie nie jest łatwe, a co za tym idzie, ciężko osiągnąć przy ich użyciu wysokie precyzje w doświadczeniu.

3.1. Rezultaty obliczeń

Decydując się na zliczanie liczby fotonów na wyjściu każdego z ramion interferometru, wybieramy pewien konkretny pomiar. Możliwa optymalizacja ogranicza się zatem do wyboru najlepszego estymatora i stanu światła wejściowego, w naszym przypadku ograniczonego do stanu z klasy stanów $|\alpha\rangle \otimes |r\rangle$. W takim przypadku najlepszą możliwą precyzję pomiaru fazy da nam klasyczna informacja Fischera F_{cl} , dana równaniem (2.4). Aby określić F_{cl} , konieczne są prawdopodobieństwa zmierzenia liczby fotonów n_1 w pierwszym ramieniu i n_2 drugim, w zależności od fazy ϕ .

Straty światła, powstałe w trakcie jego przechodzenia przez układ, można uwzględnić poprzez dodanie w każdym z ramion płytki światłodzielącej o współczynniku transmisji η . Do pustego portu takiej płytki wchodzi stan próżni, natomiast na wyjściu otrzymujemy dwa mody, z których jeden jest modem sygnałowym, zaś drugi odpowiada za światło rozproszone. Wówczas $\sqrt{1-\eta}$ jest współczynnikiem strat w jednym z ramion.

W szczególnym przypadku, gdy straty w obu ramionach interferometru są sobie równe, tzn. płytki światłodzielące mają taką samą transmisję, możliwe jest przesunięcie strat z wnętrza interferometru do etapu przygotowania stanu, czyli jeszcze przed pierwszą płytkę światłodzielącą. To samo tyczy się też głównego źródła strat w eksperymentach optycznych, czyli wydajności detektorów. Schemat opisanego powyżej układu znajduje się na poniższym rysunku (rys. (3.1)). Zakładając, że dokonaliśmy pomiaru liczby fotonów i uzyskaliśmy n_1, n_2 odpowiednio w górnym i w dolnym ramieniu interferometru, możemy przedstawić stan światła na wyjściu układu jako $|n_1\rangle_f \otimes |n_2\rangle_g$.



Rysunek 3.1: Interferometr Macha-Zehndera ze stratami w rozważanej konfiguracji

Gdzie $\hat{a}, \hat{a}', \hat{b}, \hat{b}', \hat{c}, \hat{c}', \hat{d}, \hat{f}, \hat{g}$ oznaczają operatory anihilacji odpowiednich modów w odpowiednich etapach ewolucji, zaś τ to współczynnik transmisji pierwszej płytki światłodzielącej układu. Dla ostatniej płytki światłodzielącej przyjmujemy współczynnik transmisji równy 0,5.

W celu dowodu stwierdzenia iż możemy przenieść straty przed pierwszą płytkę światłodzielącą, rozpatrzmy dwie sytuacje. W pierwszej, tak jak na rys.(3.1), straty znajdują się przed pierwszą płytką światłodzielącą interferometru. Wyrażając operatory anihilacji \hat{c} i \hat{d} przez operatory wejściowe \hat{a}, \hat{b} i operatory odpowiadające za mody próżni \hat{v}_a i \hat{v}_b otrzymujemy

$$\hat{c} = \sqrt{\eta\tau}\hat{a} + \sqrt{\eta(1-\tau)}\hat{b} + \sqrt{(1-\eta)\tau}\hat{v}_a + \sqrt{(1-\eta)(1-\tau)}\hat{v}_b \quad (3.1)$$

$$\hat{c} = \sqrt{\eta\tau}\hat{b} - \sqrt{\eta(1-\tau)}\hat{a} + \sqrt{(1-\eta)\tau}\hat{v}_b - \sqrt{(1-\eta)(1-\tau)}\hat{v}_a \quad (3.2)$$

Rozważmy teraz drugą sytuację, a mianowicie, gdy płytki światłodzielące odpowiadające za straty znajdują się za pierwszą płytką światłodzielącą interferometru. Wówczas za

straty odpowiadają operatory anihilacji \hat{v}_c i \hat{v}_d , znajdujące się w odpowiednich ramionach układu. Uwzględniając to, otrzymujemy że

$$\hat{c} = \sqrt{\eta\tau}\hat{a} + \sqrt{\eta(1-\tau)}\hat{b} + \sqrt{(1-\eta)}\hat{v}_c \quad (3.3)$$

$$\hat{d} = \sqrt{\eta\tau}\hat{b} - \sqrt{\eta(1-\tau)}\hat{a} + \sqrt{(1-\eta)}\hat{v}_d \quad (3.4)$$

Przyrównując wyniki dane równaniami (3.1) i (3.2) do prawych stron równań (3.3) i (3.4) dostajemy

$$\hat{v}_c = \sqrt{\tau}\hat{v}_a + \sqrt{1-\tau}\hat{v}_b \quad (3.5)$$

$$\hat{v}_d = \sqrt{\tau}\hat{v}_b - \sqrt{1-\tau}\hat{v}_a \quad (3.6)$$

Wynik ten można zinterpretować jako umieszczenie na drodze modów próżni dodatkowych dwóch płytek światłodzielnących o współczynniku transmisji τ przed płytkami modelującymi straty. Ponieważ jednak wszystkie rozważane mody są w stanie próżni wynik jest ten sam, co należało udowodnić.

Aby określić dokładny stan wyjściowy interferometru, konieczne jest uwzględnienie modów powodujących straty. Niech mod \hat{v}'_a będzie w stanie $|\mu\rangle_{v'_a}$, zaś mod \hat{v}'_b w stanie $|\nu\rangle_{v'_b}$. Wówczas stan wyjściowy można zapisać jako $|n_1\rangle_f \otimes |n_2\rangle_g \otimes |\mu\rangle_{v'_a} \otimes |\nu\rangle_{v'_b}$. Ewolując ten stan wstecz przez interferometr, dostaniemy macierz gęstości stanu wejściowego. Mamy następujące związki:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \\ -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}' \\ \hat{b}' \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\tau}e^{i\phi} - \sqrt{1-\tau} & \sqrt{1-\tau}e^{i\phi} + \sqrt{\tau} \\ -(\sqrt{1-\tau} + \sqrt{\tau}e^{i\phi}) & \sqrt{\tau} - \sqrt{1-\tau}e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}' \\ \hat{b}' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Stąd:

$$\hat{f} = T_1(\phi, \tau)\hat{b}' - T_2(\phi, \tau)\hat{a}' \quad (3.8)$$

$$\hat{g} = -e^{i\phi}[T_1^*(\phi, \tau)\hat{a}' - T_2^*(\phi, \tau)\hat{b}'] \quad (3.9)$$

gdzie

$$T_1(\phi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\tau} + e^{i\phi}\sqrt{1-\tau}), \quad T_2(\phi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-\tau} - e^{i\phi}\sqrt{\tau}) \quad (3.10)$$

Zatem, skoro $\hat{a}' = \sqrt{\eta}\hat{a} + \sqrt{1-\eta}\hat{v}_a$ oraz $\hat{b}' = \sqrt{\eta}\hat{b} + \sqrt{1-\eta}\hat{v}_b$, to można otrzymać, że stan wejściowy ma następującą postać:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |n_1, n_2, \mu, \nu\rangle_{out} = \frac{\sqrt{\eta}^{n_1+n_2}}{\sqrt{n_1!n_2!\mu!\nu!}} \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} \sum_{p=0}^{N_2} \sum_{q=0}^{N_1} \sum_{s=0}^{\mu} \sum_{t=0}^{\nu} (-1)^{n_2+k+l} e^{-in_2\phi} \cdot \\ &\quad \cdot F_1^*(n_1, k, \tau, \phi) F_1(n_2, l, \tau, \phi) F_2(N_2, p, \eta) F_2(N_1, q, \eta) \cdot \\ &\quad \cdot F_3(\mu, N_2, p, s, \eta) F_3(\nu, N_1, q, t, \eta) |N_2 - p + s, N_1 - q + t, \mu + p - s, \nu + q - t\rangle_{in}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdzie:

$$F_1(n, m, \tau, \phi) = \binom{n}{m} T_1(\phi, \tau)^{n-m} T_2(\phi, \tau)^m \quad (3.12)$$

$$F_2(n, m, \eta) = \binom{n}{m} \sqrt{\eta}^{-m} \sqrt{1-\eta}^m \quad (3.13)$$

$$F_3(n, m, i, j, \eta) = (-1)^j \binom{n}{j} \sqrt{\eta}^{n-j} \sqrt{1-\eta}^j \sqrt{(m-i+j)!(n+i-j)!} \quad (3.14)$$

$$N_1 = n_1 + l - k, \quad N_2 = n_2 + k - l \quad (3.15)$$

zaś $|\rangle_{out}$ i $|\rangle_{in}$ oznaczają odpowiednio stany w modach na wyjściu i wejściu układu.

Warto zauważyć, że w powyższym wyprowadzeniu, pomimo tego, że działania zapisywaliśmy na operatorach, ewoluowaliśmy stan końcowy w obrazie Schrödingera a nie operatory anihilacji w obrazie Heisenberga.

Aby policzyć prawdopodobieństwo uzyskania na wyjściu interferometru stanu $|n_1\rangle_f \otimes |n_2\rangle_g \otimes |\mu\rangle_{v'_a} \otimes |\nu\rangle_{v'_b}$, należy obliczyć iloczyn skalarny tego stanu ze stanem wejściowym $|\Psi\rangle = |\alpha\rangle_a \otimes |r\rangle_b \otimes |0\rangle_{v_a} \otimes |0\rangle_{v_b}$. Tak otrzymaną wielkość trzeba następnie podnieść do kwadratu i uzyskamy wówczas szukane prawdopodobieństwo. Zapisując $|\Psi\rangle$ w bazie Focka dostajemy:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{G_{nm}(\alpha, r, \theta)}{\sqrt{n!m!}} |n, m, 0, 0\rangle_{in} \quad (3.16)$$

gdzie

$$G_{nm}(\alpha, r, \theta) = e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^n \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \left(\frac{\tanh r}{2}\right)^{m/2} H_m(0) e^{i\theta m/2} \quad (3.17)$$

Obliczając iloczyn skalarny $\langle\psi|\Psi\rangle$, dostajemy pod sumą iloczyn czterech delt Kroneckera, $\delta_{N_2-p+s,n} \delta_{N_1-q+t,m} \delta_{\mu+p-s,0} \delta_{\nu+q-t,0}$. Wykonując sumowania zauważmy, że t jest co najwyżej równe ν , więc ostania delta Kroneckera narzuca warunki $t = \nu$, $q = 0$. Podobnie można otrzymać, że $s = \mu$, $p = 0$. Zatem dostajemy

$$\langle\psi|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{\eta}^{n_1+n_2}}{\sqrt{n_1!n_2!\mu!\nu!}} \sqrt{1-\eta}^{\mu+\nu} \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} (-1)^{n_2+k+l+\mu+\nu} e^{in_2\phi} G_{N_2+\mu, N_1+\nu}(\alpha, r, \theta) \cdot F_1^*(n_1, k, \tau, \phi) F_1(n_2, l, \tau, \phi) \quad (3.18)$$

Biorąc kwadrat modułu powyższej wielkości, otrzymujemy szukane prawdopodobieństwo uzyskania stanu wyjściowego $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |\mu\rangle \otimes |\nu\rangle$ w zależności od α, r, ϕ i η .

$$p(n_1, n_2, \mu, \nu|\phi) = \frac{\eta^{n_1+n_2}}{n_1!n_2!\mu!\nu!} (1-\eta)^{\mu+\nu} \left| \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} (-1)^{k+l} G_{N_2+\mu, N_1+\nu}(\alpha, r, \theta) \cdot F_1^*(n_1, k, \tau, \phi) F_1(n_2, l, \tau, \phi) \right|^2 \quad (3.19)$$

W eksperymencie nie mamy jednak dostępu do modów \hat{v}'_a, \hat{v}'_b powodujących straty (nie możemy podejrzeć światła, które zostało stracone). Oznacza to, że nie wiemy, ile fotonów jest w tych modach, musimy więc uwzględnić fakt, że w rzeczywistości mamy mniej

informacji. Robimy to przez obliczenie rozkładu granicznego $p(n_1, n_2|\phi)$, czyli wysumowanie rozkładu (3.19) po μ, ν . Dostajemy w ten sposób szukane prawdopodobieństwo uzyskania konkretnej liczby fotonów na wyjściu interferometru w zależności od fazy ϕ .

$$p(n_1, n_2|\phi) = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} p(n_1, n_2, \mu, \nu|\phi) = \frac{\eta^{n_1+n_2}}{n_1!n_2!} e^{|\alpha|^2(1-\eta)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\eta)^\nu}{\nu!} \cdot \left| \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} (-1)^{k+l} G_{N_2, N_1+\nu}(\alpha, r, \theta) F_1^*(n_1, k, \tau, \phi) F_1(n_2, l, \tau, \phi) \right|^2 \quad (3.20)$$

Dla dowolnego η sumy w (3.20) są wykonalne jedynie numerycznie. Informację Fischera można otrzymać wstawiając (3.20) do równania (2.4), dostajemy wówczas:

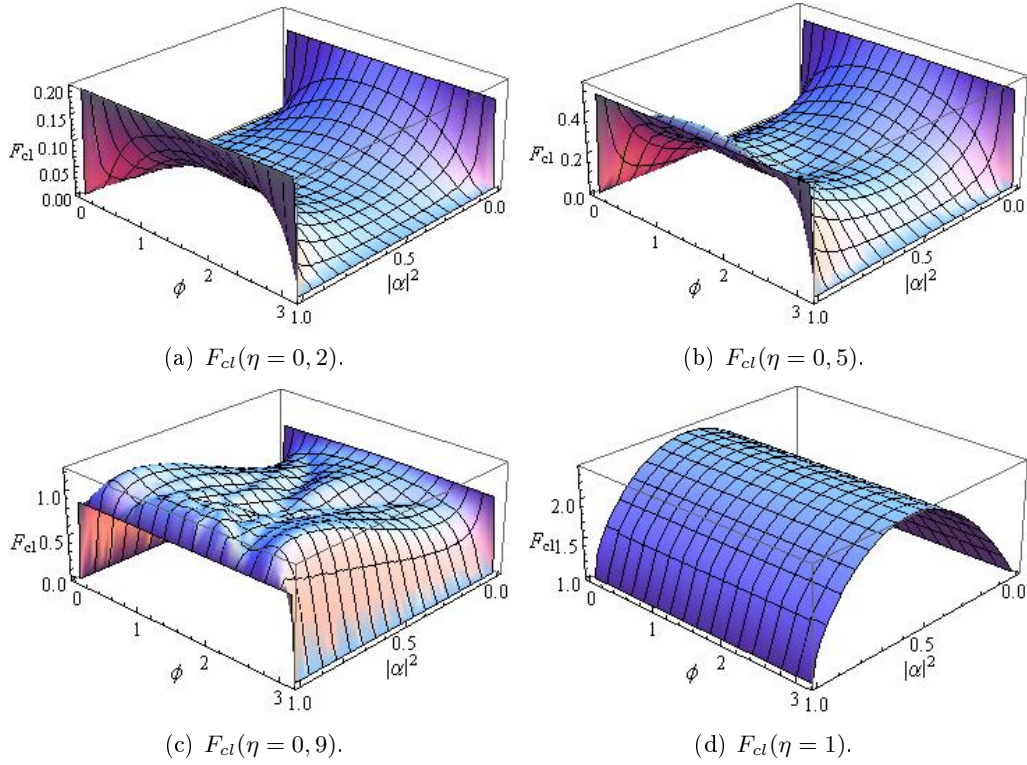
$$F_{cl}(\phi) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{1}{p(n_1, n_2|\phi)} \left(\frac{dp(n_1, n_2|\phi)}{d\phi} \right)^2 \quad (3.21)$$

Stąd, na mocy wzoru (2.5) można dostać dolne ograniczenie na precyzję pomiaru przesunięcia fazowego.

3.2. Rezultaty numeryczne

Obliczenie klasycznej informacji Fischera na podstawie prawdopodobieństw (3.20) wyprowadzonych w poprzedniej części rozdziału jest możliwe w ogólności tylko numerycznie, czego rezultaty przedstawię poniżej. Z racji tego, że w prawdziwym eksperymencie mamy ograniczone zasoby, we wszystkich rozważaniach przyjmowałem wiaz ustalonej średniej liczby fotonów $\bar{N} = |\alpha|^2 + \sinh^2 r$. Rys.(3.2) przedstawia wykres F_{cl} w zależności od ϕ i średniej ilości fotonów w stanie koherentnym dla różnych parametrów η określających straty w układzie. Jak widać, $F_{cl}(\phi)$ zależy od mierzonej fazy (informacja Fischera daje nam podejście lokalne), zaś maksimum osiąga dla $\phi = \frac{\pi}{2}$. Na rys. (3.3) znajdują się wykresy $\Delta\phi$ w zależności od średniej liczby fotonów w stanie koherentnym na wejściu układu dla fazy $\phi = \pi/2$ i różnych współczynników strat. Z rysunku tego widać, że dla małych strat (η bliskie 1) optymalnie jest dzielić energię wiązki po równo pomiędzy stan koherentny a stan ściśnięty, natomiast dla wyższych strat praktycznie wszystkie fotony opłaca się wpuszczać albo wyłącznie w stanie koherentnym albo wyłącznie w stanie ściśniętym.

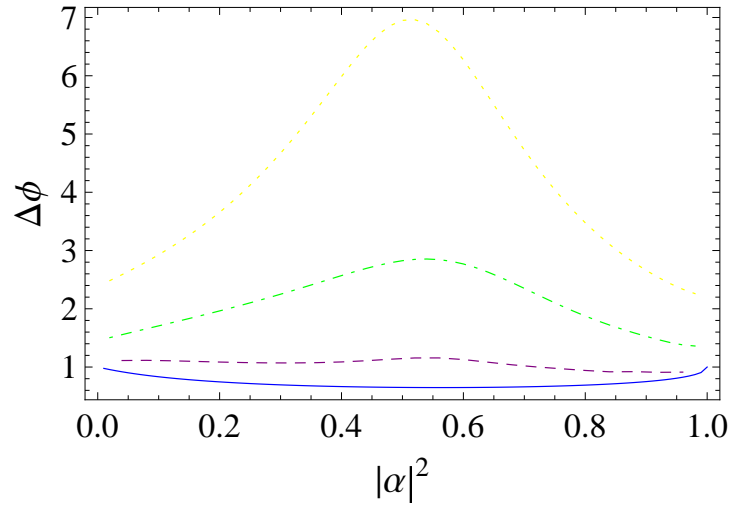
Najważniejszą cechą, która pozwala ocenić skuteczność danego pomiaru, stanowi skalowanie precyzji wynikającej z maksymalnej informacji Fischera wraz ze wzrostem średniej liczby fotonów w układzie. Im mniejsze skalowanie, tym lepszą precyzję jesteśmy w stanie osiągnąć przy użyciu mniejszej liczby fotonów. Na rys. (3.4) znajduje się wykres ilustrujący skalowanie precyzji wraz ze średnią liczbą fotonów w układzie dla różnych współczynników strat. Widać na nim, że dla $\eta = 1$, czyli przypadku bez strat, skalowanie jest najlepsze i osiąga dla dużych \bar{N} granicę Heisenberga. Dla pozostałych współczynników strat F_{cl} skaluje się słabiej, osiągając granicę szumu śrutowego.



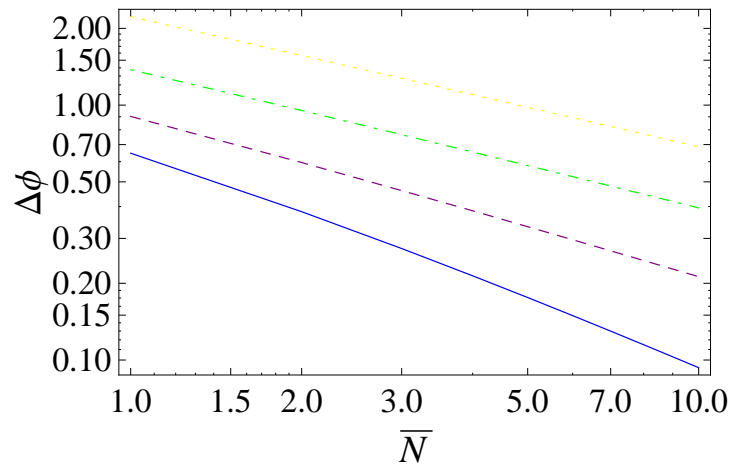
Rysunek 3.2: Wykresy informacji Fischera w zależności od fazy ϕ i średniej liczby fotonów w stanie koherentnym $|\alpha|^2$ dla współczynnika transmisji pierwszej płytki światłdzielącej $\tau = \frac{1}{2}$, średniej liczby fotonów na wejściu układu $\bar{N} = 1$ i różnych parametrów strat w układzie.

Pożyteczną informacją jest też wiedza jaką część fotonów musimy umieścić w stanie koherentnym, a jaką w stanie ściśniętym by uzyskać najlepszą precyzję. Wiedząc to, będziemy znali optymalny stan do estymacji w zależności od strat lub liczby użytych fotonów. Na rys. (3.5) znajduje się wykres średniej liczby fotonów w stanie koherentnym, jaką musimy użyć by dostać najlepszą precyzję w zależności od średniej liczby wszystkich fotonów w układzie. Jak widać, dla bardzo małych strat $\eta \approx 1$ należy rozdzielić fotony mniej więcej po równo pomiędzy stan koherentny a ściśnięty, podczas gdy dla większości strat wystarczy prawie wszystkie fotony umieścić w stanie koherentnym.

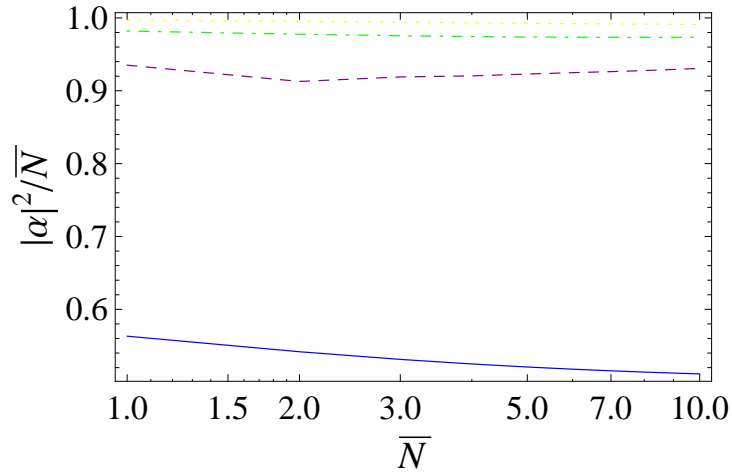
W celu dokładniejszej analizy wpływu strat na optymalny stan wejściowy wykonałem rys. (3.6), na którym znajduje się wykres średniej liczby fotonów w stanie koherentnym, których musimy użyć by osiągnąć najlepszą precyzję w zależności od strat. Z rysunku widać, że dla dużych strat prawie wszystkie fotony opłaca umieszczać w stanie koherentnym, podczas gdy dla małych strat należy je podzielić między stanami. Dodatkowo, to jaką część fotonów musimy poświęcić na stan koherentny praktycznie nie zależy od średniej ilości fotonów w całym układzie



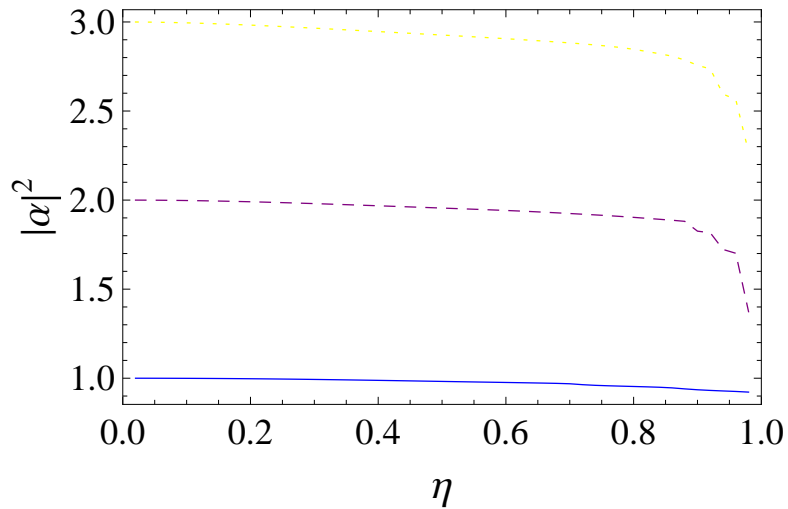
Rysunek 3.3: Wykres precyzji uzyskanej z klasycznej informacji Fischera w zależności od średniej liczby fotonów w stanie koherentnym dla fazy $\phi = \frac{\pi}{2}$, współczynnika transmisji wejściowej płytki światłodzielącej $\tau = \frac{1}{2}$ i średniej liczby fotonów na wejściu układu $\bar{N} = 1$. $\eta = 1$ (niebieski, ciągły), $\eta = 0,9$ (fioletowy, kreski), $\eta = 0,5$ (zielony, kropki i kreski), $\eta = 0,2$ (żółty, kropki).



Rysunek 3.4: Wykres najlepszej precyzji w zależności od średniej liczby fotonów w układzie dla fazy $\phi = \frac{\pi}{2}$ i współczynnika transmisji wejściowej płytki światłodzielącej $\tau = \frac{1}{2}$. $\eta = 1$ (niebieski, ciągły), $\eta = 0,9$ (fioletowy, kreski), $\eta = 0,5$ (zielony, kropki i kreski), $\eta = 0,2$ (żółty, kropki).



Rysunek 3.5: Wykres średniej liczby fotonów w stanie koherentnym w stosunku do średniej ilości fotonów w całym układzie w zależności od średniej liczby fotonów w układzie dla różnych współczynników strat. $\eta = 1$ (niebieski, ciągły), $\eta = 0,9$ (fioletowy, kreski), $\eta = 0,5$ (zielony, kropki i kreski), $\eta = 0,2$ (żółty, kropki). Rysunek zrobiony dla $\tau = \frac{1}{2}$ i $\phi = \frac{\pi}{2}$.

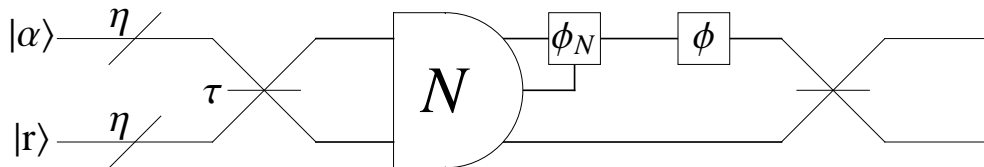


Rysunek 3.6: Wykres średniej liczby fotonów w stanie koherentnym w zależności od współczynnika strat dla różnych średnich liczb fotonów w układzie. $\bar{N} = 1$ (niebieski, ciągła), $\bar{N} = 2$ (fioletowy, kreski), $\bar{N} = 3$ (żółty, kropki). Wykres zrobiony dla $\tau = \frac{1}{2}$ i $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Podsumowując, przy wykorzystaniu tylko i wyłącznie detektorów zliczających fotony, okazuje się że dla większości współczynników strat w celu osiągnięcia najlepszej precyzji wystarczy przeznaczyć niemal całość światła na stan koherentny. Dla małych strat z kolei należy dokonać podziału energii wiązek pomiędzy stan koherentny i ściśnięty i to tym większego im mniejsze są straty. W szczególnym przypadku interferometru bezstratnego, fotony należy podzielić po równo między oba stany. Dodatkowo, obliczenia numeryczne sugerują, że dla tego przypadku możliwe jest osiągnięcie precyzji wykazującej skalowanie Heisenberga, podczas gdy dla dużych strat osiąga się jedynie skalowanie granicy szumu śrutowego.

3.3. Procedura dopasowywania faz do czynników o różnej całkowitej liczbie fotonów

W analizie przeprowadzonej powyżej zakładaliśmy, że mierzymy po prostu liczbę fotonów w każdym z ramion na wyjściu układu. W ten sposób ograniczaliśmy się jednak, bowiem dobieraliśmy opóźnienie fazowe tak, by zmaksymalizować całą informację Fischera, podczas gdy istnieje możliwość, że w zależności od tego ile fotonów mamy w układzie, zmienia się optymalne opóźnienie fazowe. Teoretycznie więc, moglibyśmy uwzględnić taką sytuację w naszym pomiarze poprzez zastosowanie układu, takiego jak na rys. (3.7).



Rysunek 3.7: Schemat układu pozwalający na dokładniejszą estymację fazy.

W układzie posiadamy jakiś stan wejściowy $|\Psi_{in}\rangle$ (może to być np. stan uzyskany w efekcie przejścia stanu ściśniętego $|r\rangle$ i koherentnego $|\alpha\rangle$ przeszła przez płytkę światłodzielącą i straty), w którym mamy w ogólności pewną średnią liczbę fotonów \bar{N} . Następnie dokonujemy pomiaru liczby fotonów (non-demolition measurement) i, - w zależności od uzyskanego wyniku, - dodajemy dodatkowe opóźnienie fazowe ϕ_N . Po przejściu przez przesunięcie fazowe dostajemy stan $|\Psi_{out}\rangle$, na którym dokonujemy dalszych pomiarów. Warto zauważyć, że pomiar liczby fotonów dokonany przed przesunięciem fazowym zmie-

nia w istocie stan $|\Psi_{in}\rangle$, gdyż pozostawia on w macierzy gęstości jedynie sektory o ustalonej liczbie fotonów. Niestety przy użyciu obecnych technologii, opisany wyżej układ nie jest możliwy do zrealizowania w praktyce. Dotyczy to przede wszystkim nieniszczącego pomiaru liczby fotonów, którego sposób wykonania w obecnej chwili nie jest znany.

W celu dokładniejszej analizy, czy procedura dopasowywania przesunięć fazowych do liczby fotonów być może jest w stanie poprawić otrzymywaną precyzję, wykonałem wykresy cząstkowych informacji Fischera $F_{N,cl}$, tzn. informacji Fischera dla ustalonej całkowitej liczby fotonów N . Ograniczenie to oznacza po prostu narzucenie więzu na możliwe rezultaty pomiaru, tzn. $n_1 + n_2 = N$. Z tego powodu w informacji Fischera należy uwzględnić prawdopodobieństwa warunkowe $p(n_1, n_2|\phi, N)$, które na mocy wzoru $p(A|B)p(B) = p(A)$ są równe:

$$p(n_1, n_2|\phi, N) = \frac{p(n_1, n_2|\phi)}{p(N)}, \quad (3.22)$$

gdzie $p(N) = \sum_{n_1+n_2=N} p(n_1, n_2|\phi)$ oznacza prawdopodobieństwo obecności dokładnie N fotonów w układzie. Dostajemy więc następujący wzór na $F_{N,cl}$:

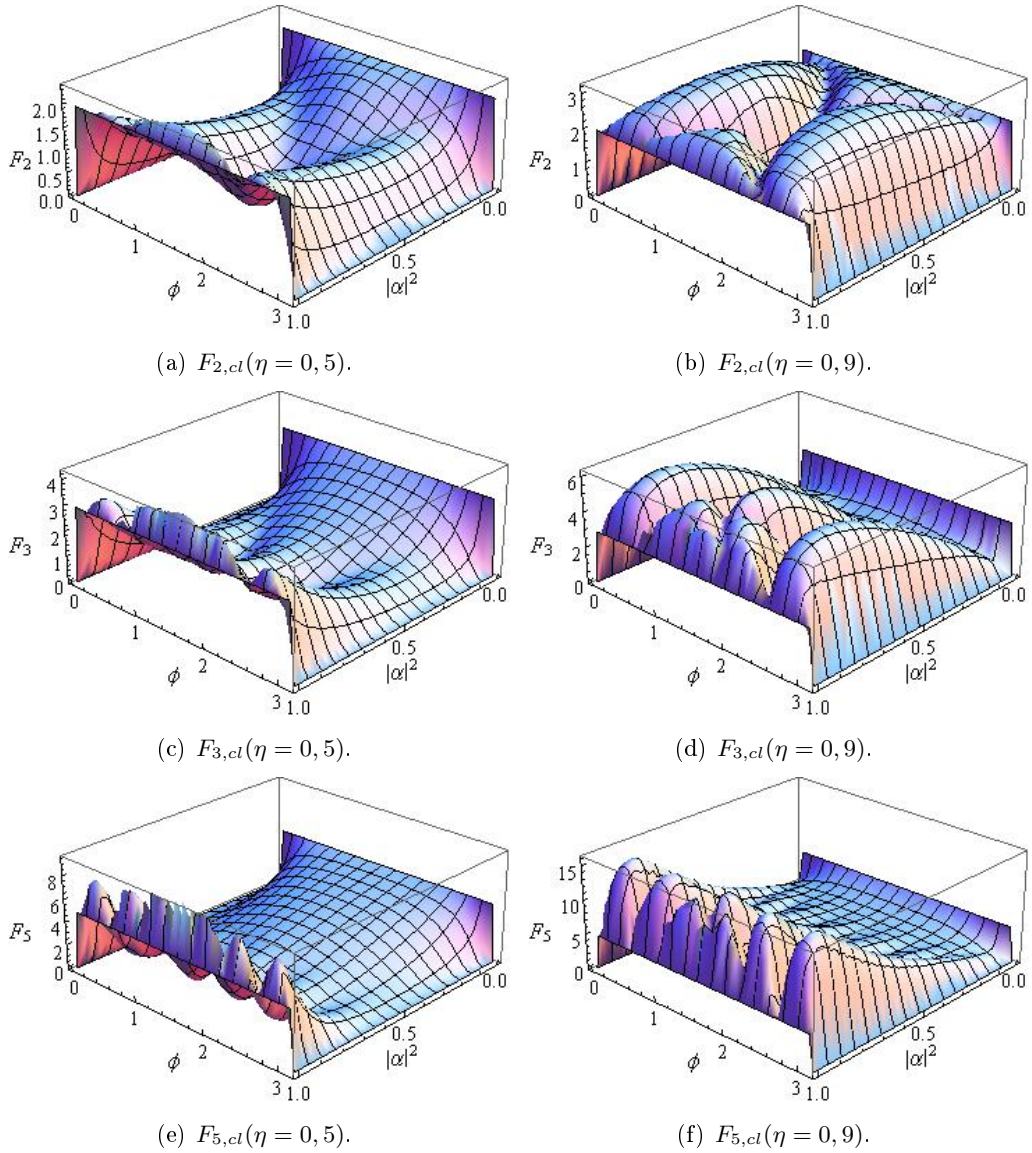
$$F_{N,cl}(\phi) = \sum_{n_1+n_2=N} \frac{1}{p(n_1, n_2|\phi, N)} \left(\frac{dp(n_1, n_2|\phi, N)}{d\phi} \right)^2 \quad (3.23)$$

Również w tym przypadku dalsze obliczenia można przeprowadzić niestety jedynie w sposób numeryczny. Rys.(3.8) przedstawia zależność $F_{N,cl}$ od ϕ i r dla różnych wartości N i parametrów strat η . Jak widać z rys.(3.8), $F_{N,cl}$ posiada maksima dla różnych ϕ w zależności od N i η . Oznacza to, że procedura rozważana przeze mnie w poprzedniej sekcji nie jest optymalna, gdyż przy liczeniu całkowitej informacji Fischera bierze się pod uwagę tylko jedną wartość ϕ .

W zaproponowanym układzie (rys. (3.7))możliwy jest pomiar liczby fotonów, a następnie dokonanie pomiaru ilości zliczeń w obu ramionach, jednak wpuszczając stan wejściowy o nieustalonej liczbie cząstek (tzn. znamy tylko jej średnią wartość \bar{N}), nie wiadomo, jaki rezultat wskaże pomiar, od którego zależy faza, dlatego też, przy liczeniu całkowitej informacji Fischera z dopasowaniem faz, należy uwzględnić możliwość otrzymania różnych N . Wobec tego dostajemy, że:

$$\bar{F}_{cl} = \sum_{N=0}^{\infty} p(N) F_{N,cl}^{max}, \quad (3.24)$$

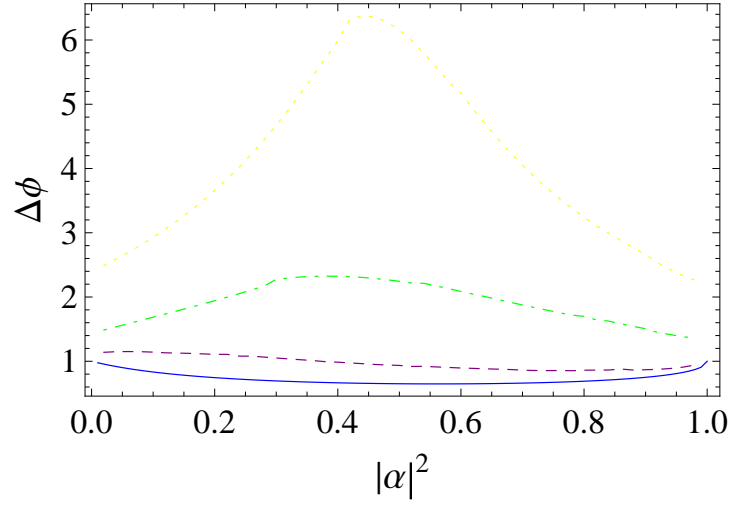
gdzie $F_{N,cl}^{max}$ oznacza cząstkową informację Fischera zmaksymalizowaną po ϕ . Rys.(3.9) przedstawia wykres precyzji uzyskanej z informacji Fischera z dopasowaniem faz dla różnych parametrów strat η w zależności od średniej liczby fotonów w stanie koherentnym.



Rysunek 3.8: Wykresy cząstkowych klasycznych informacji Fischera w zależności od parametru ściskania r i fazy ϕ dla współczynnika transmisji pierwszej płytki światłodzielącej $\tau = \frac{1}{2}$, średniej liczby fotonów w układzie $\bar{N} = 1$ i różnych parametrów start w układzie.

3.4. Porównanie wyników

Mając do dyspozycji dwa dolne ograniczenia na precyzję pomiaru przesunięcia fazowego, możemy porównać które z nich daje lepsze rezultaty i jak duże są różnice pomiędzy nimi. W tym celu wykonałem analizę analogiczną do tej, przeprowadzonej w sekcji poświęconej pomiarowi z użyciem wyłącznie detektorów zliczających fotony na wyjściu

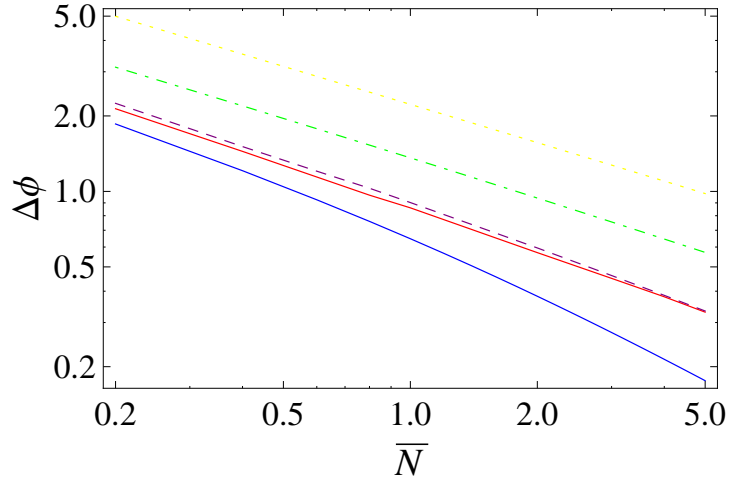


Rysunek 3.9: Wykres precyzji pomiaru przesunięcia fazowego otrzymanej przy użyciu dopasowania faz w zależności od średniej liczby fotonów w stanie koherentnym dla $\tau = \frac{1}{2}$ i średniej liczby fotonów w układzie $\bar{N} = 1$. $\eta = 1$ (niebieski, ciągły), $\eta = 0,9$ (fioletowy, kropki), $\eta = 0,5$ (zielony, kropki i kreski), $\eta = 0,2$ (żółty, kropki).

układu (zwykła informacja Fischera).

Przede wszystkim, ponieważ jedną z najważniejszych cech jakie charakteryzują precyzję jest jej skalowanie wraz z liczbą użytych fotonów, wykonałem wykres (rys. (3.10)), na którym znajduje się porównanie skalowania precyzji obliczonych na podstawie równań (3.24) i (2.4). Jak widać, przypadek z optymalizowaniem po fazach daje nieco lepszą precyzję dla niezbyt dużych strat ($\eta \approx 0,9$) i małej średniej liczby fotonów niż zwykła klasyczna informacja Fischera. Dla tego przypadku, by łatwiej było zaobserwować różnice zrobiłem też tabelkę (tabela (3.1)), w której porównane są precyzje otrzymywane oboma sposobami oraz ilości fotonów w stanach koherentnych które trzeba użyć by te precyzje otrzymać. Porównując wyniki dla rosnących \bar{N} widać, że wraz ze wzrostem średniej liczby fotonów w układzie, ograniczenie na precyzję dane przez informację Fischera z dopasowaniem faz zbliża się do tego, danego przez zwykłą informację Fischera. Dla większych strat, podobnie jak dla większej liczby fotonów, obie precyzje są praktycznie takie same. W przypadku małych strat ($\eta \rightarrow 1$) obie precyzje dają skalowanie $\frac{1}{\bar{N}}$, czyli osiągają skalowanie Heisenberga. Niestety, w obecności strat otrzymujemy zachowanie precyzji na poziomie szumu śrutowego, czyli skalowanie jak $\frac{1}{\sqrt{\bar{N}}}$.

Aby zbadać jaki wpływ na precyzję otrzymywaną przy użyciu obu podejść mają straty, wykonałem rysunek (rys. 3.11), na którym znajduje się porównanie wykresów precyzji wynikłych z informacji Fischera z dopasowaniem faz \bar{F}_{cl} oraz informacji Fischera bez dopasowania faz F_{cl} w zależności od współczynnika strat η . Jak wynika z rysunku, pierwsza z tych wielkości daje najlepszą precyzję dla wszystkich współczynników strat oprócz $\eta = 1$. W tym szczególnym przypadku precyzja otrzymywana z \bar{F}_{cl} jest taka

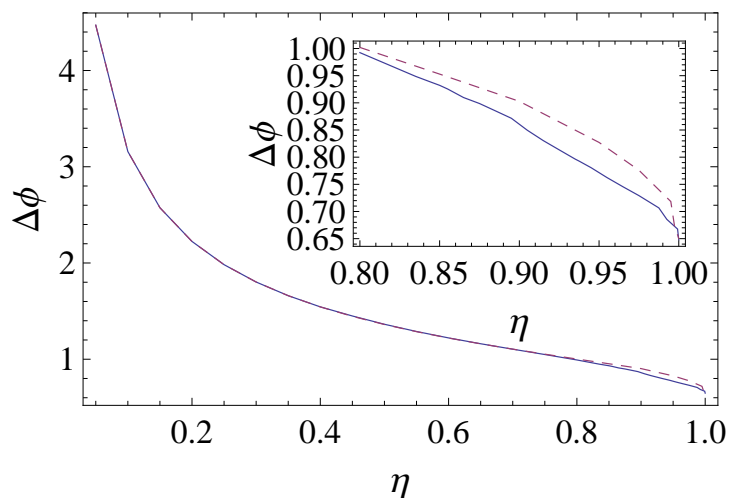


Rysunek 3.10: Wykres precyzji pomiaru przesunięcia fazowego w zależności od średniej liczby fotonów w układzie. Precyzja uzyskana dzięki dopasowaniu faz dla $\eta = 0,9$ jest przedstawiona linią ciągłą koloru czerwonego, zaś ta uzyskana przy użyciu klasycznej informacji Fischera dla $\eta = 0,9$ oznaczona jest przy użyciu kreski i koloru fioletowego. Pozostałe linie oznaczają wykresy precyzji uzyskane zarówno dzięki dopasowaniu faz jak i zwykłej klasycznej informacji Fischera (wyniki uzyskane dzięki dopasowaniu faz są większe, lecz w przypadku dużych strat różnica jest bardzo mała) i oznaczone są w następujący sposób: $\eta = 1$ (niebieski, ciągły), $\eta = 0,5$ (zielony, kropki i kreski), $\eta = 0,2$ (żółty, kropki).

\bar{N}	$\Delta\phi_F$	$\Delta\phi_{\bar{F}}$	$ \alpha _F^2$	$ \alpha _{\bar{F}}^2$
1	0,91	0,86	0,94	0,87
2	0,60	0,57	1,82	1,69
3	0,46	0,45	2,75	2,53
4	0,39	0,38	3,68	3,52
5	0,33	0,33	4,61	4,32

Tablica 3.1: Tabela przedstawiająca minimalną precyzję policzoną przy użyciu informacji Fischera ($\Delta\phi_F$) dla $\phi = \pi/2$ i precyzję policzoną dzięki informacji Fischera zmaksymalizowanej po fazach ($\Delta\phi_{\bar{F}}$) w zależności od średniej liczby fotonów na wejściu układu. W prawej części znajdują się odpowiednie współczynniki ściśnięcia, dla których osiągnęte jest maksimum. Obliczenia były przeprowadzane dla współczynnika strat $\eta = 0,9$ i transmisji wejściowej płytki światłodzielącej $\tau = \frac{1}{2}$.

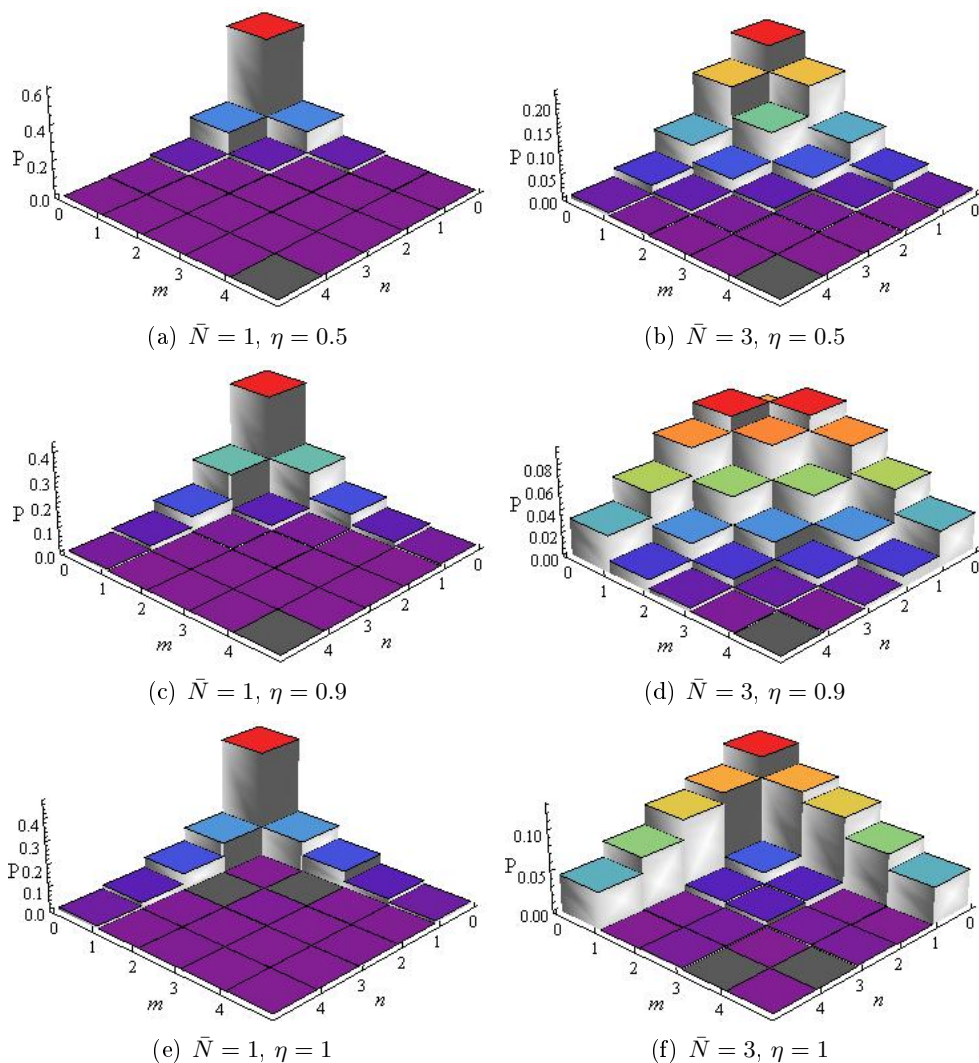
sama, jak ta wynikająca z informacji Fischera bez dopasowania faz. Dzieje się tak, gdyż w sytuacji bez strat wszystkie fazy, dla których cząstkowe informacje Fischera $F_{N,d}$



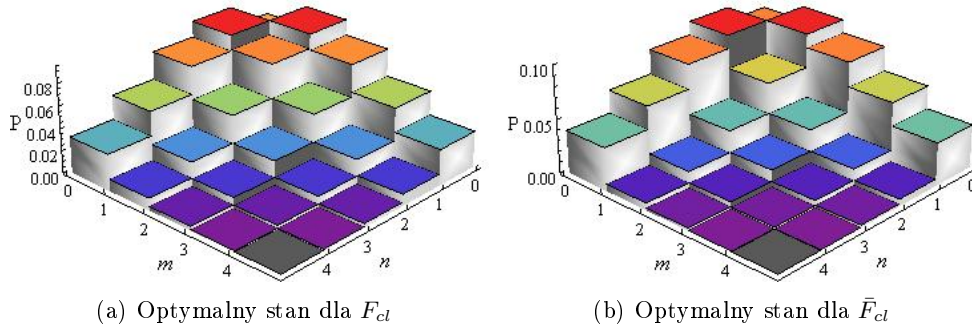
Rysunek 3.11: Wykres dolnych ograniczeń na precyzję pomiaru przesunięcia fazowego wynikłych z informacji Fischera z dopasowaniem faz (kolor niebieski, linia ciągła) i informacji Fischera bez dopasowania faz (kolor fioletowy, kreski). Ograniczenia obliczone dzięki obom sposobom są prawie takie same dla większości współczynników strat, przy czym dzięki dopasowaniu faz otrzymuje się nieco lepszy wynik, wykresy pokrywają się, gdyż różnica w przypadku dużych strat jest bardzo mała. Na mniejszym rysunku wewnątrz widać wykresy w powiększeniu dla małych strat. Widać, że w takim zakresie parametrów η informacja Fischera z dopasowaniem faz daje lepszą precyzję niż zwykła klasyczna informacja Fischera. Rysunek wykonany dla średniej liczby fotonów w układzie $\bar{N} = 1$.

osiągają maksimum, wynoszą $\phi_N = \frac{\pi}{2}$, co jest równe fazie maksymalizującej F_{cl} , czyli tak naprawdę podział informacji Fischera na części nic nie daje. Dla dużych strat (η małe) obie informacje Fischera dają taki sam rezultat. Jest to spowodowane tym, że czynniki pochodzące od dużej liczby fotonów w tym przypadku są zaniedbywalne, a to dla nich fazy są istotnie różne od $\pi/2$. W chwili, gdy straty stają się małe, ale jeszcze nierówne zero, \bar{F}_{cl} daje większy wynik niż F_{cl} , a jest to spowodowane właśnie wpływem czynników o wysokiej ilości fotonów, które w tej sytuacji są obecne.

W celu łatwiejszej obserwacji różnic dla stanów optymalnych, warto narysować wykres prawdopodobieństwa uzyskania konkretnych liczb fotonów n i m w ramionach interferometru po przejściu przez straty i pierwszą płytkę światłodzielącą. Uzyskane stany dla małych strat są podobne do tych opisanych w pracy [14], co można interpretować jako superpozycję stanów NOON. Pozwala to zrozumieć dlaczego w tym przypadku precyzja osiąga skalowanie Heisenberga. Dla dużych strat stan wejściowy (już po stratach) wygląda jednak zupełnie inaczej. Różnice pomiędzy optymalnymi stanami dla klasycznej informacji Fischera i informacji Fischera z dopasowaniem faz są widoczne tylko dla małych strat (ale większych od 0) i są niewielkie (rys. (3.13)).



Rysunek 3.12: Wykresy przedstawiające prawdopodobieństwo znalezienia n i m fotonów w ramionach interferometru za pierwszą płytką światłdzielącą dla różnych strat i średniej liczby fotonów. Dla współczynników strat $\eta = 1$ ((3.12(e)) i (3.12(f))) otrzymane wykresy są podobne do tych otrzymanych w [14] i wykazują zachowanie takie jak mieszanina stanów NOON. Wykresy przedstawiają optymalne stany dla klasycznej informacji Fischera bez dopasowywania faz F_{cl} .



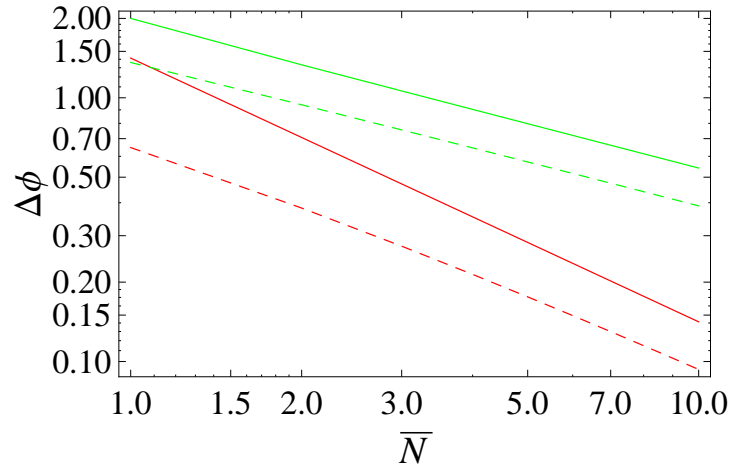
Rysunek 3.13: Wykresy przedstawiające prawdopodobieństwo znalezienia n i m fotonów w ramionach interferometru za pierwszą płytką światłodzielącą dla współczynnika strat $\eta = 0.9$ i średniej liczby fotonów w układzie $\bar{N} = 3$. Widoczne są drobne różnice pomiędzy optymalnymi stanami dla F_{cl} (3.4) i \bar{F}_{cl} (3.13(b)).

3.5. Porównanie ze strategią optymalną

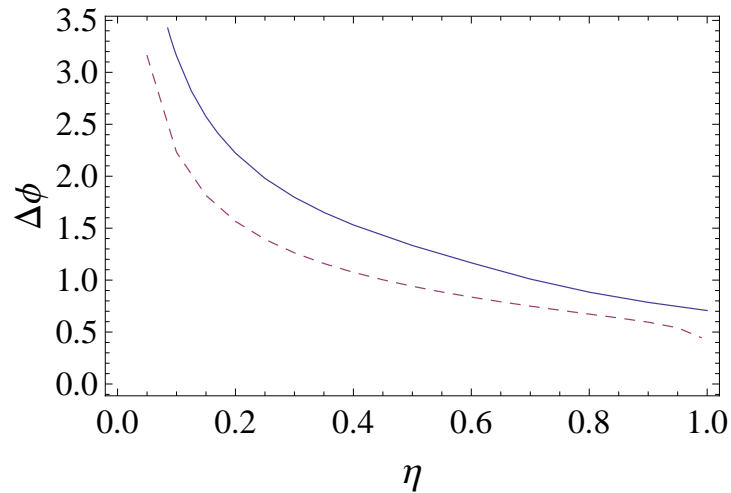
Precyzje otrzymane przy użyciu obu metod opisanych w tym rozdziale można też porównać z ograniczeniem na precyzję w układzie ze stratami, ale przy użyciu stanów czystych o ustalonej liczbie fotonów, które to zostało przedstawione w pracy [9]. Wykresy tych wszystkich wielkości w funkcji średniej liczby fotonów w układzie znajdują się na rys. (3.14), zaś w funkcji strat na rys. (3.15). Fakt, że precyzje uzyskiwane przy użyciu stanów ściśniętych i koherentnych są lepsze od odpowiadających im precyzji wyznaczonych przy użyciu stanów o ustalonej liczbie fotonów (mimo, że te drugie zostały specjalnie skonstruowane tak, by zapewnić najlepszą precyzję) można zrozumieć zwracając uwagę, że w pierwszym przypadku mamy do czynienia ze stanami o nieustalonej liczbie cząstek, czyli ze stanami z innej klasy niż te rozważane w pracy [9].

3.6. Podsumowanie

Z rozważań przeprowadzonych w powyższym rozdziale wynika kilka istotnych wniosków. Przede wszystkim, skalowanie precyzji które można osiągnąć przy użyciu zliczania fotonów zależy od strat w układzie. Skalowanie Heisenberga jest osiągane tylko w przypadku bardzo małych strat, podczas gdy w pozostałych przypadkach precyzja skaluje się na poziomie szumu śrutowego. Kolejnym wnioskiem jest fakt, że dla większości współczynników strat, najbardziej opłaca się wysłać prawie całe światło w stanie koherentnym. Tylko dla małych strat udział stanu ściśniętego staje się większy. Okazuje się także że precyzję może poprawić pomiar adaptowany (taki jak na rys. (3.7)). Niestety, zysk jest niewielki i zauważalny tylko dla małej średniej liczby fotonów w układzie oraz małych strat. W praktyce oznacza to że procedura dopasowania faz jest w stanie poprawić wyniki w bardzo niewielkim stopniu.



Rysunek 3.14: Wykres dolnych ograniczeń na precyzję w funkcji średniej liczby fotonów w układzie. Precyzja policzona przy użyciu klasycznej informacji Fischera dla stanów koherentnego i ściśniętego na wejściu symetrycznego interferometru Macha-Zehndera jest oznaczona kreskami, zaś policzona przy użyciu stanów o ustalonej liczbie fotonów liniami ciągłymi, $\eta = 0,5$ (zielony), $\eta = 1$ (czerwony).



Rysunek 3.15: Wykres dolnych ograniczeń na precyzję pomiaru przesunięcia fazowego przy użyciu stanów ściśniętego i koherentnego na wejściu interferometru Macha-Zehndera - kolor fioletowy, kreski i przy użyciu stanu czystego o ustalonej liczbie fotonów-kolor niebieski, linia ciągła. Średnia liczba fotonów w układzie $\bar{N} = 2$, w pierwszym przypadku współczynnik transmisji pierwszej płytki światłodzielącej interferometru był równy $\tau = \frac{1}{2}$.

Rozdział 4

Optymalna precyzja w ogólnym przypadku

4.1. Kwantowa informacja Fischera

Rozważając przypadek klasyczny, ograniczaliśmy się do konkretnego pomiaru dokonywanego na wyjściu układu (zliczenia w konkretnych ramionach itp.). Klasyczna informacja Fischera liczona dla takiego pomiaru pozwala uzyskać najlepszą możliwą precyzję zoptymalizowaną po wszystkich estymatorach, jednak ciągle mamy do dyspozycji tylko wyniki konkretnych pomiarów. Naszym celem jest nie tylko znalezienie najlepszej możliwej precyzji ze względu na użyty estymator, ale także dokonanie optymalizacji po wszystkich możliwych pomiarach dopuszczalnych przez mechanikę kwantową, musimy więc posłużyć się metodami przedstawionymi w sekcji 2.6

Wielkością, którą zazwyczaj mierzy się w interferometrii, jest względne przesunięcie fazowe między wiązkami. Jeśli rozważamy interferometr Macha-Zehndera, w którym mamy do czynienia z dwoma wiązkami, możemy rozłożyć przesunięcia fazowe w ramionach w różny sposób, uzyskując taką samą ich różnicę. Szczególnie warte uwagi, ze względu na swoją prostotę, są dwa przypadki rozmieszczenia przesunięć.

W pierwszej sytuacji całe przesunięcie fazowe odbywa się tylko w jednym ramieniu interferometru. Z góry ustalamy przesunięcie fazowe drugiej wiązki na 0 i względna różnica faz pomiędzy wiązkami jest po prostu równa przesunięciu jednej z wiązek. Ten przypadek opiszę w części pierwszej tego rozdziału.

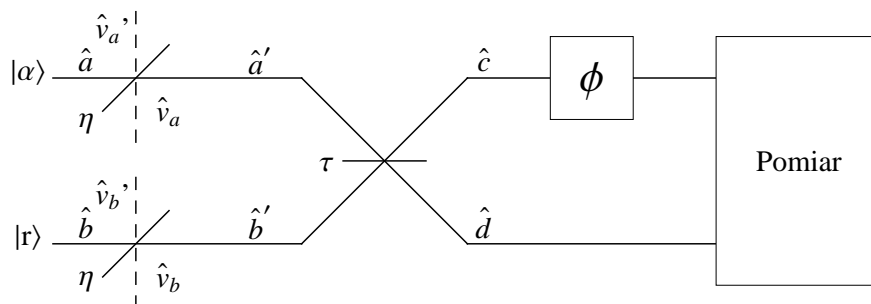
W drugiej sytuacji faza jest równomiernie rozłożona pomiędzy ramionami interferometru. Oznacza to, że w jednym z ramion przyjmujemy przesunięcie fazowe równe połowie różnicy faz, zaś w drugim przesunięcie będzie takie samo, lecz z przeciwnym znakiem. Względna różnica faz pomiędzy wiązkami jest więc w tym przypadku taka sama, jak w sytuacji opisanej w poprzednim akapicie. Ten przypadek przedstawię w drugiej części tego rozdziału.

Ponieważ w interferometrii istotna jest tylko względna różnica faz, więc na pierwszy rzut oka obie sytuacje, opisane w dwóch poprzednich akapitach, powinny być równoważne. Trzeba jednak pamiętać o tym, że w każdym z tych przypadków mamy do czynienia z innym generatorem przesunięć fazy (w pierwszym przypadku przesunięcie fazowe w ogóle nie działa na jedną z wiązek). To wszystko sprawia, że należałoby przyjrzeć się, czy

otrzymywane wyniki dla estymacji poszczególnych parametrów dają ten sam rezultat.

4.1.1. Przypadek z fazą w jednym ramieniu

Umieszczając nieznanne przesunięcie fazowe w jednym ramieniu interferometru, zakładamy, że znamy i możemy odpowiednio dobrać fazę w drugim ramieniu. Układ w takiej konfiguracji wygląda tak, jak na rys. 4.1, gdzie zostało zaznaczone, że nie precyzujemy wykonywanego pomiaru.



Rysunek 4.1: Interferometr Macha-Zehndera ze stratami w rozważanej konfiguracji

W celu obliczenia kwantowej informacji Fischera w tym przypadku skorzystałem ze wzoru (2.38). Aby go zastosować, musimy znać macierz gęstości światła przechodzącego przez opóźnienie fazowe, co w rozważanym przypadku nie jest proste. Jeśli jednak przejdziemy do obrazu Heisenberga, to zamiast ewoluować stan wejściowy do momentu przejścia przez przesunięcie fazowe, możemy przeprowadzić ewolucję generatora przesunięcia wstecz przez pierwszą płytkę światłodzielną, nie zmieniając stanu wejściowego.

Generator przesunięcia fazowego jest dany w tym przypadku przez $\hat{G} = \hat{c}^\dagger \hat{c}$; ewoluując go wstecz układu, otrzymujemy, że przed pierwszą płytką światłodzielną przyjmuje on postać:

$$\hat{G} = \tau \hat{a}'^\dagger \hat{a}' + (1 - \tau) \hat{b}'^\dagger \hat{b}' + \sqrt{\tau(1 - \tau)} (\hat{a}'^\dagger \hat{b}' + \hat{b}'^\dagger \hat{a}') \quad (4.1)$$

Rozważmy macierz gęstości przed stratami. Ponieważ wpuszczamy do układu stan koherentny $|\alpha\rangle_a$ oraz ściśnięty $|r\rangle_b$, to mamy $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |r\rangle\langle r|$. Uwzględnienie strat nie jest prostym zadaniem z racji tego, że w jednym z ramion posiadamy stan ściśnięty. W celu znalezienia stanu po stratach zauważmy najpierw, że straty w każdym z ramion są od siebie niezależne, możemy więc rozważać osobno ich wpływ na stany wejściowe.

W przypadku górnego ramienia na wejściu płytki światłodzielną odpowiadającej za straty mamy stan $|\alpha\rangle_a |0\rangle_{v_a}$. Jest to iloczyn dwóch stanów koherentnych (próżnię można traktować jako stan koherentny $|\beta\rangle$ z $\beta = 0$) i po przejściu przez płytkę światłodzielną o współczynniku transmisji η przechodzi w stan $|\sqrt{\eta}\alpha\rangle_{a'} |\sqrt{\eta}\alpha\rangle_{v'_a}$. Ponieważ nie mamy

dostępu do modu odpowiadającego za straty musimy dokonać częściowego śladu macierzy gęstości stanu wyjściowego, co daje nam poszukiwany stan po stratach $\hat{\rho}_1 = |\sqrt{\eta}\alpha\rangle\langle\sqrt{\eta}\alpha|$.

Wpływ strat na stan w dolnym ramieniu interferometru ($|r\rangle_b|0\rangle_{v_b}$) jest już trudniejszy do opisanie. Zauważmy najpierw, że stan wejściowy na płytce światłodzieliącej odpowiadającej za straty jest dwumodowym stanem gaussowskim (bo stan w każdym z modów jest gaussowski). Ponieważ stan taki jest całkowicie zdefiniowany przez swoją macierz kowariancji, wystarczy zająć się nią.

Macierz kowariancji stanu wejściowego (przed stratami) jest następująca:

$$\sigma_{in} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2e^{-r} \sinh r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + 2e^r \sinh r \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Przejście przez płytkę światłodzieliącą o transmisji η możemy opisać transformacją macierzy kowariancji

$$\sigma_{out} = S\sigma_{in}S^T \quad (4.3)$$

gdzie

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & 0 & \sqrt{1-\eta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta} & 0 & \sqrt{1-\eta} \\ \sqrt{1-\eta} & 0 & -\sqrt{\eta} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta} & 0 & \sqrt{\eta} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Otrzymujemy stąd, że po przejściu przez płytkę światłodzieliącą odpowiadającą za straty dostajemy stan o macierzy kowariancji

$$\sigma_{out} = \begin{pmatrix} 1 + \eta(1 - \Delta x^2) & 0 & \sqrt{\eta(1-\eta)}(1 - \Delta x^2) & 0 \\ 0 & 1 + \eta(1 - \Delta y^2) & 0 & \sqrt{\eta(1-\eta)}(1 - \Delta y^2) \\ \sqrt{\eta(1-\eta)}(1 - \Delta x^2) & 0 & 1 - \eta(1 - \Delta x^2) & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta(1-\eta)}(1 - \Delta y^2) & 0 & 1 - \eta(1 - \Delta y^2) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

gdzie $\Delta x^2 = 1 - 2e^{-r} \sinh r$, zaś $\Delta y^2 = 1 + 2e^r \sinh r$.

Ponieważ mody odpowiadające za straty są odrzucane, więc macierz kowariancji modu sygnałowego \hat{b}' jest dana przez

$$\sigma_{2,out} = \begin{pmatrix} 1 - \eta(1 - \Delta x^2) & 0 \\ 0 & 1 - \eta(1 - \Delta y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\eta e^{-r} \sinh r & 0 \\ 0 & 1 + 2\eta e^r \sinh r \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Skąd dostajemy, że odpowiednie elementy macierzy kowariancji modu sygnałowego po stratach są równe:

$$\Delta x_{out}^2 = 1 - 2\eta e^{-r} \sinh r \quad (4.7)$$

$$\Delta y_{out}^2 = 1 + 2\eta e^r \sinh r \quad (4.8)$$

Dowolny jednomodowy stan gaussowski dany przez Δx i Δy możemy przedstawić w postaci ściśniętego stanu termicznego ([23]), czyli:

$$\hat{\rho} = (1 - \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{S}(r') |n\rangle \langle n| \hat{S}^\dagger(r') \quad (4.9)$$

Obliczając macierz kowariancji takiego stanu dostajemy, że posiada ona następujące elementy:

$$\Delta x_{out}^2 = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} e^{-2r'} \quad (4.10)$$

$$\Delta y_{out}^2 = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} e^{2r'} \quad (4.11)$$

Przyrównując powyższe dwa równania do odpowiadających im równań (4.7) i (4.8), otrzymujemy λ i r' .

$$e^{2r'} = \sqrt{\frac{1 + 2\eta e^r \sinh(r)}{1 - 2\eta e^{-r} \sinh(r)}} \quad (4.12)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{(1 - 2\eta e^{-r} \sinh(r))(1 + 2\eta e^r \sinh(r))} - 1}{\sqrt{(1 - 2\eta e^{-r} \sinh(r))(1 + 2\eta e^r \sinh(r))} + 1} \quad (4.13)$$

Zatem możemy wyznaczyć macierz gęstości światła w dolnej wiązce po stratach. Dodatkowo, z (4.9) mamy, że wektory własne $\hat{\rho}$ są postaci $|v_n\rangle = |\sqrt{\eta}\alpha\rangle \hat{S}(r') |n\rangle$, zaś odpowiadające im wartości własne to $p_n = (1 - \lambda)\lambda^n$.

Generator \hat{G} możemy zapisać w następującej formie: $\hat{G} = \tau \hat{a}'^\dagger \hat{a}' + (1 - \tau) \hat{b}'^\dagger \hat{b}' + \sqrt{\tau(1 - \tau)} \hat{G}_0$, gdzie $\hat{G}_0 = \hat{a}'^\dagger \hat{b}' + \hat{b}'^\dagger \hat{a}'$ oznacza wyraz z mieszanymi iloczynami operatorów kreacji (wyraz interferencyjny). Gdy obliczamy kwantową informację Fischera (równanie (2.38)), liczymy średnią \hat{G}^2 po stanach własnych $\hat{\rho}$, wyrazy w których występuje nieparzysta liczba operatorów $\hat{b}', \hat{b}'^\dagger$, dadzą w wyniku 0. Stąd

$$\langle \hat{G}^2 \rangle = \langle (\tau \hat{a}'^\dagger \hat{a}' + (1 - \tau) \hat{b}'^\dagger \hat{b}')^2 \rangle + \tau(1 - \tau) \langle \hat{G}_0^2 \rangle \quad (4.14)$$

Z kolei, jeśli rozważymy drugi wyraz F_Q , znów okaże się, że wyrazy krzyżowe, typu $\langle \hat{G} \rangle_{nk} \langle \tau \hat{a}'^\dagger \hat{a}' + (1 - \tau) \hat{b}'^\dagger \hat{b}' \rangle_{kn}$ znikają, zostają więc tylko czynniki typu $\langle \hat{G}_0 \rangle_{nk} \langle \hat{G}_0 \rangle_{kn}$. Możemy zatem napisać, że

$$F_Q = F_Q(\tau \hat{a}'^\dagger \hat{a}' + (1 - \tau) \hat{b}'^\dagger \hat{b}') + \tau(1 - \tau) F_Q(\hat{G}_0), \quad (4.15)$$

czyli innymi słowy, rozbić informację Fischera na człon pochodzący od wyrazu interferencyjnego i człon niezawierający 'oddziaływania' wiązek.

Wyraz interferencyjny

Rozważmy najpierw wkład pochodzący od wyrazu interferencyjnego. Mamy, po obliczeniach

$$\begin{aligned}
F_Q(\hat{G}_0) &= 4\langle \hat{G}_0^2 \rangle - 8 \sum_{n,k} \frac{p_n p_k}{p_n + p_k} \hat{G}_{0,nk} \hat{G}_{0,kn} = 4(1-\lambda) \sum_n \lambda^n [2\eta|\alpha|^2(2n+1) \sinh(r') \cosh(r') + \\
&+ (2\eta|\alpha|^2+1)(\sinh^2(r')+n \cosh(r')) + \eta|\alpha|^2] - 8\eta|\alpha|^2 e^{2r'} \sum_{n,k} (1-\lambda) \frac{\lambda^{n+k}}{\lambda^n + \lambda^k} (\sqrt{k(n+1)}\delta_{k,n+1} + \\
&+ \sqrt{n(k+1)}\delta_{k,n-1}) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} 8\eta|\alpha|^2 \sinh(r') \cosh(r') + 4(2\eta|\alpha|^2+1) \sinh^2(r') + \\
&+ 4 \frac{\lambda}{1-\lambda} (2\eta|\alpha|^2+1) \cosh(2r') + 4\eta|\alpha|^2 - 16\eta|\alpha|^2 e^{2r'} \frac{\lambda}{1-\lambda^2} = \\
&= 4\eta \left(\frac{|\alpha|^2}{1-2\eta e^{-r} \sinh(r)} + \sinh^2(r) \right) \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Pozostały wkład

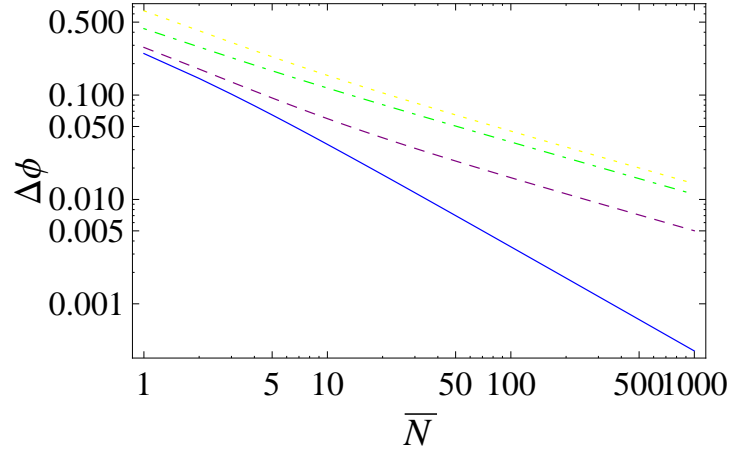
Pozostały wkład daje nam zaś

$$\begin{aligned}
F_Q(\tau \hat{a}'^\dagger \hat{a}' + (1-\tau) \hat{b}'^\dagger \hat{b}') &= 4\tau^2 \eta |\alpha|^2 + (1-\tau)^2 \sinh^2(2r') \frac{\lambda}{1+\lambda^2} + 2(1-\tau)^2 \sinh^2(2r') = \\
&= 4\tau^2 \eta |\alpha|^2 + \frac{2\eta(1-\tau)^2 \sinh^2(2r)}{1+2\eta(1-\eta) \sinh^2(r)} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Ostatecznie zatem, całkowita kwantowa informacja Fischera jest równa:

$$F_Q = 4\tau^2 \eta |\alpha|^2 + \frac{2\eta(1-\tau)^2 \sinh^2(2r)}{1+2\eta(1-\eta) \sinh^2(r)} + 4\tau(1-\tau) \eta \left(\frac{|\alpha|^2}{1-2\eta e^{-r} \sinh(r)} + \sinh^2(r) \right) \quad (4.18)$$

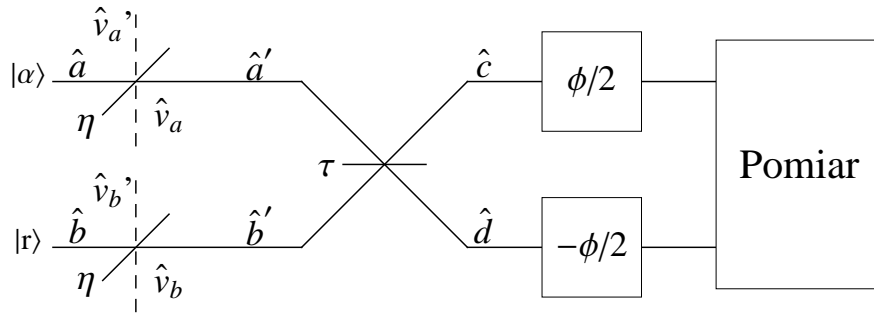
W celu znalezienia największej możliwej wartości informacji Fischera którą można uzyskać w rozważanym układzie przeprowadziłem optymalizację F_Q po τ , r i $|\alpha|^2$, pamiętając, że mamy dodatkowo wiąź ustalonej średniej liczby fotonów wchodzących do układu $|\alpha|^2 + \sinh^2 r = \bar{N}$. Okazuje się, że niezależnie od wielkości strat i średniej liczby fotonów w układzie, F_Q przyjmuje maksymalną wartość dla $\tau = 0$ i $|\alpha|^2 = 0$. Oznacza to, że najlepszą możliwą precyzję uzyskamy gdy do układu wpuścimy wyłącznie stan ściśnięty i usuniemy pierwszą płytkę światłodziącą, wpuszczając całe światło do ramienia z przesunięciem fazowym. Wykres precyzji uzyskanej w ten sposób w zależności od średniej liczby fotonów w układzie dla różnych współczynników strat znajduje się na rys. (4.2). Dla η skalowanie osiąga granicę Heisenberga, podczas gdy dla innych współczynników strat tylko skalowanie szumu śrutowego.



Rysunek 4.2: Skalowanie optymalnej precyzji $\Delta\phi$ możliwej do uzyskania przy użyciu równania (4.18). $\eta = 1$ (niebieski, ciągły), $\eta = 0,9$ (fioletowy, kreski), $\eta = 0,5$ (zielony, kropki i kreski), $\eta = 0,2$ (żółty, kropki).

4.1.2. Przypadek z równomiernie rozdzieloną fazą

Jeśli rozłożymy opóźnienie fazowe równomiernie pomiędzy obie wiązki w ten sposób by względna różnica faz była taka sama jak w przypadku rozważanym w poprzedniej sekcji, to układ w tej konfiguracji wygląda tak, jak na rys. (4.3).



Rysunek 4.3: Interferometr Macha-Zehndera ze stratami w rozważanej konfiguracji

Generator przesunięcia w takiej sytuacji to $G_- = \frac{1}{2}(\hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{d}^\dagger \hat{d}) = \frac{1}{2}(1 - 2\tau)(\hat{b}'^\dagger \hat{b}' - \hat{a}'^\dagger \hat{a}') + \sqrt{\tau(1-\tau)}(\hat{a}'^\dagger \hat{b}' + \hat{b}'^\dagger \hat{a}')$. W celu obliczenia informacji Fischera dla pomiaru różnicy opóźnień fazowych korzystamy z równania (2.38).

Zauważmy, że - podobnie jak w przypadku z fazą w jednym ramieniu - generator \hat{G}_-

możemy zapisać w następującej formie: $\hat{G}_- = \frac{1}{2}(1-2\tau)(\hat{b}'^\dagger\hat{b}' - \hat{a}'^\dagger\hat{a}') + \sqrt{\tau(1-\tau)}\hat{G}_0$, gdzie $\hat{G}_0 = \hat{a}'^\dagger\hat{b}' + \hat{b}'^\dagger\hat{a}'$ oznacza wyraz interferencyjny. Gdy obliczamy kwantową informację Fischera (równanie (2.38)), liczymy średnią \hat{G}^2 po stanach własnych $\hat{\rho}$, wyrazy w których występuje nieparzysta liczba operatorów \hat{b}' , \hat{b}'^\dagger , dadzą w wyniku 0. Możemy zatem rozbić informację Fischera dla pomiaru różnicy przesunięć fazowych F_{--} w następujący sposób:

$$F_{--} = \frac{(1-2\tau)^2}{4}F(\hat{b}'^\dagger\hat{b}' - \hat{a}'^\dagger\hat{a}') + \tau(1-\tau)F(\hat{G}_0) \quad (4.19)$$

Drugi człon powyższego równania policzyliśmy już wcześniej (równanie 4.16). Biorąc zaś pierwszy człon, niezawierający oddziaływania, dostajemy:

$$F(\hat{b}'^\dagger\hat{b}' - \hat{a}'^\dagger\hat{a}') = \left(\eta|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \frac{\eta \sinh^2(2r)}{1 + 2\eta(1-\eta) \sinh^2(r)} \right) \quad (4.20)$$

Dodając te wielkości otrzymujemy, że:

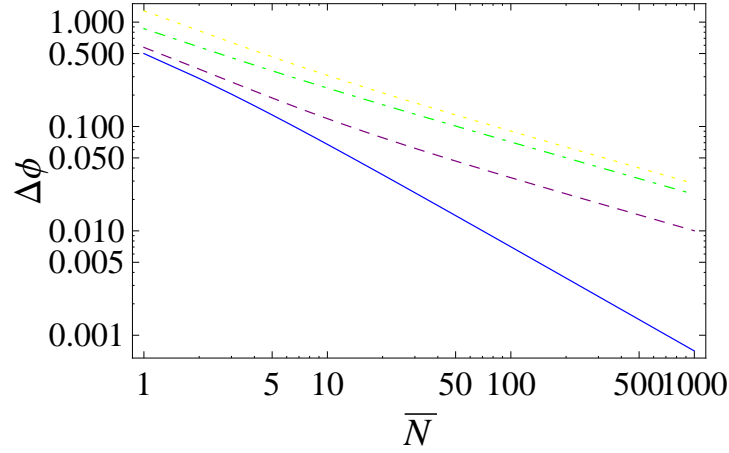
$$F_{--} = (1-2\tau)^2 \left(\eta|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \frac{\eta \sinh^2(2r)}{1 + 2\eta(1-\eta) \sinh^2(r)} \right) + 4\tau(1-\tau)\eta \left(\frac{|\alpha|^2}{1 - 2\eta e^{-r} \sinh(r)} + \sinh^2(r) \right) \quad (4.21)$$

W tym przypadku również okazuje się, że przy optymalizacji F_{--} otrzymuje się $\tau = 0$ lub $\tau = 1$ oraz $|\alpha|^2 = 0$. Aby osiągnąć najlepszą precyzję, musimy więc wpuścić do układu tylko stan ściśnięty i wyjąć pierwszą płytkę światłodziącą lub zamiast niej włożyć zwierciadło (opóźnienie fazowe znajduje się w obu ramionach, więc nie ma znaczenia przez które z nich będzie przechodzić światło). Wykres najlepszej precyzji w funkcji średniej liczby fotonów w układzie dla różnych strat znajduje się na rys (4.4). Dla $\eta = 1$ skalowanie osiąga granicę Heisenberga, podczas gdy dla innych współczynników strat tylko skalowanie szumu śrutowego. Warto zauważyć, że w układzie z opóźnieniem fazowym równomiernie rozdzielonym pomiędzy wiązki otrzymujemy gorszą precyzję niż w układzie z opóźnieniem fazowym tylko w jednym ramieniu (rys. (4.2)).

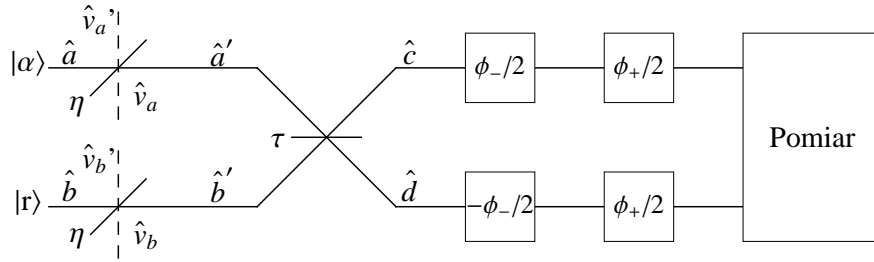
4.2. Przypadek dwóch różnych faz w ramionach

Różnice w precyzji uzyskanej w (4.1) i (4.1.1) wynikają z faktu traktowania przesunięć fazowych w sposób absolutny, tak jakby były one liczone względem dodatkowego układu odniesienia (np. trzeciej wiązki). Jeśli przyjąć takie podejście w sposób konsekwentny, to należy przyjąć, że estymujemy tak na prawdę dwa różne przesunięcia fazowe w dwóch różnych ramionach interferometru. W tej sytuacji generatory przesunięć fazowych to $G_1 = c^\dagger c$ dla fazy ϕ_1 w górnym ramieniu oraz $G_2 = d^\dagger d$ dla fazy ϕ_2 w dolnym ramieniu. Odpowiednie informacje Fischera dla tych generatorów są dane równaniem (4.18), przy czym dla ϕ_2 należy zamienić τ na $1-\tau$ i odwrotnie.

Najczęściej jednak interesuje nas pomiar różnicy faz. Możemy więc, zamiast dwóch faz ϕ_1 i ϕ_2 , rozważać układ zmieniający się pod wpływem sumy i różnicy faz, odpowiednio $\phi_+ = \phi_1 + \phi_2$ oraz $\phi_- = \phi_1 - \phi_2$. Zamieniając zmienne w ten sposób dostaniemy $\phi_1 = \frac{1}{2}(\phi_+ + \phi_-)$ i $\phi_2 = \frac{1}{2}(\phi_+ - \phi_-)$. Schemat takiego układu znajduje się na rys. (4.5)



Rysunek 4.4: Skalowanie optymalnej precyzji $\Delta\phi$ możliwej do uzyskania przy użyciu równania (4.21). $\eta = 1$ (niebieski, ciągły), $\eta = 0,9$ (fioletowy, kreski), $\eta = 0,5$ (zielony, kropki i kreski), $\eta = 0,2$ (żółty, kropki).



Rysunek 4.5: Interferometr Macha-Zehndera ze stratami w rozważanej konfiguracji

W tej sytuacji mamy dwa różne generatory przesunięć fazowych $G_+ = \frac{1}{2}(\hat{c}^\dagger \hat{c} + \hat{d}^\dagger \hat{d}) = \frac{1}{2}(\hat{a}'^\dagger \hat{a}' + \hat{b}'^\dagger \hat{b}')$ dla sumy oraz $G_- = \frac{1}{2}(\hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{d}^\dagger \hat{d}) = \frac{1}{2}(1 - 2\tau)(\hat{b}'^\dagger \hat{b}' - \hat{a}'^\dagger \hat{a}') + \sqrt{\tau(1 - \tau)}(\hat{a}'^\dagger \hat{b}' + \hat{b}'^\dagger \hat{a}')$ dla różnicy. Diagonalne elementy macierzy Fischera liczymy używając wzoru (2.38), biorąc odpowiednie generatory. Postępując analogicznie do przypadku z fazą w jednym ramieniu, dostajemy informację Fischera F_{++} dla sumy i F_{--} dla różnicy faz. F_{++} można otrzymać wstawiając $\tau = \frac{1}{2}$ w równaniu (4.17). Otrzymujemy w ten sposób, że

$$F_{++} = \eta|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \frac{\eta \sinh^2(2r)}{1 + 2\eta(1 - \eta) \sinh^2(r)} \quad (4.22)$$

F_{--} jest takie samo jak w (4.1.1) i dane jest równaniem (4.21).

Aby policzyć wyraz pozadiagonalny macierzy Fischera skorzystamy z własności SLD dla ϕ_+ i ϕ_- . Rozważmy równania na SLD dla ϕ_1 i ϕ_2 :

$$-2i(\hat{G}_1\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{G}_1) = \hat{\Lambda}_1\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\Lambda}_1 \quad (4.23)$$

$$-2i(\hat{G}_2\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{G}_2) = \hat{\Lambda}_2\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\Lambda}_2 \quad (4.24)$$

Ponieważ $G_+ = \frac{1}{2}(G_1 + G_2)$ i $G_- = \frac{1}{2}(G_1 - G_2)$, to dodając i odejmując stronami równania 4.23 i 4.24 oraz dzieląc je przez dwa, dostajemy:

$$-2i(\hat{G}_+\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{G}_+) = \frac{1}{2}((\Lambda_1 + \Lambda_2)\hat{\rho} + \hat{\rho}(\Lambda_1 + \Lambda_2)) \quad (4.25)$$

$$-2i(\hat{G}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{G}_-) = \frac{1}{2}((\Lambda_1 - \Lambda_2)\hat{\rho} + \hat{\rho}(\Lambda_1 - \Lambda_2)) \quad (4.26)$$

Stąd otrzymujemy SLD dla sumy i różnicy faz, odpowiednio $\hat{\Lambda}_+ = \frac{1}{2}(\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2)$ i $\hat{\Lambda}_- = \frac{1}{2}(\hat{\Lambda}_1 - \hat{\Lambda}_2)$. Obliczając teraz wyraz mieszany mamy:

$$F_{+-} = \frac{1}{2}\text{Tr}(\hat{\rho}(\hat{\Lambda}_+\hat{\Lambda}_- + \hat{\Lambda}_-\hat{\Lambda}_+)) = \frac{1}{4}\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\Lambda}_1^2 - \hat{\rho}\hat{\Lambda}_2^2) = \frac{1}{4}(F_1 - F_2) \quad (4.27)$$

gdzie F_1 i F_2 oznaczają informacje Fischera odpowiednio dla pomiarów ϕ_1 i ϕ_2 . Dostajemy w ten sposób, że

$$F_{+-} = (1 - 2\tau)\left(\eta|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \frac{\eta \sinh^2(2r)}{1 + 2\eta(1 - \eta) \sinh^2(r)}\right) \quad (4.28)$$

W celu policzenia precyzji pomiaru różnicy faz skorzystamy ze wzoru (2.11)

$$\Delta\phi = \sqrt{\frac{F_{++}}{F_{++}F_{--} - F_{+-}^2}} \quad (4.29)$$

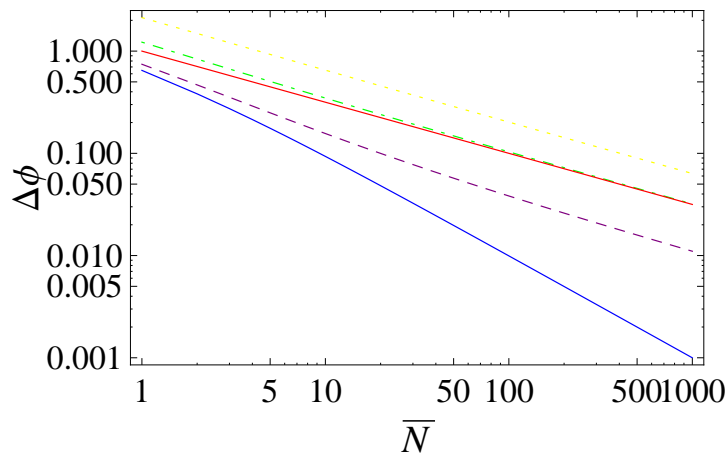
Wstawiając F_{++} , F_{--} i F_{+-} dostajemy

$$\Delta\phi = \sqrt{\frac{1}{4\tau(1 - \tau)\eta\left(\frac{|\alpha|^2}{1 - 2\eta e^{-r} \sinh(r)} + \sinh^2(r)\right)}} \quad (4.30)$$

Warto zwrócić uwagę, że uzyskana przez nas precyzja nie jest w ogólności równa ani pierwiastkowi z odwrotności informacji Fischera dla pomiaru pojedynczej fazy (równanie 4.18), mimo, że różnica faz jest tam taka sama, ani pierwiastkowi z odwrotności informacji Fischera dla różnicy faz (równanie 4.21). Konieczne jest uwzględnienie całej macierzy Fischera, a więc chcąc badać różnicę faz, należy zawsze mieć na uwadze możliwe komplikacje wynikające z potrzeby rozważania również sumy faz. Optymalną precyzję uzyskamy biorąc symetryczny interferometr, czyli $\tau = \frac{1}{2}$. Tak otrzymana precyzja zgadza się z precyzją otrzymaną wcześniej w pracy [10]. Trzeba jednak pamiętać, że dzieje się tak jedynie na skutek przypadku, gdyż dla symetrycznego interferometru Macha-Zehndera znikają wyrazy pozadiagonalne w macierzy Fischera dotyczącej sumy i różnicy faz (wzory (4.22)),

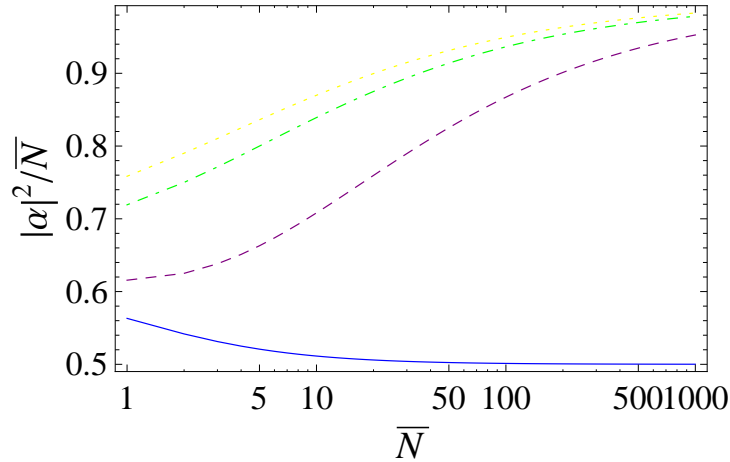
(4.21) i (4.28)). Podobne kontrowersje dotyczą także pracy [18]. W tym przypadku arbitralnie wybrano przypadek z przesunięciem fazowym umieszczonym tylko w jednym ramieniu interferometru przez co uzyskana precyzja liczona na podstawie kwantowej informacji Fischera nie ma bezpośredniego znaczenia eksperymentalnego.

Aby porównać precyzje uzyskiwane dla różnych współczynników strat, wykreśliłem (rys. 4.6) ich minimalną (czyli najlepszą) wartość w funkcji średniej liczby fotonów w układzie $\bar{N} = |\alpha|^2 + \sinh^2 r$. Podobnie jak w przypadku klasycznej informacji Fischera, także tutaj dla $\eta = 1$ (czyli gdy nie ma strat), skalowanie osiąga granicę Heisenberga. Dla innych strat skalowanie jest gorsze i osiąga granicę szumu śrutowego. W celu zobaczenia jaką część fotonów należy przeznaczyć do stanu koherentnego wykonałem wykres zależności średniej liczby fotonów w stanie koherentnym w zależności od średniej liczby fotonów w układzie dla różnych współczynników strat (rys. (4.7)). Z rysunku tego widać, że wraz ze wzrostem średniej liczby fotonów w układzie opłacalne staje się wpuszczanie coraz większej ich ilości do układu w stanie koherentnym z wyjątkiem przypadku gdy mamy bardzo małe straty.



Rysunek 4.6: Precyzja pomiaru różnicy faz w funkcji średniej liczby fotonów w układzie. $\eta = 1$ (niebieski, ciągły), $\eta = 0,9$ (fioletowy, kropki i kreski), $\eta = 0,5$ (zielony, kropki i kreski), $\eta = 0,2$ (żółty, kropki). Dla porównania, czerwona linia ilustruje skalowanie osiągnięte bez użycia stanu ściśniętego w przypadku gdy nie ma strat. Wykres zrobiłem przy założeniu symetrycznego interferometru, tzn. $\tau = \frac{1}{2}$

Jeśli rozważymy tylko i wyłącznie precyzję, którą otrzymaliśmy zakładając, że przesunięcie fazowe znajduje się wyłącznie w górnym ramieniu interferometru (równanie (4.18), to otrzymamy w wyniku (dla $\tau = \frac{1}{2}$) nieco lepsze rezultaty. Również w tym przypadku skalowanie dla sytuacji bez strat osiąga granicę Heisenberga, zaś w obecności strat, tylko skalowanie szumu śrutowego. Warto zauważyć jednak, że w tym przypadku, symetryczny interferometr nie jest optymalnym wyborem. Najlepszy rezultat można bowiem otrzy-



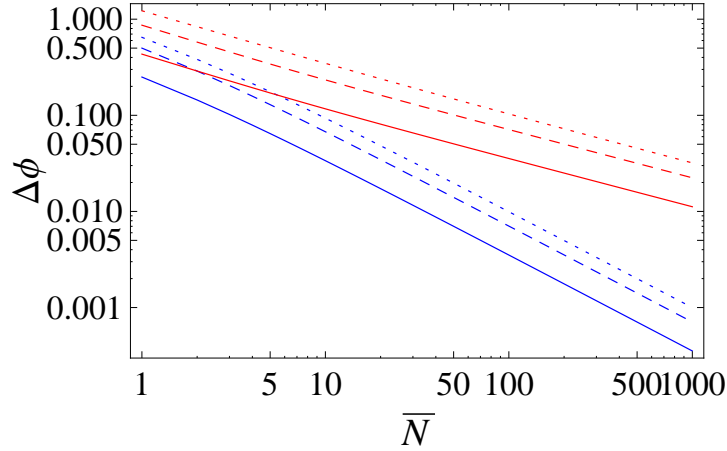
Rysunek 4.7: Średnia liczba fotonów w stanie koherentnym, które należy wpuścić do układu aby otrzymać optymalną precyzję w funkcji średniej liczby fotonów w układzie. $\eta = 1$ (niebieski, ciągły), $\eta = 0,9$ (fioletowy, kreski), $\eta = 0,5$ (zielony, kropki i kreski), $\eta = 0,2$ (żółty, kropki). Wykres zrobiłem przy założeniu symetrycznego interferometru, tzn. $\tau = \frac{1}{2}$

mać biorąc $\tau = 0$, czyli wpuszczając do układu wyłącznie stan ściśnięty, co można łatwo zrozumieć, uświadamiając sobie, że drugie ramię interferometru jest bezużyteczne w sytuacji, w której mamy „za darmo” (czyli nie wliczamy go do źródeł światła) dodatkowy, zewnętrzny mod odniesienia dla przesunięć fazowych.

W celu porównania precyzji otrzymanych przy założeniu przesunięcia fazowego tylko w jednym ramieniu, przesunięcia rozłożonego symetrycznie pomiędzy ramiona interferometru oraz przy uwzględnieniu całej macierzy Fischera, wykreśliłem je na rys. (4.8). Widać z niego, że precyzja obliczona na podstawie całej macierzy Fischera jest największa ze wszystkich a zatem najgorsza. Oznacza to, że rzeczywista, mająca znaczenie eksperymentalne precyzja jest większa niż wynikałoby to z rozważań prowadzonych w sekcjach (4.1) i (4.1.1).

4.2.1. Uśrednienie po fazie

Przy poprzednim wyprowadzeniu kwantowej informacji Fischera założyłem, że stan wysyłany do interferometru jest znany całkowicie, w szczególności posiadamy kontrolę nad fazą stanu koherentnego i ściśniętego, co w praktyce oznacza iż dysponujemy pewną dodatkową wiązką odniesienia, względem której te fazy są określone. Jeśli to założenie nie jest spełnione i na wejście układu dociera stan z nieznaną fazą, to aby właściwie



Rysunek 4.8: Precyzja pomiaru różnicy faz w funkcji średniej liczby fotonów w układzie uzyskana przy pomocy trzech podejść rozważanych w tym rozdziale. Kolorem niebieskim oznaczone są wykresy dla $\eta = 1$, zaś kolorem czerwonym dla $\eta = 0,9$. Linia ciągłą oznaczona jest precyzja policzona przy założeniu przesunięcia fazowego tylko w jednym ramieniu, kreskami przy założeniu symetrycznego rozłożenia przesunięć fazowych zaś kropkami dzięki uwzględnieniu całej macierzy Fischera. Wykres ostatniej wielkości zrobiłem dla tzn. $\tau = \frac{1}{2}$, zaś pozostałych precyzji dla $\tau = 0$.

rozważyć problem estymacji, należy ten stan po tej fazie uśrednić, tzn:

$$\hat{\rho} = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{2\pi} |\alpha e^{i\xi}\rangle \langle \alpha e^{i\xi}| \otimes |re^{2i\xi}\rangle \langle re^{2i\xi}| \quad (4.31)$$

Z postaci powyższej macierzy gęstości wynika, że istotna jest w tym przypadku wyłącznie względna faza pomiędzy stanami wejściowymi. Oznacza to, że przy pomiarze różnicy opóźnień fazowych nieistotne jest w jaki sposób rozmieścimy przesunięcia fazowe, tzn wszystkie trzy przypadki rozważone przeze mnie poprzednio w tym rozdziale powinny dawać ten sam rezultat. W związku z tym w dalszych rozważaniach przyjąłem że przesunięcie fazowe jest rozdzielone równomiernie i generator przesunięcia jest równy $G_- = \frac{1}{2}(\hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{d}^\dagger \hat{d}) = \frac{1}{2}(1 - 2\tau)(\hat{b}^\dagger \hat{b}' - \hat{a}'^\dagger \hat{a}') + \sqrt{\tau(1-\tau)}(\hat{a}'^\dagger \hat{b}' + \hat{b}'^\dagger \hat{a}')$.

Obliczenie F_Q dla tego typu stanu jest trudniejsze ze względu na to, że mamy do czynienia ze stanem mieszanym który na dodatek nie jest stanem gaussowskim. Dla $\eta \neq 1$ przeprowadziłem obliczenia numeryczne w celu znalezienia F_Q . Udało mi się natomiast

obliczyć F_Q analitycznie dla $\eta = 1$. W tym przypadku mamy na wejściu stan

$$\hat{\rho} = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{2\pi} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \sum_{m,m'=0}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\cosh(r)} \frac{\alpha^n \alpha^{*n'}}{\sqrt{n!n'!}} \frac{H_m(0)H_{m'}(0)}{\sqrt{m!m'!}} \left(\frac{\operatorname{tgh}(r)}{2}\right)^{(m+m')/2} e^{i\theta(m-m')/2} \cdot e^{i\xi(n+m-n'-m')} |n, m\rangle \langle n', m'| = \sum_{n,n'=0}^{\infty} \sum_{m,m'=0}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\cosh(r)} \frac{\alpha^n \alpha^{*n'}}{\sqrt{n!n'!}} \frac{H_m(0)H_{m'}(0)}{\sqrt{m!m'!}} \left(\frac{\operatorname{tgh}(r)}{2}\right)^{(m+m')/2} \cdot e^{i\theta(m-m')/2} |n, m\rangle \langle n', m'| \delta_{n+m, n'+m'} \quad (4.32)$$

Z postaci delty wynika, że niezerowe są tylko te elementy macierzy gęstości, które odpowiadają tej samej całkowitej liczbie fotonów, zatem macierz ta ma postać blokową:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \rho_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \rho_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

gdzie ρ_N oznacza macierz gęstości dla stanu N fotonowego. Przedstawiając $\hat{\rho}$ explicite w powyższej formie otrzymujemy:

$$\hat{\rho} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n,m=0}^N \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\cosh(r)} \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} \frac{H_{N-n}(0)H_{N-m}(0)}{\sqrt{(N-n)!(N-m)!}} \left(\frac{\operatorname{tgh}(r)}{2}\right)^{N-(n+m)/2} e^{i\theta(m-n)/2} |n, N-n\rangle \langle m, N-m| \quad (4.34)$$

Wektory własne tej macierzy to

$$|v_N\rangle = A_N \sum_{n=0}^N \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{H_{N-n}(0)}{\sqrt{(N-n)!}} \left(\frac{\operatorname{tgh}(r)}{2}\right)^{(N-n)/2} e^{-i\theta n/2} |n, N-n\rangle, \quad (4.35)$$

gdzie A_N odpowiadają za normalizację, zaś odpowiadające im wartości własne:

$$p_N = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\cosh(r)} \frac{1}{A_N^2} \quad (4.36)$$

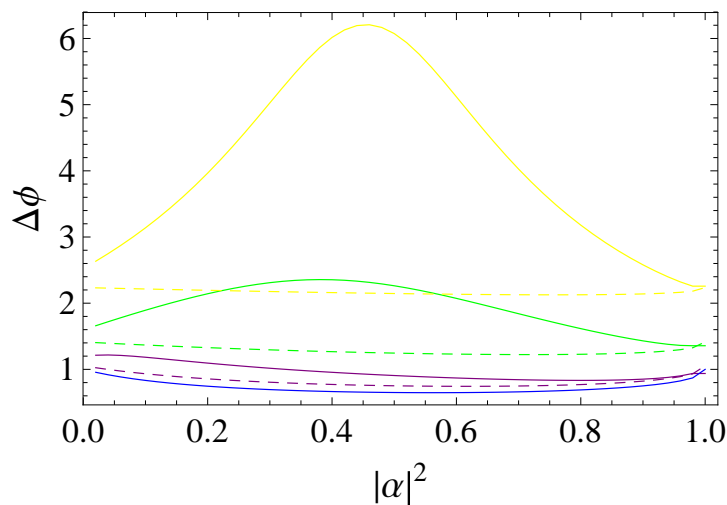
Stąd, korzystając ze wzoru (2.38) dostajemy, że

$$F_Q = 4\tau(1-\tau) \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\cosh(r)} \left[\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{H_{N-n}^2(0)}{(N-n)!} \left(\frac{\operatorname{tgh}(r)}{2}\right)^{N-n} (2n(N-n) + N) + \right. \\ \left. - 2 \sum_{N=2}^{\infty} \sum_{n=2}^N \frac{|\alpha|^{2n-2}}{(n-2)!} \frac{H_{N-n}(0)H_{N-n+2}(0)}{(N-n)!} \left(\frac{\operatorname{tgh}(r)}{2}\right)^{N-n+1} \right] \quad (4.37)$$

Ze wzoru (4.37) widać, że podobnie jak w przypadku dla stanu czystego (nieuśrednionego po fazie), także i tutaj najlepsza precyzja jest osiągnięta dla $\tau = \frac{1}{2}$. Oznacza to, że symetryczny interferometr jest najlepszy do pomiaru różnicy faz także i w tej sytuacji.

Okazuje się, że F_Q dla stanu uśrednionego po fazie (dla dowolnych η) jest równe klasycznej informacji Fischera z dopasowaniem faz przy założeniu pomiarów opartych o zliczanie fotonów w interferometrze Macha-Zehndera (podrozdział (3.2)). Oznacza to, że wówczas pomiar wykonany przy użyciu zliczania fotonów, omówiony w sekcji poświęconej klasycznej informacji Fischera z dopasowaniem faz, jest optymalny (rys. (3.7)).

W ogólności, informacja Fischera dla stanu uśrednionego po fazie da się policzyć jedynie numerycznie. Na rys. (4.9) znajduje się wykres precyzji uzyskiwanej dla różnych parametrów strat przy zastosowaniu stanu uśrednionego po fazie. Z rysunku tego widać, że wykorzystanie stanów uśrednionych po fazie daje gorszą precyzję niż użycie stanów czystych (nieuśrednionych). Wyjątkiem jest przypadek be strat ($\eta = 1$), gdzie okazuje się, że precyzje uzyskiwane oboma sposobami są sobie równe.



Rysunek 4.9: Wykres precyzji pomiaru różnicy faz otrzymywanej przy użyciu stanu uśrednionego po fazie dla różnych współczynników strat w układzie w funkcji średniej liczby fotonów w stanie koherentnym dla $\tau = \frac{1}{2}$ i średniej liczby fotonów w układzie $\bar{N} = 1$. $\eta = 1$ (niebieski, ciągła), $\eta = 0,9$ (fioletowy, ciągła), $\eta = 0,5$ (zielony, ciągła), $\eta = 0,2$ (żółty, ciągła). Dla porównania, na rysunku znajdują się wykresy precyzji uzyskiwanej przy użyciu stanów czystych (kreski). $\eta = 0,2$ (żółty), $\eta = 0,5$ (zielony), $\eta = 0,9$ (fioletowy). Dla $\eta = 1$ odpowiednie wykresy pokrywają się.

4.2.2. Przykład: Splątany stan koherentny na wejściu układu

W zakończeniu sekcji poświęconej przypadkowi z dwoma różnymi przesunięciami fazowymi wspominałem o pewnych niejasnościach w pracy [18]. Dokładna analiza sytuacji rozważanej w tym artykule powinna być przeprowadzona analogicznie do przypadku obliczonego poprzednio. Oznacza to, że jeśli chcemy obliczyć precyzję pomiaru różnicy faz, musimy poznać całą macierz Fischera. Stan wejściowy w tym przypadku to, zgodnie z

[18]

$$|\Psi\rangle = \mathcal{N}_\alpha(|\alpha\rangle|0\rangle + |0\rangle|\alpha\rangle) \quad (4.38)$$

gdzie $\mathcal{N}_\alpha = 1/\sqrt{2(1+e^{-|\alpha|^2})}$. Stan ten można interpretować jako superpozycję stanów NOON z odpowiednimi współczynnikami. Warto zwrócić uwagę, że z postaci tego stanu wynika, iż podobnie jak w sekcjach (4.1), (4.1.1) i (4.1.2) posiadamy pełną kontrolę nad fazą stanów wejściowych.

Korzystając teraz ze wzoru (2.39), dostajemy diagonalne elementy macierzy Fischera dla pomiaru sumy i różnicy faz oraz dla pomiaru każdej z faz w ramionach z osobna.

$$F_{++} = 2|\alpha|^2 \mathcal{N}_\alpha^2 (|\alpha|^2 + 1 - 2|\alpha|^2 \mathcal{N}_\alpha^2) \quad (4.39)$$

$$F_{--} = 2|\alpha|^2 \mathcal{N}_\alpha^2 (1 + |\alpha|^2) \quad (4.40)$$

$$F_{11} = 4|\alpha|^2 \mathcal{N}_\alpha^2 (|\alpha|^2 + 1 - |\alpha|^2 \mathcal{N}_\alpha^2) \quad (4.41)$$

$$F_{22} = 4|\alpha|^2 \mathcal{N}_\alpha^2 (|\alpha|^2 + 1 - |\alpha|^2 \mathcal{N}_\alpha^2) \quad (4.42)$$

Stąd, zgodnie ze wzorem (4.27), otrzymujemy, że

$$F_{+-} = 0 \quad (4.43)$$

Zatem precyzja pomiaru różnicy faz będzie dana przez

$$\Delta\phi_- = \frac{1}{|\alpha| \mathcal{N}_\alpha \sqrt{2(1+|\alpha|^2)}} \quad (4.44)$$

Jeślibyśmy natomiast założyli, że całe przesunięcie fazowe znajduje się tylko w górnym ramieniu interferometru, to wówczas, zgodnie z pracą [18] dostalibyśmy precyzję będącą odwrotnością pierwiastka informacji Fischera dla pomiaru fazy w jednym z ramion (równanie (4.41)), czyli:

$$\Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{F_{11}}} = \frac{1}{2|\alpha| \mathcal{N}_\alpha \sqrt{|\alpha|^2 + 1 - |\alpha|^2 \mathcal{N}_\alpha^2}} \quad (4.45)$$

Jak widać, równania (4.44) i (4.45) dają różne rezultaty. Oznacza to, że w precyzja policzona w pracy [18] nie jest rzeczywistą, osiągalną w eksperymencie precyzją.

Osobną kwestią jest precyzja jaką da się osiągnąć przy użyciu splątanych stanów koherentnego uśrednionego po wspólnej fazie. W takiej sytuacji na wejściu rozważanego układu posiadamy stan dany macierzą gęstości

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{2\pi} \mathcal{N}_\alpha^2 (|\alpha e^{i\xi}\rangle|0\rangle + |0\rangle|\alpha e^{i\xi}\rangle) (\langle\alpha e^{i\xi}| \langle 0| + \langle 0| \langle \alpha e^{i\xi}|) = \\ &= \mathcal{N}_\alpha^2 e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} (|n\rangle|0\rangle + |0\rangle|n\rangle) (\langle n| \langle 0| + \langle 0| \langle n|) \end{aligned} \quad (4.46)$$

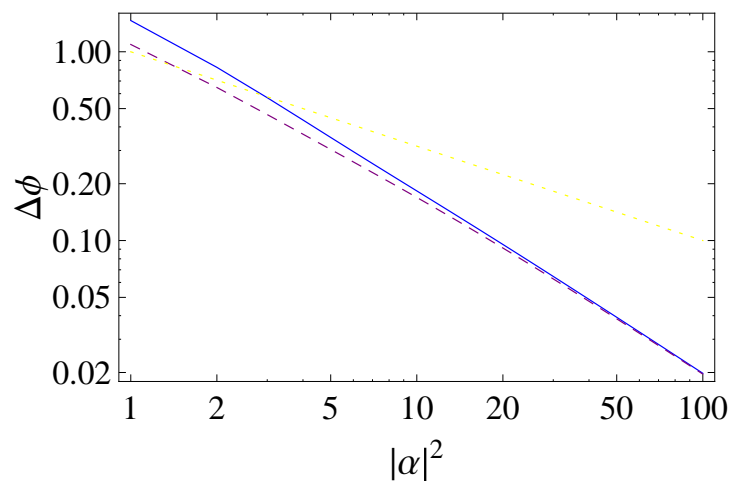
Wektory własne $\hat{\rho}$ są równe $|v_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle|0\rangle + |0\rangle|n\rangle)$, zaś wartości własne to $p_n = 2\mathcal{N}_\alpha^2 e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$.

Ponieważ jedyną wielkość jaką jesteśmy w stanie zmierzyć przy użyciu stanu uśrednionego po fazie to różnica przesunięć fazowych, więc generator rozważanej transformacji to $\hat{G} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b})$. Wykorzystując wzór (2.38) dostajemy, że wszystkie elementy macierzy Fischera są równe 0 oprócz wyrazu odpowiadającego pomiarowi różnicy faz (przy użyciu stanu uśrednionego po fazie nie można zmierzyć sumy faz).

$$F_{--} = 2|\alpha|^2 \mathcal{N}_\alpha^2 (1 + |\alpha|^2) \quad (4.47)$$

Jest to taki sam wynik jak w przypadku nieuśrednionym po fazie, a co za tym idzie dolne ograniczenie na precyzję pomiaru różnicy przesunięć fazowych w obu tych przypadkach jest takie samo.

Na rys. (4.10) znajduje się wykres precyzji uzyskiwanych w obu podejściach (tzn. pomiar różnicy faz oraz pomiar fazy tylko w jednym ramieniu) w funkcji średniej liczby fotonów w układzie. Jak widać z rys. (4.10), dla dużej średniej liczby fotonów równania



Rysunek 4.10: Wykres precyzji $\Delta\phi$ otrzymywanej przy uwzględnieniu całej macierzy Fischera (równanie (4.44)) - linia ciągła, kolor niebieski, oraz precyzji otrzymanej na podstawie równania (4.45) - kreski, kolor fioletowy. Dodatkowo, dla porównania, na wykresie znajduje się precyzja jaką otrzymalibyśmy w sytuacji gdy całe przesunięcie fazowe znajduje się w jednym ramieniu i do układu wpuszczamy stan $|\alpha 0\rangle$ - kropki, kolor żółty.

(4.45) i (4.44) dają taką samą precyzję. Dla małej liczby fotonów różnice są jednak wyraźne i, jak widać z rysunku, okazuje się że, precyzja pomiaru różnicy faz jest gorsza od tej przewidzianej w pracy [18] (równanie (4.45)). Okazuje się także, że dla małej liczby fotonów w układzie lepiej jest zastosować po prostu zwykły stan koherentny.

4.3. Podsumowanie

Podstawowym wnioskiem płynącym z wyników przedstawionych w tym rozdziale, jest konieczność opisu ograniczenia na precyzję przy użyciu całej macierzy Fischera, a nie tylko elementu odpowiadającego mierzonemu parametrowi. Nieuwzględnienie tego faktu może prowadzić do rezultatów nie mających znaczenia eksperymentalnego, tak jak w pracy [18].

Dolne ograniczenie na precyzję pomiaru różnicy przesunięć fazowych, którą można uzyskać w interferometrze Macha-Zehndera, jest dane wzorem (4.30). Okazuje się że najlepszym wyborem jest symetryczny interferometr ze współczynnikiem transmisji pierwszej płytki światłodzieliącej $\tau = \frac{1}{2}$. Precyzja jaką jesteśmy w stanie osiągnąć w przypadku braku strat osiąga skalowanie Heisenberga, podczas gdy jeśli straty są duże tylko skalowanie szumu śrutowego. Ponadto, wraz ze zwiększaniem się średniej liczby fotonów w układzie, dla większości współczynników strat (oprócz bardzo małych strat) opłaca się wpuszczać fotony do układu głównie w stanie koherentnym. Trzeba jednak pamiętać, że precyzja obliczona dla stanów czystych (nieuśrednionych po fazie) jest w ogólności możliwa do osiągnięcia przy użyciu pomiarów ogólniejszych niż tylko zliczanie fotonów, trzeba bowiem uwzględnić fakt istnienia silnej wiązki odniesienia, względem której określamy fazy stanów wejściowych. Temu zagadnieniu będzie poświęcony następny rozdział.

W przypadku gdy na wejściu układu posiadamy stan uśredniony po wspólnej fazie, kwantowa informacja Fischera daje nam ograniczenie na precyzję gorsze od tego możliwego do uzyskania przy wykorzystaniu stanów nieuśrednionych jednak okazuje się że dla tego przypadku osiągnięta jest taka sama precyzja co w sytuacji klasycznej informacji Fischera z dopasowaniem faz. Pozwala to na stwierdzenie że pomiar zaproponowany na rys. (3.7) jest optymalny dla tego przykładu.

Rozdział 5

Precyzja w obecności dodatkowego modu odniesienia

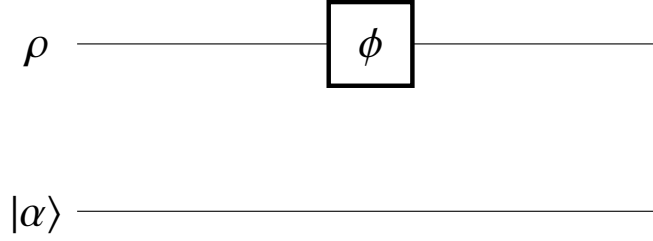
W obliczeniach wykonywanych w pracy do tej pory zawsze zakładaliśmy, że mamy do dyspozycji tylko dwie wiązki, których używamy do dokonywania pomiarów (są to wiązki sygnałowe). W przypadku gdy mieliśmy do czynienia ze stanem $|\alpha\rangle \otimes |r\rangle$ w pełni znaliśmy fazę stanu wejściowego, a co za tym idzie, robiliśmy milczące założenie posiadania dodatkowej silnej, klasycznej wiązki odniesienia, której nie wliczamy do źródeł, a dzięki której jesteśmy w stanie ustalić fazę stanu wejściowego. W przeciwnym wypadku, musimy uwzględnić to, że w ogóle nie znamy fazy stanu na wejściu układu, czyli w istocie zamiast stanu czystego $|\alpha\rangle \otimes |r\rangle$ mamy stan mieszany $\hat{\rho} = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{2\pi} |\alpha e^{i\xi}\rangle |r e^{i2\xi}\rangle \langle \alpha e^{i\xi}| \langle r e^{i2\xi}|$.

Rozważając bardziej ogólną sytuację, powinniśmy uwzględnić dodatkową wiązkę odniesienia w stanie koherentnym $|\beta\rangle$, gdzie $\beta \in (0, \infty)$. Wówczas przypadek posiadania stanu czystego odpowiadałby $|\beta| \rightarrow \infty$, czyli klasycznemu modowi odniesienia, zaś przypadek stanu uśrednionego po fazie oznaczałby $\beta = 0$ (sytuacja bez dodatkowej wiązki). Dla innych wartości parametru β otrzymalibyśmy sytuacje pośrednie.

W tym rozdziale przedstawię informację Fischera dla pomiaru fazy dla dwóch różnych układów z dowolnymi stanami wejściowymi oraz z modem odniesienia w stanie koherentnym. W części pierwszej omówię układ jednomodowy. W części drugiej zajmę się przypadkiem dwumodowym, którego szczególnym przypadkiem jest interferometr Macha-Zehndera. W każdej z powyższych sytuacji rozważę osobno przypadki graniczne klasycznego stanu odniesienia, bądź jego zupełnego braku.

5.1. Jeden mod sygnałowy

Rozważmy sytuację przedstawioną na rys. 5.1. Światło, w stanie opisanym macierzą gęstości $\hat{\rho}$, przechodzi przez przesunięcie fazowe ϕ i następnie trafia na wyjście układu do urządzenia pomiarowego. Możemy się zapytać, czy da się w takiej sytuacji powiedzieć coś o wartości ϕ , tzn. chcielibyśmy znać dokładność, z jaką możemy estymować fazę w takim układzie.

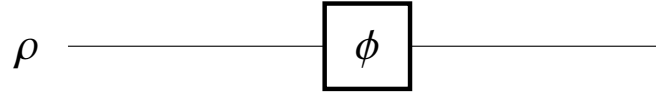


Rysunek 5.1: Schemat jednomodowego układu do estymacji fazy z wiązką odniesienia.

Założmy na początku, że na wejściu układu w wiązce sygnałowej mamy stan czysty $|\Psi\rangle$. Ogólny jednomodowy stan czysty możemy zapisać w bazie Focka jako $|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$, gdzie $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1$. Rozważę poniżej osobno przypadki, gdy mamy do dyspozycji mod odniesienia, oraz gdy jesteśmy go pozbawieni.

5.1.1. Bez wiązki odniesienia

Jeśli wiązka odniesienia jest nieobecna, to rozważany przez nas układ wygląda tak, jak na rys. 5.2.



Rysunek 5.2: Schemat interferometru jednomodowego bez wiązki odniesienia.

Zastanówmy się, jaką precyzję pomiaru fazy będziemy w stanie uzyskać, jeśli do układu wpuścimy stan $|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ uśredniony po fazie. Wówczas rozważanym przez nas stanem na wejściu będzie stan mieszany następującej postaci:

$$\hat{\rho} = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{2\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} c_n c_m^* e^{i(n-m)\xi} |n\rangle \langle m| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |n\rangle \langle n| \quad (5.1)$$

Taki stan, zgodnie z tym czego można było oczekiwać, jest jednak zupełnie nieczuły na jakiegokolwiek przesunięcie fazowe. Po przejściu przez nasz układ otrzymalibyśmy bowiem stan:

$$\hat{\rho}(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 e^{in\phi} e^{-in\phi} |n\rangle \langle n| = \hat{\rho} \quad (5.2)$$

Dzieje się tak, gdyż mamy tutaj tylko elementy diagonalne w macierzy gęstości, których są nieczułe na zmianę fazy i w efekcie przesunięcia fazowego dostajemy stan wejściowy. Oznacza to, że jeśli chcielibyśmy dokonać estymacji fazy w takim układzie, musielibyśmy użyć stanu nieuśrednionego po fazie na wejściu a to oznacza konieczność istnienia dodatkowej wiązki odniesienia.

5.1.2. W obecności wiązki odniesienia

Rozważmy najpierw sytuację w której znamy dokładnie fazę stanu na wejściu układu $|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$, co oznacza że dysponujemy klasyczną wiązką odniesienia. Po przejściu przez opóźnienie fazowe ϕ , światło będzie w stanie $|\Psi(\phi)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\phi} |n\rangle$. Ponieważ mamy do czynienia ze stanem czystym, więc informacja Fischera dana jest równaniem (2.39). Wstawiając $|\Psi(\phi)\rangle$ do równania (2.39) dostajemy następujące wyrażenie na informację Fischera:

$$F = 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 n^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 n \right)^2 \right) \quad (5.3)$$

Wyrażenie (5.3) w ogólności może być różne od zera, co oznacza, że jesteśmy w stanie przeprowadzić estymację fazy.

Zobaczmy teraz co stanie się, gdy explicite uwzględnimy obecność dodatkowej wiązki odniesienia (rys. 5.1). Ponownie założymy, że w modzie sygnałowym mamy stan czysty $|\Psi\rangle$, ale tym razem w drugim modzie, nieprzechodzącym przez opóźnienie fazowe, mamy stan koherentny $|\alpha\rangle$. Ponieważ nie określamy fazy każdej z wiązek w sposób absolutny, musimy uśrednić po wspólnej fazie stan $|\Psi\rangle$ i $|\alpha\rangle$. Robimy to obkładając każdy ze stanów operatorem fazy $\hat{U}_\xi = e^{i\xi\hat{n}}$. W tym przypadku całkowity stan na wejściu opisuje następująca macierz gęstości:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \int \frac{d\xi}{2\pi} \hat{U}_\xi |\Psi\rangle \langle \Psi| \hat{U}_\xi^\dagger \otimes \hat{U}_\xi |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{U}_\xi^\dagger = \\ &= e^{-|\alpha|^2} \int \frac{d\xi}{2\pi} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \sum_{m,m'=0}^{\infty} c_n c_{n'}^* \frac{\alpha^m \alpha^{*m'}}{\sqrt{m!m'}} e^{i\xi(n+m-n'-m')} |n, m\rangle \langle n', m'| = \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \sum_{m,m'=0}^{\infty} c_n c_{n'}^* \frac{\alpha^m \alpha^{*m'}}{\sqrt{m!m'}} |n, m\rangle \langle n', m'| \delta_{n+m, n'+m'} = \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k,k'=0}^N c_k c_{k'}^* \frac{\alpha^{N-k} \alpha^{*N-k'}}{\sqrt{(N-k)!(N-k)!}} |k, N-k\rangle \langle k', N-k'| \quad (5.4) \end{aligned}$$

Aby skorzystać ze wzoru (2.38) i policzyć kwantową informację Fischera, konieczna jest znajomość wektorów i wartości własnych macierzy gęstości (5.4). Wektory własne tej macierzy gęstości można odczytać z jej postaci i są one następujące:

$$|v_M\rangle = A_M \sum_{l=0}^M c_l \frac{\alpha^{M-l}}{\sqrt{(M-l)!}} |l, M-l\rangle \quad (5.5)$$

gdzie $A_M = \left(\sum_{l=0}^M |c_l|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-l)}}{(N-l)!} \right)^{-1/2}$ jest stałą normalizacyjną. Obliczając $\hat{\rho}|v_M\rangle$ dosta-

jemy:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}|v_M\rangle &= A_M e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k,k'=0}^N \sum_{l=0}^M c_k c_{k'}^* c_l \frac{\alpha^{N-k} \alpha^{*N-k'} \alpha^{M-l}}{\sqrt{(N-k)!(N-k')!(M-l)!}} |k, N-k\rangle \delta_{k',l} \delta_{N,M} = \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{l=0}^M |c_l|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-l)}}{(N-l)!} A_M \sum_{k=0}^M c_k \frac{\alpha^{M-k}}{\sqrt{(M-k)!}} |k, M-k\rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{|A_M|^2} |v_M\rangle\end{aligned}\quad (5.6)$$

stąd wartości własne $\hat{\rho}$ to $p_N = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{|A_N|^2}$.

Mając dane wszystkie te wielkości, można policzyć kwantową informację Fischera, wzięwszy za generator odpowiedzialny za zmiany fazy $\hat{G} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Biorąc pierwszy człon wzoru (2.38) dostajemy:

$$\begin{aligned}\langle \hat{G}^2 \rangle &= \sum_N p_N \langle v_N | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | v_N \rangle = \sum_N \frac{e^{-|\alpha|^2}}{|A_N|^2} |A_N|^2 \sum_{k,k'=0}^N c_k c_{k'}^* \frac{\alpha^{N-k} \alpha^{*N-k'}}{\sqrt{(N-k)!(N-k')!}} \\ &\langle k', N-k' | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | k, N-k \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_N \sum_{k=0}^N |c_k|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-k)}}{(N-k)!} k^2\end{aligned}\quad (5.7)$$

Pomimo tego co można by sądzić z (5.7), wyrażenie to jest niezależne od α . Jeśli spojrzeć na współczynnik stojący przy wybranym c_n (tzn. ustalamy n), to można otrzymać, że:

$$\langle \hat{G}^2 \rangle = \sum_n |c_n|^2 e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=n}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(N-n)}}{(N-n)!} n^2 = \sum_n |c_n|^2 n^2\quad (5.8)$$

Biorąc drugi człon z (2.38) dostajemy:

$$\begin{aligned}G_{MN} &= \langle v_M | \hat{G} | v_N \rangle = A_M^* A_N \sum_{l=0}^M \sum_{k=0}^N c_l^* c_k \frac{\alpha^{*M-l} \alpha^{N-k}}{\sqrt{(M-l)!(N-k)!}} \langle l, M-l | \hat{a}^\dagger \hat{a} | k, N-k \rangle = \\ &= A_M^* A_N \sum_{l=0}^M \sum_{k=0}^N c_l^* c_k \frac{\alpha^{*M-l} \alpha^{N-k}}{\sqrt{(M-l)!(N-k)!}} k \delta_{k,l} \delta_{M,N}\end{aligned}\quad (5.9)$$

$$G_{NM} = \langle v_N | \hat{G} | v_M \rangle = A_N^* A_M \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M c_l^* c_k \frac{\alpha^{*N-k} \alpha^{M-l}}{\sqrt{(N-k)!(M-l)!}} l \delta_{k,l} \delta_{M,N}\quad (5.10)$$

Stąd otrzymujemy, że:

$$\sum_{N,M} \frac{p_N p_M}{p_N + p_M} G_{NM} G_{MN} = e^{-|\alpha|^2} \sum_N \frac{|A_N|^2}{2} \left(\sum_{k=0}^N |c_k|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-k)}}{(N-k)!} k \right)^2\quad (5.11)$$

Ostatecznie dostajemy wzór na kwantową informację Fischera dla układu jednomodowego w obecności modu odniesienia w stanie koherentnym $|\alpha\rangle$:

$$F = 4 \sum_k |c_k|^2 k^2 - 4e^{-|\alpha|^2} \sum_N |A_N|^2 \left(\sum_{k=0}^N |c_k|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-k)}}{(N-k)!} k \right)^2\quad (5.12)$$

To, jaką precyzję jesteśmy w stanie uzyskać przy użyciu takiego układu zależy od α . Warto przeanalizować dwa przypadki graniczne jakie możemy tutaj mieć: przypadek bardzo słabej wiązki odniesienia $|\alpha| \rightarrow 0$, gdzie oczekivalibyśmy, że tak jak w przypadku stanu uśrednionego po fazie bez wiązki odniesienia, nie będziemy w stanie nic powiedzieć o przesunięciu fazowym, oraz sytuację silnej, klasycznej wiązki odniesienia $|\alpha| \rightarrow \infty$, w której z kolei oczekujemy, że otrzymamy wynik zgodny z tym danym przez równanie (5.3).

5.1.3. Przypadek graniczny $|\alpha|^2 \rightarrow 0$

W tym przypadku granicznym oczekivalibyśmy, że nic nie będziemy mogli dowiedzieć się o wartości przesunięcia fazowego, gdyż wraz z malejącą liczbą fotonów w stanie koherentnym (czyli wraz z malejącym $|\alpha|^2$) coraz słabiej jest określona faza wiązki sygnałowej. W szczególności dla $\alpha = 0$, czyli gdy w modzie odniesienia mamy stan próżni, powinniśmy otrzymać sytuację taką samą, jaką mieliśmy w pierwszej części sekcji 5.1.1, gdy rozważaliśmy przypadek bez wiązki odniesienia, za to z uśrednieniem po fazie.

Dla $|\alpha|^2 \rightarrow 0$ jedyny wkład do drugiego wyrazu w (5.12) będzie miał człon z $N-k = 0$, skąd:

$$F(0) = 4 \sum_k |c_k|^2 k^2 - 4 \sum_N \frac{1}{|c_N|^2} |c_N|^4 N^2 = 0 \quad (5.13)$$

Oznacza to, że gdy $|\alpha|^2 \rightarrow 0$, precyzja pomiaru fazy $\Delta\phi \rightarrow \infty$, czyli nic nie można powiedzieć o wartości ϕ , co zgadza się z rezultatem otrzymanym w sekcji 5.1.1.

5.1.4. Przypadek graniczny $|\alpha|^2 \rightarrow \infty$

Jeśli $|\alpha|^2$ dąży do nieskończoności, mamy do czynienia z klasycznym stanem odniesienia. W praktyce oznacza to, że w dodatkowej wiązce jest dużo więcej fotonów niż w modzie sygnałowym. Możemy zatem oczekiwać, że teoretycznie będziemy w stanie w dokładny sposób ustalić fazę wiązki sygnałowej i to tym lepiej, im większe będzie natężenie wiązki odniesienia. Oznacza to że, powinniśmy w rozważanej granicy otrzymać rezultat taki sam jak w drugiej części sekcji 5.1.1, gdy rozważaliśmy sytuację bez wiązki odniesienia, ale za to ze stanem sygnałowym nieuśrednionym po fazie.

Weźmy więc w równaniu (5.12) $|\alpha|^2 \gg \sum_N |c_N|^2 N$, co odpowiada sytuacji, kiedy w modzie odniesienia jest znacznie więcej fotonów niż w modzie sygnałowym. Ponieważ pierwszy człon w (5.1.1) nie zależy od α , to wystarczy zająć się tylko drugim. Zamieniając kolejność sumowania, możemy go przedstawić jako:

$$4e^{-|\alpha|^2} \sum_N |A_N|^2 \left(\sum_{k=0}^N |c_k|^2 k \frac{|\alpha|^{2(N-k)}}{(N-k)!} \right)^2 = 4 \sum_k |c_k|^4 k^2 \sum_{N=k}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{4(N-k)}}{(N-k)!^2} \left(\sum_{l=0}^N |c_l|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-l)}}{(N-l)!} \right)^{-1} +$$

$$+ 8 \sum_{k' < k} |c_k|^2 |c_{k'}|^2 k k' \sum_{N=k}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(N-k)} |\alpha|^{2(N-k')}}{(N-k)!(N-k')!} \left(\sum_{l=0}^N |c_l|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-l)}}{(N-l)!} \right)^{-1} \quad (5.14)$$

Zajmijmy się następującym wyrażeniem:

$$\begin{aligned} \sum_{N=k}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(N-k)} |\alpha|^{2(N-k')}}{(N-k)!(N-k')!} \left(\sum_{l=0}^N |c_l|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-l)}}{(N-l)!} \right)^{-1} = \\ = \sum_{N=k}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(N-k)}}{(N-k)!} \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(N-k')}}{(N-k')!} \left(\sum_{l=0}^N |c_l|^2 e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(N-l)}}{(N-l)!} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Zauważmy, że w tym wyrażeniu mamy iloczyn rozkładów Poissona o szerokości charakterystycznej $|\alpha|$ każdy. Dla bardzo dużych $|\alpha|^2$ (możemy wybrać je dowolnie duże) wkład będą miały tylko wyrazy, dla których $|N-s-|\alpha|^2| < |\alpha|$ oraz $s \ll |\alpha|$ ($s = k, k', l$), czyli takie, dla których można uznać każdy z rozkładów za niemal płaski. Oznacza to że w granicy $|\alpha| \rightarrow \infty$ można skrócić rozkład z k' z rozkładem z l i przejść z górną granicą sumowania w mianowniku do nieskończoności (bo dla dużych $|\alpha|$, na mocy przyjętych przez nas warunków, N zachowuje się tak jak $|\alpha|^2$), otrzymując następujący wynik

$$\begin{aligned} \sum_{N=k}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(N-k)}}{(N-k)!} \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(N-k')}}{(N-k')!} \left(\sum_{l=0}^N |c_l|^2 e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(N-l)}}{(N-l)!} \right)^{-1} \approx \\ \approx \sum_N e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(N-k)}}{(N-k)!} \left(\sum_l |c_l|^2 \right)^{-1} = 1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Oznacza to że drugi ze składników wyrażenia (5.14) jest równy $8 \sum_{k < k'} |c_k|^2 |c_{k'}|^2 k k'$. Ponieważ powyższe wyprowadzenie nie zależało w żaden sposób od k, k' ani l , więc podstawiając w (5.15) $k = k'$ otrzymujemy, na mocy tych samych argumentów co poprzednio, że pierwszy ze składników w (5.14) jest równy $4 \sum_k |c_k|^4 k^2$. Otrzymujemy stąd, że informacja Fischera w granicy $|\alpha|^2 \rightarrow \infty$ jest równa:

$$F_{\infty} = 4 \sum_k |c_k|^2 k^2 - 4 \sum_k |c_k|^4 k^2 - 8 \sum_{k' < k} |c_k|^2 |c_{k'}|^2 k k' = 4 \left(\sum_k |c_k|^2 k^2 - \left(\sum_k |c_k|^2 k \right)^2 \right) \quad (5.17)$$

Ten wynik, zgodnie z oczekiwaniami, zgadza się z tym otrzymanym w sekcji 5.1.1 dla przypadku bez wiązki odniesienia i bez uśrednienia. Można zatem wysnuć wniosek, że tak naprawdę, w sytuacji, w której posiadamy pełną znajomość fazy w stanie na wejściu układu, mamy na myśli sytuację przedstawioną na rys. (5.1) z bardzo silnym modem odniesienia, którego jednak nie wliczamy zazwyczaj do źródeł światła w eksperymencie. Dodatkowo, jednym z założeń w dowodzie było, że bierzemy $|\alpha|$ na tyle duże by k, k' i l były od niego znacznie mniejsze. W praktyce oznacza to, że w wiązce odniesienia musimy posiadać kwadratowo więcej fotonów niż w wiązce sygnałowej. Podobny rezultat został otrzymany w pracy [24]. W takiej granicy, precyzja jest praktycznie równa tej, którą otrzymalibyśmy wpuszczając na wejściu stan czysty (nieuśredniony po fazie).

5.1.5. Ogólny stan mieszany na wejściu

W dwóch poprzednich sekcjach omówiliśmy, co dzieje się, gdy w modzie sygnałowym mieliśmy stan czysty. W ogólnej sytuacji możemy jednak przepuszczać przez przesunięcie

fazowe dowolny stan mieszany $\hat{\rho} = \sum \rho_{kk'} |k\rangle\langle k'|$, co może być wynikiem np. strat w układzie itp. Macierz gęstości całkowitego stanu wejściowego po uwzględnieniu dodatkowego modu w stanie koherentnym $|\alpha\rangle$ jest równa:

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \int \frac{d\xi}{2\pi} \hat{U}_\xi \hat{\rho} \hat{U}_\xi^\dagger \otimes \hat{U}_\xi |\alpha\rangle\langle\alpha| \hat{U}_\xi^\dagger = \\ &= e^{-|\alpha|^2} \int \frac{d\xi}{2\pi} \sum_{k,k'=0}^{\infty} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \rho_{kk'} \frac{\alpha^n \alpha^{*n'}}{\sqrt{n!n'}} e^{i\xi(k+n-k'-n')} |k, n\rangle\langle k', n'| = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k,k'=0}^N \rho_{kk'} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{N-k} \alpha^{*N-k'}}{\sqrt{(N-k)!(N-k')!}} |k, N-k\rangle\langle k', N-k'| \quad (5.18)\end{aligned}$$

W ogólności nie da się znaleźć wektorów własnych $\bar{\rho}$, trzeba więc przy analizie szczególnych przypadków skorzystać z równania definiującego symetryczną pochodną logarymiczną (SLD) (równanie (2.34)). Ponieważ informację Fischera można wyznaczyć tylko przy użyciu SLD i macierzy gęstości (równanie (2.33)), zaś generator przesunięcia w fazie w naszym przypadku zawsze jest taki sam ($\hat{G} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$), to w istocie $\bar{\rho}$ wyznacza rozwiązanie problemu.

Również w takim, ogólnym przypadku powinniśmy dostawać taki sam rezultat dla bardzo słabego modu odniesienia, jakbyśmy wpuszczali stan uśredniony po fazie bez dodatkowego modu. Dla bardzo słabej wiązki odniesienia, $|\alpha|^2 \rightarrow 0$, macierz gęstości stanu wejściowego dąży do

$$\bar{\rho} \rightarrow \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k,k'=0}^N \rho_{kk'} |k, N-k\rangle\langle k', N-k'| \delta_{N-k,0} \delta_{N-k',0} = \sum_{N=0}^{\infty} \rho_{NN} |N\rangle\langle N| \otimes |0\rangle\langle 0| \quad (5.19)$$

Jest to, jak należałoby oczekiwać, uśredniona macierz gęstości w obecności tylko i wyłącznie modu sygnałowego. Z równania (5.19) wynika, że $\bar{\rho}$ jest diagonalne w bazie Focka, zatem nieczułe na fazę. Obliczając komutator z prawej strony równania (2.34), dostajemy w wyniku 0. To zaś oznacza, że SLD jest równe 0, czyli także informacja Fischera $F = 0$. Stosując więc stan uśredniony po fazie bez modu odniesienia, zgodnie z oczekiwaniami, nie jesteśmy w stanie powiedzieć nic o przesunięciu fazowym.

W przypadku bardzo silnej wiązki odniesienia, $|\alpha|^2 \rightarrow \infty$, oczekujemy, że dostaniemy taki sam rezultat, jakbyśmy wpuszczali stan nieuśredniony po fazie. Pokazanie tego faktu nie jest jednak już tak łatwe, jak w poprzednim przypadku. W celu udowodnienia pokażemy, że dodatkowy mod w rozważanej przez nas granicy, po dokonaniu pewnej transformacji, nie ma wpływu na informację o fazie zawartą w macierzy gęstości stanu wejściowego.

Weźmy następującą operację: $\hat{U} = \sum_N \sum_{k=0}^N u_{N,k} |k, N\rangle\langle k, N-k|$, gdzie $|u_{N,k}|^2 = 1$. Operacja ta, w działaniu na stan $|n, m\rangle$ z przestrzeni Hilberta nie zmienia liczby fotonów w pierwszym modzie, natomiast w drugim modzie tworzy stan o całkowitej liczbie fotonów w obu modach oraz, dodatkowo mnoży cały stan przez jakiś czynnik

fazowy. Taka operacja ma następującą własność

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \sum_N \sum_{k=0}^N |u_{N,k}|^2 |k, N-k\rangle \langle k, N-k| = \sum_{n,m=0}^{\infty} |u_{n+m,n}|^2 |n, m\rangle \langle n, m| = 1 \quad (5.20)$$

Nie jest to jednak operacja unitarna, gdyż obrazem przestrzeni Hilberta przy użyciu tej operacji nie jest cała przestrzeń Hilberta (nie jest to odwzorowanie na). Z tego też powodu mamy $\hat{U} \hat{U}^\dagger = \sum_N \sum_{k=0}^N |u_{N,k}|^2 |k, N\rangle \langle k, N| \neq 1$. Pomimo tego, informacja Fischera nie zmienia się, gdy zadziałamy \hat{U} na $\hat{\rho}$. Przy takim przejściu mamy bowiem $\hat{\rho}' = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger$, wiemy także, że w naszym przypadku - ponieważ generator przesunięcia w fazie \hat{G} działa tylko na pierwszy mod - zachodzi $[\hat{U}, \hat{G}] = [\hat{U}^\dagger, \hat{G}] = 0$. Po takiej transformacji równanie (2.34) wygląda następująco:

$$\frac{1}{2}(\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger \hat{\Lambda}' + \hat{\Lambda}' \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger) = -i(\hat{G} \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger - \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger \hat{G}) \quad (5.21)$$

gdzie $\hat{\Lambda}'$ oznacza nowe SLD. Ponieważ \hat{G} i \hat{U} komutują ze sobą, to prawą stronę równania (5.21) możemy zapisać jako $-i\hat{U}(\hat{G} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{G})\hat{U}^\dagger$. Jeśli weźmiemy teraz $\hat{\Lambda}' = \hat{U} \hat{\Lambda} \hat{U}^\dagger$ to równanie (5.21) przekształci się do następującego:

$$\frac{1}{2}\hat{U}(\hat{\rho} \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda} \hat{\rho})\hat{U}^\dagger = -i\hat{U}(\hat{G} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{G})\hat{U}^\dagger \quad (5.22)$$

Zatem znaleźliśmy SLD dla $\hat{\rho}'$ i jest ono równe $\hat{\Lambda}' = \hat{U} \hat{\Lambda} \hat{U}^\dagger$.

Zobaczmy teraz, jaką informację Fischera jesteśmy w stanie osiągnąć przy użyciu $\hat{\rho}'$. Mamy:

$$F' = \text{Tr}(\hat{\rho}' \hat{\Lambda}'^2) = \text{Tr}(\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger \hat{U} \hat{\Lambda} \hat{U}^\dagger \hat{U} \hat{\Lambda} \hat{U}^\dagger) = \text{Tr}(\hat{U} \hat{\rho} \hat{\Lambda}^2 \hat{U}^\dagger) = \text{Tr}(\hat{U}^\dagger \hat{U} \hat{\rho} \hat{\Lambda}^2) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\Lambda}^2) = F \quad (5.23)$$

Oznacza to, że używając $\hat{\rho}'$ jesteśmy w stanie uzyskać taką samą precyzję pomiaru fazy, jakbyśmy używali $\hat{\rho}$. Możemy więc w dalszym ciągu używać $\hat{\rho}'$ zamiast $\hat{\rho}$.

Biorąc wszystkie $u_{N,k} = e^{-i(N-k)\xi}$, gdzie ξ jest takie, że $\alpha = |\alpha|e^{i\xi}$ i obkładając macierz gęstości (5.18), dostajemy:

$$\hat{\rho}' = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k,k'=0}^N \rho_{kk'} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2N-k-k'}}{\sqrt{(N-k)!(N-k')!}} |k, N\rangle \langle k', N| \quad (5.24)$$

Pokażemy teraz, że obecność drugiego modu po transformacji \hat{U} przy $|\alpha|^2 \rightarrow \infty$ nie wnosi żadnych informacji. Ponieważ macierz gęstości drugiego modu jest diagonalna, jedyną informację w niej zawartą jest liczba fotonów. Dokonując pomiaru liczby fotonów w tym modzie, otrzymujemy w efekcie następującą zredukowaną macierz gęstości w pierwszym modzie:

$$\hat{\rho}_N = \sum_{k,k'=0}^N \rho_{kk'} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2N-k-k'}}{\sqrt{(N-k)!(N-k')!}} \frac{1}{\sum_{l=0}^N \rho_{ll} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(N-l)}}{(N-l)!}} |k\rangle \langle k'| \quad (5.25)$$

gdzie N to liczba fotonów w wiązce odniesienia, które zmierzylismy, zaś $\frac{1}{\sum_{k=0}^N \rho_{kk} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(N-k)}}{(N-k)!}}$ jest współczynnikiem gwarantującym, że $\text{Tr} \hat{\rho}_N = 1$.

Z postaci $\hat{\rho}_N$ widać, że w liczniku mamy do czynienia z rozkładem przypominającym rozkład Poissona. Z tego powodu, dla dużych $|\alpha|^2$ główny wkład będą miały wyrazy dla których $|N - \frac{k+k'}{2} - |\alpha|^2| < \epsilon|\alpha|$, gdzie $\epsilon \approx 1$, oraz $\frac{k+k'}{2} \ll |\alpha|$, czyli takie dla których rozkład jest niemal płaski. Ostatni warunek oznacza, że podobnie jak w poprzedniej sekcji, gdy w wiązce sygnałowej mieliśmy stan czysty, średnia liczba fotonów w wiązce odniesienia musi być kwadratowo większa od liczby fotonów w wiązce sygnałowej. Z tych powodów, w granicy $|\alpha| \rightarrow \infty$, możemy skrócić rozkłady w mianowniku i liczniku oraz przejść z górną granicą sumowania w mianowniku i liczniku do nieskończoności (dla dużych $|\alpha|$, na mocy przyjętych przez nas warunków, N zachowuje się tak jak $|\alpha|^2$, tzn. średnia liczba fotonów w układzie jest w praktyce równa liczbie fotonów w wiązce odniesienia), dostając w efekcie wyrażenie

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_N &= \sum_{k,k'=0}^N \rho_{kk'} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2N-k-k'}}{\sqrt{(N-k)!(N-k')!}} \frac{1}{\sum_{l=0}^N \rho_{ll} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(N-l)}}{(N-l)!}} |k\rangle\langle k'| \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{k,k'=0}^{\infty} \rho_{kk'} \frac{1}{\sum_{l=0}^{\infty} \rho_{ll}} |k\rangle\langle k'| = \hat{\rho} \quad (5.26) \end{aligned}$$

Ponieważ dostaliśmy tę samą macierz gęstości, co w przypadku stanu nieuśrednionego bez wiązki odniesienia, to informacja Fischera, a co za tym idzie również najlepsza możliwa precyzja, będzie taka sama w obu tych przypadkach. Możemy zatem powiedzieć, że w ogólności stosowanie stanów o dokładnej fazie jest tożsame ze stosowaniem dodatkowej, bardzo silnej wiązki odniesienia, której obecność zazwyczaj pomija się w rozważaniach.

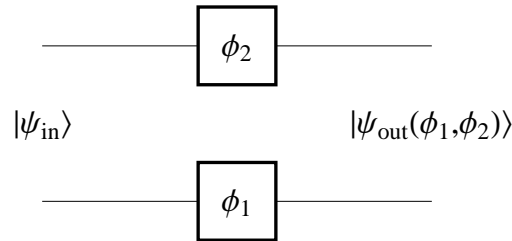
5.2. Dwa mody sygnałowe

Przedstawiony powyżej przykład interferometru jednomodowego pokazuje, że - mimo iż teoretycznie jest możliwa estymacja przesunięcia fazowego przy użyciu takiego układu - to konieczna jest do tego jeszcze wiązka odniesienia, wskutek czego potrzebujemy tak naprawdę dwóch modów. W przypadku idealnego interferometru jednomodowego z tylko jedną wiązką (sygnałową), do którego wpuszczalibyśmy rzeczywisty stan (czyli uśredniony po fazie), zmierzenie przesunięcia fazowego byłoby niemożliwe.

Zastanówmy się teraz nad bardziej realistycznym układem, czyli przypadkiem, gdy mamy dwa mody sygnałowe, jak np. w normalnym interferometrze Macha-Zehndera. Przesunięcie fazowe może wpływać na oba mody jednocześnie, możemy więc uzyskać niezerowe informacje Fischera, zarówno gdy wpuszczamy stan uśredniony po fazie, jak i nieuśredniony. Rozważmy sytuację, gdy wpuszczamy na wejście interferometru ogólny stan czysty $|\Psi_{in}\rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm} |n, m\rangle$, gdzie $\sum_{n,m=0}^{\infty} |c_{nm}|^2 = 1$.

5.2.1. Bez wiązki odniesienia

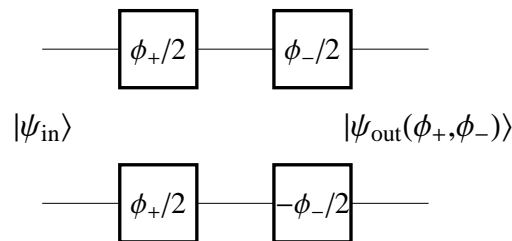
Gdy wiązka odniesienia jest nieobecna, rozważany przez nas układ wygląda tak, jak na rys. 5.3.



Rysunek 5.3: Schemat układu dwumodowego bez wiązki odniesienia.

Ponieważ teoretycznie możemy zmieniać fazę w każdym z modów niezależnie, tak jakbyśmy mieli dwa różne parametry ϕ_1, ϕ_2 , musimy uwzględnić każdy z nich, jak i możliwe korelacje między nimi. Z racji, że interesuje nas zazwyczaj względne przesunięcie fazowe pomiędzy ramionami (modami) układu, to łatwiej będzie analizować dwa inne parametry, mianowicie $\phi_- = (\phi_1 - \phi_2)$, $\phi_+ = (\phi_1 + \phi_2)$. Warto poczynić tutaj pewną uwagę na temat tego, co przechodzi do przypadku dwumodowego z sytuacji jednomodowej. Bezpośrednim odpowiednikiem przesunięcia fazowego mierzonego przy użyciu wcześniejszego układu jest tutaj suma przesunięć fazowych w obu ramionach, czyli wielkość, która zazwyczaj nie podlega pomiarowi. Drugi z parametrów, różnica przesunięć fazowych ϕ_- , nie ma odpowiednika w układzie rozważanym przez nas w poprzednich sekcjach, pojawia się dopiero, gdy mamy do dyspozycji dwie wiązki. Podobieństwo poprzedniego przypadku do rozważania różnicy faz jest możliwe wyłącznie przy obecności dodatkowego, zakamuflowanego modu odniesienia, o którym najczęściej jednak nie się wspomina.

Różnica i suma przesunięć fazowych są rozdzielone symetrycznie na oba mody, zatem, po przeformułowaniu, rozważany przez nas układ wygląda tak, jak na rys. 5.4.



Rysunek 5.4: Schemat układu dwumodowego bez wiązki odniesienia z zamienionymi parametrami.

W układzie mamy do czynienia z dwoma parametrami - sumą i różnicą przesunięć fazowych - konieczne jest zatem obliczenie całej macierzy Fischera (równanie (2.8)). Za-

stanówmy się teraz nad precyzją możliwą do osiągnięcia przy użyciu stanu uśrednionego po fazie. W tym przypadku mamy do czynienia ze stanem mieszanym na wejściu układu, musimy więc zastosować ogólny wzór (2.38). Generatory przesunięcia w sumie i różnicy faz w obu modach to odpowiednio $G_+ = \frac{1}{2}(a^\dagger a + b^\dagger b)$, $G_- = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b)$. Macierz gęstości rozważanego przez nas stanu to w tym przypadku

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \int \frac{d\xi}{2\pi} \sum_{n,m} \sum_{n',m'} c_{nm} c_{n'm'}^* e^{i\xi(n+m-n'-m')} |n, m\rangle \langle n', m'| = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k,k'=0}^N c_{k,N-k} c_{k',N-k'}^* |k, N-k\rangle \langle k', N-k'| \end{aligned} \quad (5.27)$$

Wektory własne takiej macierzy to:

$$|v_N\rangle = A_N \sum_{k=0}^N c_{k,N-k} |k, N-k\rangle, \quad (5.28)$$

gdzie $A_N = (\sum_{k=0}^N |c_{k,N-k}|^2)^{-\frac{1}{2}}$ jest stałą normalizacyjną. W celu znalezienia wartości własnych macierzy gęstości obliczamy $\hat{\rho}|v_N\rangle$:

$$\hat{\rho}|v_N\rangle = \sum_{k=0}^N |c_{k,N-k}|^2 |v_N\rangle = \frac{1}{|A_N|^2} |v_N\rangle \quad (5.29)$$

Stąd dostajemy wartości własne $p_N = \frac{1}{|A_N|^2}$. Korzystając teraz z równania (2.45), otrzymujemy elementy macierzy Fischera

$$F_{++} = 0 \quad (5.30)$$

$$F_{+-} = 0 \quad (5.31)$$

$$F_{--} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=0}^N |c_{k,N-k}|^2 (N-2k)^2 - \sum_{N=0}^{\infty} |A_N|^2 \left(\sum_{k=0}^N |c_{k,N-k}|^2 (N-2k) \right)^2 \quad (5.32)$$

czyli

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_{--} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Jak można było się spodziewać, wpuszczając stan uśredniony po fazie bez dodatkowej wiązki odniesienia, nie jesteśmy w stanie powiedzieć nic o sumie przesunięć fazowych. Warto zwrócić jednak uwagę na to, że pomimo uśrednienia, możemy posiadać pewną wiedzę o interesującym nas parametrze ϕ_- czyli różnicy przesunięć fazowych, gdyż możemy ją określać względem jednej z wiązek.

5.2.2. W obecności wiązki odniesienia

Rozważmy teraz analogiczną sytuację w obecności klasycznej wiązki odniesienia. W takiej sytuacji znamy fazę stanu na wejściu układu, czyli mamy do czynienia ze stanem

czystym. Stan po przejściu przez układ to $|\Psi_{out}\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} e^{\frac{i\phi_+}{2}(n+m)} e^{\frac{i\phi_-}{2}(n-m)} |n, m\rangle$. Obliczając pochodne występujące w równaniu (2.46) dostajemy

$$|\partial_{\phi_+} \Psi_{out}\rangle = \frac{i}{2} \sum_{n,m} c_{nm} (n+m) e^{\frac{i\phi_+}{2}(n-m)} e^{\frac{i\phi_-}{2}(n+m)} |n, m\rangle \quad (5.34)$$

$$|\partial_{\phi_-} \Psi_{out}\rangle = \frac{i}{2} \sum_{n,m} c_{nm} (n-m) e^{\frac{i\phi_+}{2}(n-m)} e^{\frac{i\phi_-}{2}(n+m)} |n, m\rangle \quad (5.35)$$

Wstawiając (5.34) i (5.35) do równania (2.46), otrzymujemy następujące wzory na elementy macierzy Fischera:

$$F_{++} = \sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n+m)^2 - \left(\sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n+m) \right)^2 \quad (5.36)$$

$$F_{--} = \sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n-m)^2 - \left(\sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n-m) \right)^2 \quad (5.37)$$

$$F_{+-} = \sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n^2 - m^2) - \sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n+m) \sum_{n',m'} |c_{n'm'}|^2 (n' - m') \quad (5.38)$$

Dokładność pomiaru różnicy przesunięć fazowych (tylko ta wielkość nas interesuje) jest w tym przypadku dana równaniem (2.12). Jak widać, w tym przypadku w ogólności możemy dokonywać pomiarów nie tylko różnicy przesunięć fazowych, lecz także ich sumy.

Podobnie jak w poprzednich sekcjach dotyczących układu jednomodowego, sprawdźmy co stanie się, jeśli explicite uwzględnimy obecność trzeciego modu odniesienia w stanie koherentnym $|\alpha\rangle$, nieprzechodzącego przez opóźnienia fazowe. W obecności takiego modu moglibyśmy zrealizować pomiar sumy przesunięć fazowych, dzięki znajomości fazy stanu na wejściu układu. Posiadanie dodatkowego modu może również w pewien sposób ulepszać precyzję pomiaru różnicy przesunięć fazowych.

Całkowita macierz gęstości na wejściu układu to

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \int \frac{d\xi}{2\pi} \hat{U}_\xi |\Psi\rangle \langle \Psi| \hat{U}_\xi^\dagger \otimes \hat{U}_\xi |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{U}_\xi^\dagger = \\ &= e^{-|\alpha|^2} \int \frac{d\xi}{2\pi} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \sum_{k,k'=0}^{\infty} \sum_{m,m'=0}^{\infty} c_{nk} c_{n'k'}^* \frac{\alpha^m \alpha^{*m'}}{\sqrt{m!m'}} e^{i\xi(n+m+k-n'-k'-m')} |n, k, m\rangle \langle n', k', m'| = \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \sum_{k,k'=0}^{\infty} \sum_{m,m'=0}^{\infty} c_{nk} c_{n'k'}^* \frac{\alpha^m \alpha^{*m'}}{\sqrt{m!m'}} |n, k, m\rangle \langle n', k', m'| \delta_{n+k+m, n'+k'+m'} = \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n,n'=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} \sum_{k'=0}^{N-n} c_{n,k} c_{n',k'}^* \frac{\alpha^{N-n-k} \alpha^{*N-n-k'}}{\sqrt{(N-n-k)!(N-n-k')}} |n, k, N-n-k\rangle \langle n', k', N-n-k'|, \end{aligned} \quad (5.39)$$

zaś jej wektory własne, podobnie jak w równaniu (5.5) to

$$|v_N\rangle = A_N \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} c_{nk} \frac{\alpha^{N-n-k}}{\sqrt{(N-n-k)!}} |n, k, N-n-k\rangle \quad (5.40)$$

$A_N = \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} \right)^{-\frac{1}{2}}$ oznacza tutaj stałą normalizacyjną. Obliczając $\hat{\rho}|v_N\rangle$ dostajemy, że wartości własne $\hat{\rho}$ to $p_N = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{A_N^2}$. Korzystając teraz ze wzoru (2.45), dostajemy elementy macierzy Fischera:

$$F_{++} = e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n+k)^2 - e^{-|\alpha|^2} \cdot \sum_{N=0}^{\infty} |A_N|^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n+k) \right)^2 \quad (5.41)$$

$$F_{--} = e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n-k)^2 - e^{-|\alpha|^2} \cdot \sum_{N=0}^{\infty} |A_N|^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n-k) \right)^2 \quad (5.42)$$

$$F_{+-} = e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n^2 - k^2) + -e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} |A_N|^2 \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n-k) \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^{N-m} |c_{ml}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-m-l)}}{(N-m-l)!} (m+l) \quad (5.43)$$

Pierwsze elementy tych równań, podobnie jak w przypadku jednomodowym, nie zależą od α , gdyż ustalając n i k dostajemy:

$$e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n+k)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}|^2 (n+k)^2 e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=n+k}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} = = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}|^2 (n+k)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |c_{k,n-k}|^2 n^2 \quad (5.44)$$

$$e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n-k)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}|^2 (n-k)^2 e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=n+k}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} = = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}|^2 (n-k)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |c_{k,n-k}|^2 (n-2k)^2 \quad (5.45)$$

$$e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n^2 - k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}|^2 (n^2 - k^2) e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=n+k}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} = = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}|^2 (n^2 - k^2) = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |c_{k,n-k}|^2 n(n-2k) \quad (5.46)$$

Stąd uproszczone wzory na elementy F to

$$F_{++} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |c_{k,n-k}|^2 n^2 - e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} |A_N|^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n+k) \right)^2 \quad (5.47)$$

$$F_{--} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |c_{k,n-k}|^2 (n-2k)^2 - e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} |A_N|^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n-k) \right)^2 \quad (5.48)$$

$$F_{+-} = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |c_{k,n-k}|^2 n(n-2k) - e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} |A_N|^2 \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n-k) \cdot \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^{N-m} |c_{ml}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-m-l)}}{(N-m-l)!} (m+l) \quad (5.49)$$

Poniżej przedstawię dwa szczególne przypadki powyższego scenariusza. W pierwszym używamy bardzo słabej ($|\alpha| \rightarrow 0$) wiązki odniesienia, zaś w drugim silnej i klasycznej ($|\alpha| \rightarrow \infty$). Podobnie jak w przypadku układu jednomodowego, spodziewamy się że otrzymane przez nas rezultaty będą zgodne odpowiednio z tymi danymi równaniami (5.32) i (5.36), (5.37), (5.38).

5.2.3. Przypadek graniczny $|\alpha|^2 \rightarrow 0$

Gdy $|\alpha|^2 \rightarrow 0$, w wiązka odniesienia staje się coraz słabsza i posiadamy w niej coraz mniej fotonów. Oznacza to, że coraz trudniej jest nam ustalić fazę stanu wejściowego, czyli zmierzamy do granicy, w której mamy stan uśredniony po fazie w dwóch wiązkach sygnałowych. Przechodząc do granicy w elementach macierzy Fischera (5.47), (5.48) i (5.49) dostajemy

$$F_{++}(0) = 0 \quad (5.50)$$

$$F_{+-}(0) = 0 \quad (5.51)$$

$$F_{--}(0) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N |c_{n,N-n}|^2 (2n-N)^2 - \sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^N |c_{n,N-n}|^2 (2n-N) \right)^2 \left(\sum_{n=0}^N |c_{n,N-n}|^2 \right)^{-1} \quad (5.52)$$

Powyższe rezultaty zgadzają się z wynikami (5.30), (5.32) oraz (5.31) otrzymanymi w sytuacji bez wiązki odniesienia i z uśrednieniem.

5.2.4. Przypadek graniczny $|\alpha|^2 \rightarrow \infty$

Gdy $|\alpha|^2 \rightarrow \infty$, oczekujemy, że dostaniemy wyniki (5.36), (5.37) oraz (5.38), gdyż - podobnie jak w przypadku jednomodowym - będziemy mogli dokładnie ustalić fazę stanu w wiązkach sygnałowych. W tej sytuacji zajmiemy się tylko drugim członem w równaniach (5.47), (5.48) i (5.49), gdyż pierwszy nie zależy od α . Rozpatrzmy najpierw elementem macierzy Fischera odpowiadającym różnicy faz F_{--} . Zamieniając kolejność sumowania w (5.48) dostajemy

$$\begin{aligned} & e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} |A_N|^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N-n} |c_{nk}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} (n-k) \right)^2 = \\ & = \sum_{n',n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} |c_{nk}|^2 |c_{n'k'}|^2 (n-k)(n'-k') \sum_{N=n+k}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)} |\alpha|^{2(N-n'-k')}}{(N-n-k)!(N-n'-k')!} \cdot \\ & \quad \cdot \left(\sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^{N-m} |c_{ml}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-m-l)}}{(N-m-l)!} \right)^{-1} \quad (5.53) \end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku jednomodowym, także i tutaj mamy do czynienia z rozkładem Poissona, więc tak jak poprzednio, wybieramy na tyle duże $|\alpha|^2$ by wkład do sum miały wyrazy, dla których $|N-n-k-|\alpha|^2| < |\alpha|$, oraz $n+k \ll |\alpha|$, gdyż dla takich wartości indeksów rozkład jest niemal płaski. Oznacza to, że również w przypadku dwumodowym, potrzebujemy w wiązce odniesienia posiadać kwadratowo więcej fotonów niż jest obecne w wiązkach sygnałowych. Dzięki temu wszystkiemu możemy skrócić jeden z rozkładów w liczniku z rozkładem w mianowniku i przechodząc z $|\alpha|$ do nieskończoności przejść do niej także z górną granicą sumowania w mianowniku (bo dla dużych $|\alpha|$, na mocy przyjętych przez nas warunków, N zachowuje się tak jak $|\alpha|^2$), otrzymując

$$\begin{aligned} & \sum_{N=n+k}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)} |\alpha|^{2(N-n'-k')}}{(N-n-k)!(N-n'-k')!} \left(\sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^{N-m} |c_{ml}|^2 \frac{|\alpha|^{2(N-m-l)}}{(N-m-l)!} \right)^{-1} \approx \\ & \approx \sum_{N=n+k}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(N-n-k)}}{(N-n-k)!} \left(\sum_{m,l} |c_{ml}|^2 \right)^{-1} = 1 \quad (5.54) \end{aligned}$$

Takie samo rozumowanie można przeprowadzić dla elementów macierzy Fischera odpowiadających sumie faz F_{++} i wyrazom pozadiagonalnym F_{+-} . Wobec tego otrzymujemy, że w granicy $\alpha \rightarrow \infty$ elementy macierzy Fischera wyglądają następująco:

$$F_{++} = \sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n+m)^2 - \left(\sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n+m) \right)^2 \quad (5.55)$$

$$F_{--} = \sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n-m)^2 - \left(\sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n-m) \right)^2 \quad (5.56)$$

$$F_{+-} = \sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n^2 - m^2) - \sum_{n,m} |c_{nm}|^2 (n+m) \sum_{n',m'} |c_{n'm'}|^2 (n' - m') \quad (5.57)$$

co zgadza się z przypadkiem, gdy mieliśmy nieuśredniony stan wejściowy (równania (5.36), (5.37) i (5.38)).

Z powyższych rozważań wynika więc, że wraz ze zmianą liczby fotonów w wiązce odniesienia, zmienia się też precyzja mierzonej różnicy przesunięć fazowych. Ustalona faza początkowa (bardzo silna wiązka odniesienia) może mieć znaczny wpływ na otrzymywane rezultaty, który to fakt jest rzadko uwzględniany w literaturze. W następnej sekcji przedstawię przykład prostego stanu, dla którego wraz ze zmianą liczby fotonów w wiązce odniesienia zmienia się precyzja mierzonej różnicy przesunięć fazowych.

5.2.5. Przykład: superpozycja stanów o różnych liczbach fotonów

Jako przykład rozważmy stan $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |02\rangle + |20\rangle)$ na wejściu układu dwumodowego bez wiązki odniesienia (rys. 5.4). Taki stan, po ewolucji przez sumę i różnicę faz, wygląda następująco:

$$|\Psi(\phi_-, \phi+)\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + e^{i(\phi_+ - \phi_-)/2}|01\rangle + e^{i(\phi_+ - \phi_-)}|02\rangle + e^{i(\phi_+ + \phi_-)}|2, 0\rangle). \quad (5.58)$$

Dla powyższego stanu mamy $c_{00} = c_{01} = c_{02} = c_{20} = \frac{1}{2}$, wobec czego otrzymujemy następującą macierz Fischera:

$$F = \begin{pmatrix} F_{++} & F_{+-} \\ F_{+-} & F_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{35}{16} \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

Korzystając ze wzoru (2.12), otrzymujemy w tym przypadku, że precyzja jest równa $\Delta\phi_- = \sqrt{\frac{11}{24}} \approx 0,68$.

Jeśli z kolei byśmy wzięli stan $|\Psi\rangle$ uśredniony po fazie, czyli stan o macierzy gęstości $\hat{\rho}$ przedstawiającej się w bazie stanów Focka ($|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |02\rangle, |11\rangle, |20\rangle$) następująco

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (5.60)$$

to wówczas nasza macierz Fischera byłaby równa

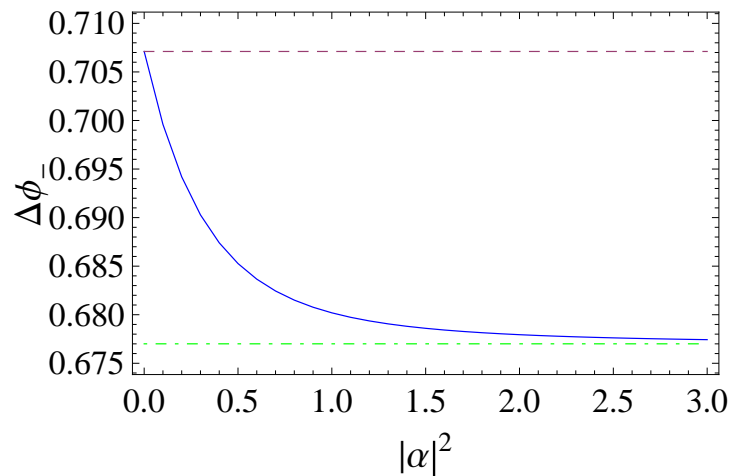
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

W tym przypadku precyzja pomiaru różnicy faz będzie równa $\Delta\phi_- = 0,71 \neq 0,68$. Wynika stąd, że dla stanu nieuśrednionego po fazie otrzymujemy lepszą dokładność.

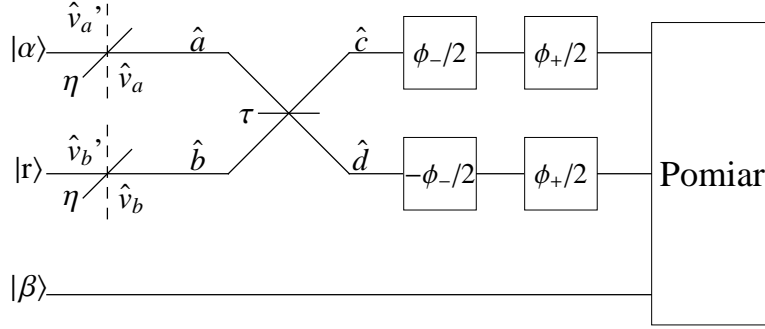
Dodajmy teraz trzeci mod odniesienia w stanie koherentnym $|\alpha\rangle$ i zobaczmy, co dzieje się wraz ze zmianą natężenia dodatkowej wiązki. Korzystając z postaci stanu Ψ oraz z równań (5.47), (5.48) i (5.49), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
F_{++} &= \frac{9}{4} - \frac{e^{-|\alpha|^2}}{4} \left(\frac{1}{1+|\alpha|^2} + \sum_{N=2}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(N-2)}}{(N-2)!} \frac{(4 + \frac{|\alpha|^2}{N-1})^2}{2 + \frac{|\alpha|^2}{N-1} + \frac{|\alpha|^4}{N(N-1)}} \right) \\
F_{--} &= \frac{9}{4} - \frac{e^{-|\alpha|^2}}{4} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N|\alpha|^{2N}}{(N-1)! (|\alpha|^4 + N|\alpha|^2 + 2N(N-1))} \\
F_{+-} &= -\frac{1}{4} + \frac{e^{-|\alpha|^2}}{4} \left(\frac{1}{1+|\alpha|^2} + \sum_{N=2}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(N-1)}}{(N-1)!} \frac{4 + \frac{|\alpha|^2}{N-1}}{2 + \frac{|\alpha|^2}{N-1} + \frac{|\alpha|^4}{N(N-1)}} \right) \quad (5.62)
\end{aligned}$$

Używając teraz wzoru (2.12) otrzymujemy precyzję $\Delta\phi_-$ w zależności od ilości fotonów w wiązce odniesienia. Rysując $\Delta\phi_-$ w funkcji $|\alpha|^2$, dostajemy wykres przedstawiony na rys. 5.5. Widać na nim, że dla $|\alpha|^2$ znacznie większych od liczby fotonów w wiązkach sygnałowych, czyli dla $|\alpha|^2 \gg 1, 25$, osiągnięta precyzja jest taka, jak przy wykorzystaniu stanu nieuśrednionego po fazie. Dla przypadku bardzo słabej wiązki odniesienia $|\alpha|^2 \rightarrow 0$ precyzja jest taka, jak w sytuacji stanu uśrednionego po fazie bez wiązki odniesienia. Warto zauważyć, że precyzja pomiaru różnicy przesunięć fazowych nie jest po prostu równa pierwiastkowi z odwrotności informacji Fischera dla różnicy faz. Jeśli nie uwzględnilibyśmy pozostałych elementów macierzy Fischera, otrzymana precyzja byłaby lepsza od możliwej do osiągnięcia w rzeczywistości.



Rysunek 5.5: Precyzja pomiaru różnicy przesunięć fazowych $\Delta\phi_- (|\alpha|^2)$ (linia ciągła, niebieska). Dla porównania na rysunku znajdują się linie odpowiadające precyzji uzyskiwanej przy użyciu stanu uśrednionego po fazie (kolor fioletowy, kreski) i stanu czystego (kolor zielony, kreski i kropki).



Rysunek 5.6: Schemat układu z wiązką odniesienia w stanie $|\beta\rangle$.

5.3. Przykład: stan ściśnięty i koherentny na wejściu interferometru Macha-Zehndera

Kolejnym przykładem jest sytuacja rozważana w rozdziale (3.6) z tym, że teraz explicit uwzględnimy obecność wiązki odniesienia w stanie koherentnym $|\beta\rangle$. Schemat rozważanego układu znajduje się na rys. (5.6).

Ponieważ uśredniamy po fazie, więc na wejściu interferometru mamy stan mieszany dany macierzą gęstości:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \int \frac{d\xi}{2\pi} \hat{U}_\xi |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{U}_\xi^\dagger \otimes \hat{U}_\xi |r\rangle \langle r| \hat{U}_\xi^\dagger \otimes \hat{U}_\xi |\beta\rangle \langle \beta| \hat{U}_\xi^\dagger = \\
&= \int \frac{d\xi}{2\pi} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \sum_{m,m'=0}^{\infty} \sum_{t,t'=0}^{\infty} \frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r} \frac{\alpha^n \alpha^{*n'}}{\sqrt{n!n'!}} \frac{\beta^t \beta^{*t'}}{\sqrt{t!t'!}} \left(\frac{\tanh r}{2}\right)^{\frac{m+m'}{2}} \frac{H_m(0)H_{m'}(0)}{\sqrt{m!m'!}} \cdot \\
&\quad \cdot e^{i\theta(m-m')/2} e^{i\xi(n+m+t-n'-m'-t')} |n, m, t\rangle \langle n', m', t'| = \\
&= \frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n,n'=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \sum_{m'=0}^{N-n-m} \frac{\alpha^n \alpha^{*n'}}{\sqrt{n!n'!}} \frac{\beta^{N-n-m} \beta^{*N-n'-m'}}{\sqrt{(N-n-m)!(N-n'-m')!}} \left(\frac{\tanh r}{2}\right)^{\frac{m+m'}{2}} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{H_m(0)H_{m'}(0)}{\sqrt{m!m'!}} e^{i\theta(m-m')/2} |n, m, N-n-m\rangle \langle n', m', N-n'-m'| \quad (5.63)
\end{aligned}$$

Z racji, że na wejściu układu posiadamy stan mieszany, aby znaleźć macierz Fischera musimy zastosować ogólny wzór (2.38). Interesuje nas, jak zwykle precyzja pomiaru różnicy przesunień fazowych. Generator przesunień dla różnicy faz jest dany w tym przypadku, tak jak w sekcji (4.1.1), przez $\hat{G}_- = \frac{1}{2}(1-2\tau)(\hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{a}^\dagger \hat{a}) + \sqrt{\tau(1-\tau)}(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a})$, zaś generator przesunień dla sumy faz to $\hat{G} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b})$.

W przypadku gdy w układzie posiadamy straty, $\hat{\rho}$ musi jeszcze przez nie przejść i zostać wysładowane po modach odpowiadających za straty. Problem znalezienia analitycznej formy macierzy Fischera staje się wtedy trudny wobec czego konieczne jest zastosowanie obliczeń numerycznych. Pomimo tego, można uzyskać wynik analityczny

dla $\eta = 1$, czyli gdy nie ma strat. W tym przypadku, $\hat{\rho}$ jest już stanem który wchodzi na pierwszą płytke światłodziącą interferometru.

Wektory własne macierzy $\hat{\rho}$ mają postać

$$|v_N\rangle = A_N \frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2}}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\beta^{N-n-m}}{\sqrt{(N-n-m)!}} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{H_m(0)}{\sqrt{m!}} e^{i\theta m/2} |n, m, N-n-m\rangle \quad (5.64)$$

gdzie A_N oznacza współczynnik normalizacyjny i jest równe

$$A_N = \left[\frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \right]^{-1/2} \quad (5.65)$$

Obliczając $\hat{\rho}|v_N\rangle$ dostajemy, że wartości własne $\hat{\rho}$ są równe $p_N = \frac{1}{A_N^2}$. Korzystając teraz ze wzoru (2.38) dostajemy elementy macierzy Fischera odpowiadające sumie i różnicy faz

$$F_{++} = \frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (n+m)^2 + \\ - \sum_{N=0}^{\infty} A_N^2 \left(\frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r}\right)^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (n+m)\right)^2 \quad (5.66)$$

$$F_{--} = 4 \frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r} \left[\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} \left(\frac{(1-2\tau)^2}{4} (m-n)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \tau(1-\tau)(n+m+2nm)\right) - 2\tau(1-\tau) \sum_{N=2}^{\infty} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2(n-1)}}{(n-2)!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^{m+1} \frac{H_m(0)H_{m+2}(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} \right] + \\ - \sum_{N=0}^{\infty} A_N^2 \left(\frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r}\right)^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (1-2\tau)^2 (m-n)\right)^2 \quad (5.67)$$

W celu policzenia wyrazów pozadiagonalnych w macierzy Fischera skorzystałem z równania (4.27). Aby je jednak zastosować, konieczna jest znajomość diagonalnych elementów macierzy Fischera dla pomiaru przesunięcia fazowego w każdym z ramion z osobna. Generatory przesunięć fazowych dla górnego i dolnego ramienia są następujące:

$$\hat{G}_1 = \hat{c}^\dagger \hat{c} = \tau \hat{a}^\dagger \hat{a} + (1-\tau) \hat{b}^\dagger \hat{b} + \sqrt{\tau(1-\tau)} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) \quad (5.68)$$

$$\hat{G}_2 = \hat{d}^\dagger \hat{d} = \tau \hat{b}^\dagger \hat{b} + (1-\tau) \hat{a}^\dagger \hat{a} - \sqrt{\tau(1-\tau)} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) \quad (5.69)$$

Korzystając z postaci generatorów oraz z wektorów i wartości własnych macierzy $\hat{\rho}$, dostajemy następujące informacje Fischera:

$$\begin{aligned}
F_{11} = & 4 \frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r} \left[\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} ((\tau n+(1-\tau)m)^2 + \right. \\
& \left. + \tau(1-\tau)(n+m+2nm)) - 2\tau(1-\tau) \sum_{N=2}^{\infty} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2(n-1)}}{(n-2)!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^{m+1} \frac{H_m(0)H_{m+2}(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} \right] + \\
& -4 \sum_{N=0}^{\infty} A_N^2 \left(\frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r}\right)^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (\tau n+(1-\tau)m)\right)^2
\end{aligned} \tag{5.70}$$

$$\begin{aligned}
F_{22} = & 4 \frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r} \left[\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (((1-\tau)n+\tau)m)^2 + \right. \\
& \left. + \tau(1-\tau)(n+m+2nm)) - 2\tau(1-\tau) \sum_{N=2}^{\infty} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2(n-1)}}{(n-2)!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^{m+1} \frac{H_m(0)H_{m+2}(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} \right] + \\
& -4 \sum_{N=0}^{\infty} A_N^2 \left(\frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r}\right)^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} ((1-\tau)n+\tau m)\right)^2
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Stąd, korzystając z równania (4.27), dostajemy wyraz pozadiagonalny macierzy Fischera dla pomiaru sumy i różnicy przesunięć fazowych

$$\begin{aligned}
F_{+-} = & (1-2\tau) \frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (m^2-n^2) + \\
& - (1-2\tau) \sum_{N=0}^{\infty} A_N^2 \left(\frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r}\right)^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (m+n)\right) \cdot \\
& \cdot \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (m-n)\right) \tag{5.72}
\end{aligned}$$

Jak widać z postaci F_{+-} , wyrazy pozadiagonalne znikają dla $\tau = \frac{1}{2}$, czyli dla symetrycznego interferometru.

Wzory (5.66), (5.67) i (5.72) możemy jeszcze uprościć, zamieniając kolejność sumowania w pierwszych członach tych wyrażeń i wykonując sumowanie po N . Dostajemy

wówczas następujące rezultaty:

$$\begin{aligned}
F_{++} &= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} (n+m)^2 + \\
&\quad - \sum_{N=0}^{\infty} A_N^2 \left(\frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r}\right)^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (n+m)\right)^2
\end{aligned} \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}
F_{--} &= 4 \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\cosh r} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \left(\frac{(1-2\tau)^2}{4} (m-n)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \tau(1-\tau)(n+m+2nm)\right) - 2\tau(1-\tau) \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(n-1)}}{(n-2)!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^{m+1} \frac{H_m(0)H_{m+2}(0)}{m!} \right] + \\
&\quad - \sum_{N=0}^{\infty} A_N^2 \left(\frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r}\right)^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (1-2\tau)^2 (m-n)\right)^2
\end{aligned} \tag{5.74}$$

$$\begin{aligned}
F_{+-} &= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} (1-2\tau)(m^2-n^2) + \\
&\quad - \sum_{N=0}^{\infty} A_N^2 \left(\frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{\cosh r}\right)^2 (1-2\tau) \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (m+n)\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2}\right)^m \frac{H_m^2(0)}{m!} \frac{|\beta|^{2(N-n-m)}}{(N-n-m)!} (m-n)\right)
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Ze powyższych wzorów widać, że dla $\tau = \frac{1}{2}$, F_{--} nie zależy od β i równe jest kwantowej informacji Fischera dla różnicy faz dla stanu uśrednionego po fazie bez wiązki odniesienia. Ponieważ w sytuacji gdy mamy symetryczny interferometr wyrazy pozadiagonalne w macierzy Fischera znikają, więc precyzja pomiaru różnicy faz będzie dana

$$\Delta\phi_-(\tau = \frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{F_{++}}{F_{++}F_{--} - F_{+-}^2}} = \frac{1}{\sqrt{F_{--}}} \tag{5.76}$$

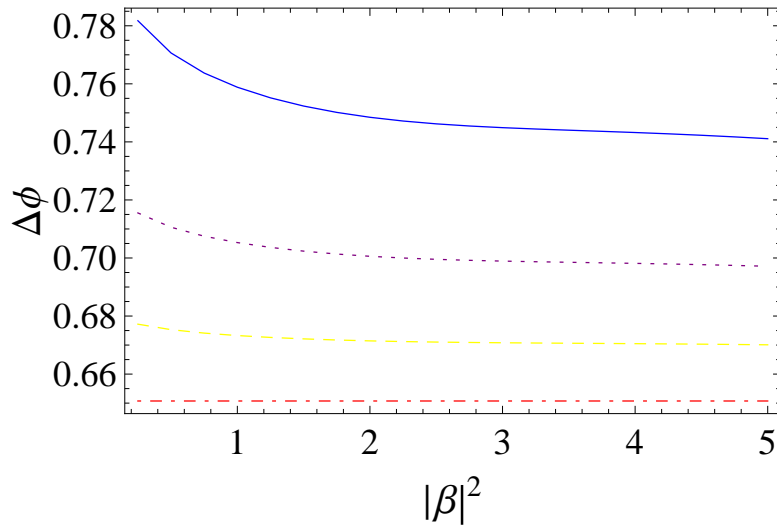
Wynik ten oznacza, że dla bezstratnego, symetrycznego interferometru Macha - Zehndera, niezależnie od ilości fotonów w wiązce odniesienia, otrzymamy to samo dolne ograniczenie na precyzję pomiaru różnicy faz. Świadczy to o tym, że w takim przypadku nie musimy w ogóle używać wiązki odniesienia, by osiągnąć optymalną precyzję.

Dla niesymetrycznego interferometru ($\tau \neq \frac{1}{2}$) w którym nie ma strat poprzednie twierdzenie nie jest jednak prawdą. Jeśli bowiem narzucimy wiązkę określonej średniej liczby fotonów w wiązkach sygnałowych ($\bar{N} = |\alpha|^2 + \sinh^2 r$) i będziemy szukać najlepszej

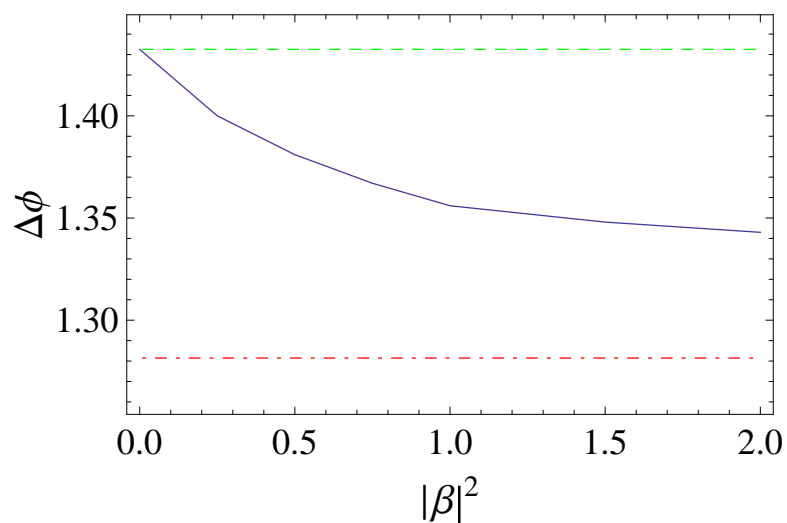
możliwej do osiągnięcia precyzji dla konkretnego $|\beta|^2$, to okazuje się, że w tym przypadku optymalna precyzja pomiaru różnicy faz polepsza się wraz ze wzrostem średniej liczby fotonów w wiązce odniesienia. Wykres precyzji pomiaru różnicy faz w funkcji $|\beta|^2$ dla różnych współczynników τ znajduje się na rys. (5.7). Widać na nim, że im bardziej τ różni się od $\frac{1}{2}$ tym więcej jesteśmy w stanie zyskać zwiększając liczbę fotonów w wiązce odniesienia, niestety całkowita precyzja i tak pogarsza się wraz z $\tau \rightarrow 0$ lub $\tau \rightarrow 1$.

Powyższa analiza przeprowadzona była przy założeniu, że w układzie nie ma strat. Jeśli pozwolimy na to, by $\eta \neq 1$, to wówczas, w stanie wejściowym danym równaniem (5.63) musimy uwzględnić jeszcze obecność strat, co prowadzi do komplikacji i w efekcie konieczne jest użycie obliczeń numerycznych. Okazuje się, że nawet w przypadku symetrycznego interferometru ($\tau = \frac{1}{2}$), w obecności strat, zwiększanie średniej liczby fotonów w wiązce odniesienia pozwala na poprawienie precyzji pomiaru różnicy przesunięć fazowych w wiązках sygnałowych, co widać na rys. (5.8).

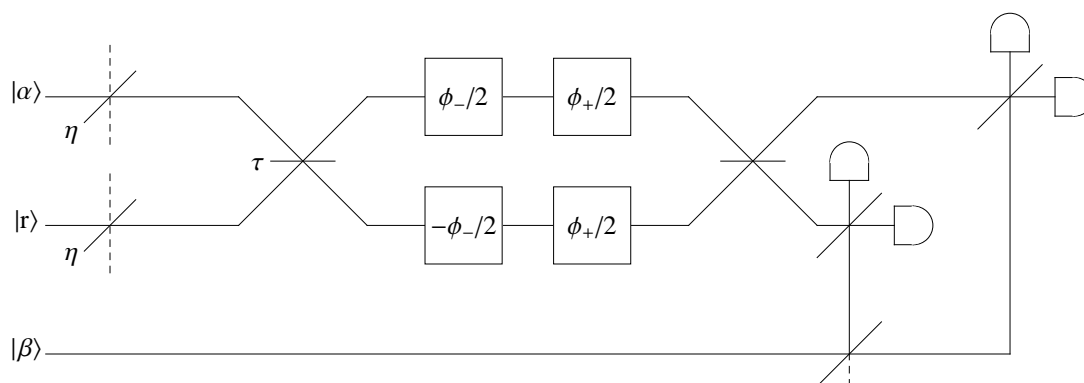
Osobną kwestię stanowi znalezienie schematu pomiarowego, dla którego ograniczenie na precyzję dane przez informację Fischera byłoby osiągnięte. W sytuacji gdy nie ma wiązki odniesienia, odpowiednim układem pomiarowym może być ten przedstawiony na rys. (3.7). W bardziej ogólnym przypadku, dla większej od zera ilości fotonów w wiązce odniesienia, obiecujący wydaje się schemat przedstawiony na poniższym rysunku (rys.(5.9)). Niestety, to czy przy pomocy takiego pomiaru rzeczywiście jesteśmy w stanie osiągnąć optymalną precyzję pozostaje kwestią otwartą i wymaga dalszych badań.



Rysunek 5.7: Wykres optymalnej precyzji pomiaru różnicy faz w funkcji średniej liczby fotonów w wiązce odniesienia dla różnych τ . $\tau = 0,1$ i $\tau = 0,9$ (niebieski, ciągła), $\tau = 0,2$ i $\tau = 0,8$ (fioletowy, kropki), $\tau = 0,3$ i $\tau = 0,7$ (żółty, kreski), $\tau = 0,5$ (czerwony, kropki i kreski). Wykres zrobiony dla średniej ilości fotonów w wiązках sygnałowych $\bar{N} = 1$



Rysunek 5.8: Wykres optymalnej precyzji pomiaru różnicy faz w funkcji średniej liczby fotonów w wiązce odniesienia dla $\tau = \frac{1}{2}$, współczynnika strat $\eta = 0,8$ i średniej liczby fotonów w wiązках sygnałowych $\bar{N} = 0,5$. Kreskami (kolor zielony) oznaczona jest precyzja w przypadku braku wiązki odniesienia, zaś kreski i kropki (kolor czerwony) oznaczają precyzję w obecności klasycznej wiązki odniesienia.



Rysunek 5.9: Schemat układu mogącego służyć do estymacji fazy z uwzględnieniem wiązki odniesienia.

5.4. Podsumowanie

Z analizy przeprowadzonej w tym rozdziale jasno wynika, że w ogólności istnieje różnica w uzyskiwanej precyzji pomiaru różnicy przesunięć fazowych dla różnych ilości fotonów w wiązce odniesienia. W szczególności okazuje się, że w granicy klasycznej, dla

bardzo silnej wiązki odniesienia, precyzja osiąga wartość którą można by przewidzieć używając po prostu stanu wejściowego w wiązkach sygnałowych. Dzieje się tak, gdyż dzięki obecności trzeciego modu z dużą ilością fotonów jesteśmy w stanie kontrolować fazę każdego z modów sygnałowych. Oznacza to, że uwzględniamy wówczas elementy macierzy gęstości odpowiadające różnym całkowitym ilościom fotonów w wiązkach sygnałowych, które to elementy są czułe na działanie przesunięć fazowych. W sytuacji przeciwnej, w nieobecności wiązki odniesienia, osiągalna precyzja jest równa tej, którą można uzyskać rozważając na wejściu stan uśredniony po wspólnej fazie. W takim wypadku posiadamy informację tylko o względnej fazie pomiędzy wiązkami sygnałowymi, co oznacza, że w macierzy gęstości występują wyłącznie elementy odpowiadające tym samym całkowitym liczbom fotonów w wiązkach sygnałowych. Zwiększanie średniej liczby fotonów w wiązce odniesienia powoduje w ogólności zmniejszenie - czyli polepszenie - precyzji, choć w pewnych szczególnych przypadkach (takich jak np. bezstratny symetryczny interferometr Macha-Zehndera), uzyskiwany wynik jest taki sam, niezależnie od tego czy rozważamy stan uśredniony po wspólnej fazie w wiązkach sygnałowych (brak modu odniesienia) czy też stan z pełną znajomością fazy (silna, klasyczna wiązka odniesienia).

Rozdział 6

Zakończenie

W pracy obliczyłem ograniczenie dolne na możliwą do uzyskania precyzję pomiaru przesunięć fazy w różnych możliwych scenariuszach. W pierwszym z nich rozważyłem stratny interferometr Macha-Zehndera ze stanem ściśniętym i koherentnym na wejściu przy założeniu zliczania fotonów na wyjściu układu. Otrzymane przeze mnie rezultaty pozwalają stwierdzić, że dla przypadku bez strat, optymalna precyzja pomiaru różnicy przesunięć fazowych osiąga skalowanie Heisenberga. Niestety, dla większych strat precyzja skaluje się na poziomie szumu śrutowego (standard quantum limit). Wykazałem też, że dla większości współczynników strat prawie wszystkie fotony opłaca wpuszczać się do układu w stanie koherentnym. Tylko dla małych strat optymalną strategią jest dzielenie zasobów pomiędzy wiązki, w szczególności w przypadku bez strat, dla dużej liczby fotonów najlepiej jest podzielić energię po równo między oba stany. Niewielką poprawę precyzji daje procedura dopasowywania faz, ma to znaczenie głównie dla małych liczb fotonów i niewielkich strat. Nie zmienia ona jednak osiąganego skalowania precyzji, gdyż dla dużej liczby fotonów różnice pomiędzy scenariuszem z dopasowywaniem faz a zwykłym zliczaniem fotonów są bardzo małe.

W drugiej sytuacji rozważyłem taki sam układ, z tym że nie ograniczałem pomiaru do zliczania fotonów. Dzięki zastosowaniu formalizmu opisanego przez Helstroma w pracy [16] udało mi się znaleźć optymalną precyzję pomiaru różnicy faz w zarówno w przypadku gdy posiadamy pełną kontrolę nad fazą każdego z modów, co oznacza dostęp do dodatkowej, silnej wiązki odniesienia jak i sytuacji gdy nie znamy fazy żadnego ze stanów, a zatem gdy nie mamy żadnego odniesienia. Konieczne w tym celu było użycie całej macierzy Fischera, która powstaje gdy weźmiemy pod uwagę wszystkie parametry układu. Rezultaty uzyskane przy uwzględnieniu tylko jednego z parametrów (np. wyłącznie różnicy przesunięć fazowych) mogą prowadzić do precyzji które nie mają bezpośredniego znaczenia w eksperymentach. W tym przypadku, podobnie jak przy scenariuszu ze zliczaniem fotonów, również otrzymałem, iż precyzja osiąga skalowanie Heisenberga gdy nie ma strat, zaś gdy są większe tylko skalowanie szumu śrutowego. Ponadto, okazuje się, że dla większości współczynników strat opłaca się wpuszczać większość fotonów w stanie koherentnym, zwłaszcza dla większej średniej liczby fotonów w układzie. Jednak dla małej liczby fotonów, bądź dla małych strat, optymalną strategią jest już dzielenie

energii pomiędzy oba stany w odpowiednich proporcjach. Otrzymałem także, że precyzja jaką jesteśmy w stanie osiągnąć przy użyciu stanów uśrednionych po fazie jest równa tej, którą otrzymaliśmy w przypadku pomiarów polegających na zliczaniu fotonów i dopasowywaniu faz, co dowodzi że jest to optymalny pomiar w tej sytuacji.

Przeprowadziłem także analizę bardziej ogólnej sytuacji, w której explicite uwzględniłem obecność dodatkowego modu odniesienia w stanie koherentnym i jednej, bądź dwóch wiązek sygnałowych w dowolnym stanie. Okazuje się bowiem, że w takim przypadku można udowodnić, że wraz z rosnącą średnią liczbą fotonów w wiązce odniesienia, precyzja pomiaru różnicy faz w wiązkach sygnałowych zmierza do tej, otrzymywanej przy użyciu stanów czystych. Konieczne jest jednak użycie w wiązce odniesienia liczby fotonów, będącej co najmniej kwadratem liczby fotonów w wiązkach sygnałowych. Dodatkowo, wraz ze zmniejszaniem ilości fotonów w wiązce odniesienia osiąga się precyzję przewidzianą przez użycie stanu wiązek sygnałowych uśrednionego po wspólnej fazie.

Analiza przypadku pomiaru różnicy faz przy użyciu stratnego interferometru Macha-Zehndera ze światłem w stanie ściśniętym i koherentnym oraz dodatkową wiązką odniesienia w stanie koherentnym pozwoliła na wykazanie, że w obecności strat, lub gdy używany interferometr nie jest symetryczny (tzn. pierwsza płytką światłodzieląca ma transmisję różną od $\frac{1}{2}$), ilość fotonów w wiązce odniesienia ma znaczenie i pozwala obniżyć precyzję. Z drugiej strony, jeśli mamy do czynienia z symetrycznym układem bezstratnym, wystarczy używać stanów wejściowych uśrednionych po fazie i wiązka odniesienia nie jest potrzebna. W tej sytuacji, okazuje się też, że aby osiągnąć dolne ograniczenie na precyzję wystarczy pomiar liczby zliczeń fotonów w każdym z ramion na wyjściu interferometru (ograniczenie dane przez klasyczną informację Fischera). W przypadku istnienia strat, konieczne jest zastosowanie zmodyfikowanego układu, który będzie dopasowywał przesunięcie fazowe w zależności od tego ile dokładnie fotonów znajduje się w układzie - mamy wówczas do czynienia z ograniczeniem danym przez klasyczną informację Fischera z dopasowaniem faz. Ogólny pomiar dzięki któremu udałoby się uzyskać precyzję daną przez macierz Fischera niezależnie od strat i współczynnika transmisji pierwszej płytki światłodzielącej w obecności wiązki odniesienia nie jest jednak znany i stanowi to dobry przedmiot do dalszych badań.

Bibliografia

- [1] Carlton M. Caves, *Physical Review D* 23, 1693 (1981)
- [2] Bernard Yurke, Samuel L. McCall, John R. Klauder, *Physical Review A* 33, 4033 (1986)
- [3] Mark Hillery, Leonard Mlodinov, *Physical Review A* 48, 1548 (1993)
- [4] G. M. D' Ariano, C. Macchiavello, M. G. A. Paris, *Physical Review Letters* 73, 3187 (1994)
- [5] Matteo G. A. Paris, Chiara Macchiavello, G.M. d' Ariano, *Physics Letters A* 198, 286, (1995)
- [6] Matteo G A Paris, *Physics Letters A* 201, 132 (1995)
- [7] Samuel L. Braunstein, Carlton M. Caves, *Physical Review Letters* 72, 3439 (1994)
- [8] M. Kacprowicz, R. Demkowicz-Dobrzański, W. Wasilewski, K. Banaszek, I. A. Walmsley, *Nature Photonics* 4, 357 (2010)
- [9] R. Demkowicz-Dobrzanski, U. Dorner, B. J. Smith, J. S. Lundeen, W. Wasilewski, K. Banaszek, I. A. Walmsley, *Physical Review A* 80, 013825 (2009)
- [10] Takafumi Ono, Holger F. Hofmann, *Physical Review A* 81, 033819 (2010)
- [11] Volodymyr G. Voronov, Michael Weyrauch, *Physical Review A* 81, 053816 (2010)
- [12] Luca Pezze, Augusto Smerzi, arXiv:0705.4631v1 (2007)
- [13] Roberto Gaiba, Matteo G. A. Paris, arXiv:0802.1682v2 (2008)
- [14] Itai Afek, Oron Ambar, Yaron Silberberg, *Science* 328, 879 (2010)
- [15] O. E. Barndorff-Nielsen, R. D. Gill, *J. Phys. A: Math. Gen.* 33, 4481 (2000)
- [16] Carl W. Helstrom , *Quantum detection and estimation theory*, Academic Press, 1976
- [17] Roman Nowak, *Statystyka dla fizyków*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002

- [18] Jaewoo Joo, William J. Munro, Timothy P. Spiller, arXiv:1101.5044v2 (2011)
- [19] Klaus Mølmer, Physical Review A 55, 3195 (1997)
- [20] Kae Nemoto Samuel L. Braunstein, Physical Review A 68, 042326 (2003)
- [21] S. J. van Enk, Christopher A. Fuchs, Physical Review Letters 88 027902 (2002)
- [22] Stephen D. Bartlett, Terry Rudolph, Robert W. Spekkens, arXiv:quant-ph/0507214 v1 (2005)
- [23] Gerardo Adesso, Entanglement of Gaussian States, arXiv:quant-ph/0702069v1 2007
- [24] Kaushik P. Seshadreesan, Petr M. Anisimov, Hwang Lee, Jonathan P. Dowling, arXiv:1105.2805v2, 2011