

Rozdział 15. ANALIZA NA POWIERZCHNIACH

15.1. Pojęcie powierzchni.

Niech X będzie przestrzenią wektorową (nad ciałem liczb rzeczywistych) wymiaru skończonego. Zbiór $M \subset X$ jest *gładką powierzchnią*, jeżeli dla każdego punktu $p \in M$ istnieją podprzestrzenie wektorowe $V_p, W_p \subset X$ (więc przestrzeń X można utożsamiać z iloczynem kartezjańskim $V_p \times W_p$) takie, że $X = V_p \oplus W_p$, oraz zbiory otwarte $O_V \subset V_p$, $O_W \subset W_p$ takie, że $p \in O_V \times O_W$ a zbiór $M \cap (O_V \times O_W)$ jest wykresem odwzorowania gładkiego (posiadającego pochodne wszystkich rzędów)

$$\varphi_p: O_V \rightarrow O_W.$$

Innymi słowy: M jest powierzchnią, jeżeli lokalnie jest wykresem odwzorowania gładkiego. Jest oczywiste, że jeżeli $X = V_p \oplus W_p$ jest rozkładem o którym mówi definicja powierzchni, to dla $q \in O_V \times O_W$ możemy przyjąć $V_q = V_p$ oraz $W_q = W_p$.

STWIERDZENIE 15.1. *Załóżmy, że dla punktu $p \in M$ istnieją dwa rozkłady $X = V_p \oplus W_p = V'_p \oplus W'_p$ i dwa odwzorowania φ, φ' o których mówi definicja powierzchni. Załóżmy ponadto, że na zbiorze otwartym O odwzorowanie*

$$pr_V \circ (\text{id} \times \varphi'): O_{V'} \supset O \rightarrow O_V, \tag{15.1}$$

gdzie $pr_V: O_V \times O_W \rightarrow O_V$ jest rzutem na pierwszą składową, jest dobrze określone. Wówczas odwzorowanie to jest gładkim dyfeomorfizmem na otwarty podzbiór O_V .

DOWÓD: Odwzorowanie φ' jest gładkie, więc i odwzorowanie $pr_V \circ (\text{id} \times \varphi')$ jest gładkie tam, gdzie określone. Posiada również odwzorowanie odwrotne, a mianowicie $pr_{V'} \circ (\text{id} \times \varphi)$, które też jest gładkie. ■

Ze stwierdzenia tego wynika między innymi, że wymiary podprzestrzeni V_p i V'_p są równe. *Wymiarem* powierzchni M w punkcie p nazywamy wymiar podprzestrzeni V_p . Wymiar jest stały na składowych spójnych powierzchni M . Odwzorowanie

$$\psi: O_V \rightarrow M \subset X: x \mapsto (x, \varphi(x))$$

nazywać będziemy *lokalną parametryzacją* powierzchni M .

Odwzorowanie

$$\kappa = \psi^{-1}: M \cap (O_V \times O_W) \rightarrow O_V \subset V$$

nazywać będziemy *lokalną mapą*. Ponieważ podprzestrzeń V jest wymiaru skończonego możemy, poprzez wybór bazy, utożsamiać ją z \mathbb{R}^m . Przy takim utożsamieniu lokalną mapę nazywać będziemy też *lokalnym układem współrzędnych*. Stwierdzenie 1 możemy wypowiedzieć tak: jeżeli ψ_1 i ψ_2 są dwiema parametryzacjami, to

odwzorowanie $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ jest gładkie tam, gdzie określone. Lub równoważnie: jeżeli κ_1 i κ_2 są dwiema mapami, to odwzorowanie $\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}$ jest gładkie tam, gdzie określone.

Powierzchnia M (podobnie jak każdy podzbiór \mathbb{R}^n) posiada naturalną topologię indukowaną z X : podzbiór $O \subset M$ jest otwarty, jeżeli istnieje zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że $O = U \cap M$. W tej topologii lokalna parametryzacja i lokalna mapa są odwzorowaniami ciągłymi.

Uwaga: jeżeli w definicji powierzchni warunek gładkości zastąpimy warunkiem k -krotnej różniczkowalności, to mówimy o powierzchni klasy C^k .

Twierdzenia o funkcji uwikłanej i o stałym rzędzie dają sposoby na wyjaśnianie, czy zbiór jest powierzchnią.

Twierdzenie o funkcji uwikłanej było sformułowane w sposób następujący:

TWIERDZENIE (O FUNKCJI UWIKLANEJ). *Założmy, że odwzorowanie*

$$G: V \times W \supset U \rightarrow Y$$

jest różniczkowalne w sposób ciągły i że dla $(x_0, y_0) \in U$, $G(x_0, y_0) = 0$ pochodna cząstkowa $G'_W(x_0, y_0)$ jest odwracalna (tzn. $G'_W(x_0, y_0)^{-1}$ istnieje i jest ciągłe).

Wówczas istnieje otoczenie $V \supset \tilde{U} \ni x_0$ i jedyne odwzorowanie ciągłe $T: \tilde{U} \rightarrow W$ takie, że $T(x_0) = y_0$ i $G(x, T(x)) = 0$. Ponadto T jest różniczkowalne w sposób ciągły i

$$T'(x) = -(G'_W(x, T(x)))^{-1} \circ G'_V(x, T(x)) .$$

W twierdzeniu tym rozkład przestrzeni argumentów na sumę prostą $X = V \oplus W$ nie jest konieczny. Wystarczy założyć, że odwzorowanie $G: X \rightarrow Y$ ma rząd maksymalny, równy wymiarowi przestrzeni Y . Możemy teraz przeformułować twierdzenie o funkcji uwikłanej w sposób następujący:

TWIERDZENIE 15.1. *Założmy, że odwzorowanie*

$$G: X \supset U \rightarrow Y$$

między przestrzeniami wektorowymi wymiaru skończonego jest gładkie i że dla każdego $p \in U$, $G(p) = 0$ pochodna $G'(p)$ jest surjekcją.

Wówczas zbiór $M = G^{-1}(0) \subset U \subset X$ jest powierzchnią wymiaru $\dim X - \dim Y$.

DOWÓD: Dla wybranego $p \in M$ kładziemy $V_p = \ker G'(p)$ i W_p równe dowolnej podprzestrzeni dopełniającej V_p w X . Z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika istnienie otoczeń $O_V \subset V_p, O_W \subset W_p$ i odwzorowania φ , o których mowa w definicji powierzchni. ■

Z kolei twierdzenie o stałym rzędzie podane zostało w postaci następującej.

TWIERDZENIE (O STAŁYM RZĘDZIE). *Zakładamy, że wymiary przestrzeni X i Y są skończone i że odwzorowanie $S: Y \supset U \rightarrow X$ jest różniczkowalne w sposób ciągły, a rząd pochodnej jest stały. Wówczas dla każdego $x \in U$ istnieje otoczenie \tilde{U} takie, że $S(\tilde{U})$ jest wykresem odwzorowania, to znaczy istnieją podprzestrzenie V, W przestrzeni Y takie, że $Y = V \oplus W$ i $S(\tilde{U})$ jest wykresem odwzorowania $T: V \supset O \rightarrow W$.*

A oto wersja „geometryczna” tego twierdzenia:

TWIERDZENIE 15.2. *Załóżmy, że odwzorowanie $S: Y \supset U \rightarrow X$ jest gładkie, a rząd pochodnej jest stały, równy m . Wówczas dla każdego $x \in U$ istnieje otoczenie \tilde{U} takie, że $S(\tilde{U})$ jest powierzchnią w X wymiaru m .*

Zwróćmy uwagę na istotną różnicę w znaczeniu tych twierdzeń. Twierdzenie 15.1 mówi, że cały zbiór $M = G^{-1}(0)$ jest powierzchnią, natomiast Twierdzenie 15.2 mówi tylko, że $S(\tilde{U})$ jest powierzchnią. Mówimy, że $S(U)$ jest *lokalnie* powierzchnią. O tym, czy cały zbiór $S(U)$ jest powierzchnią decydują globalne, nie do uchwycenia poprzez analizę wyłącznie pochodnej, własności odwzorowania S (patrz przykłady poniżej).

Przykłady:

- (1) Podzbiór otwarty $O \subset \mathbb{R}^n$ jest powierzchnią wymiaru n .
- (2) Zbiór jednopunktowy $\{m\}$ jest powierzchnią wymiaru zero.
- (3) Sfera S^2 w \mathbb{R}^3 jest powierzchnią. S^2 jest dana jako $\varphi^{-1}(0)$, gdzie

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1: (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Z twierdzenia o funkcji uwikłanej jest to powierzchnia.

- (4) Rząd pochodnej odwzorowania

$$\varphi:]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

danego wzorem

$$\varphi(x, y) = \left(\left(1 + x \sin\left(\frac{1}{2}y\right)\right) \cos y, \left(1 + x \sin\left(\frac{1}{2}y\right)\right) \sin y, x \sin\left(\frac{1}{2}y\right) \right)$$

jest w każdym punkcie równy 2. Jego obraz jest powierzchnią (lokalnie) na mocy twierdzenia o stałym rzędzie. Łatwo pokazać, że jest również powierzchnią globalnie. Powierzchnia ta nazywana jest *wstęgą Möbiusa*.

- (5) Podzbiór \mathbb{R}^2 zadany równaniem $xy = 0$ nie jest powierzchnią. Jest to para przecinających się prostych (osi współrzędnych). Dla żadnego otoczenia zera (punkt przecięcia prostych) i dla żadnego rozkładu \mathbb{R}^2 na dwie podprzestrzenie (jednowymiarowe) przecinające się proste nie są wykresem odwzorowania.

(6) Rząd pochodnej odwzorowania

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (\cos(t), \sin(2t))$$

jest w każdym punkcie równy 1, więc jego obraz jest lokalnie (względem argumentu t) powierzchnią. Ale przecięcie kuli $K(0, \varepsilon)$ z $\varphi(\mathbb{R})$ składa się, dla $\varepsilon < \frac{1}{2}$, z dwóch łuków, przecinających się w zerze. Argumenty jak w poprzednim przykładzie pokazują, że łuki te nie tworzą powierzchni.

Niech M będzie powierzchnią w X . Zbiór $N \subset M$ nazwiemy *podpowierzchnią powierzchni* M , jeżeli dla każdego lokalnego układu współrzędnych $\kappa: M \supset O \rightarrow \mathbb{R}^m$ zbiór $\kappa(N \cap O)$ jest powierzchnią w \mathbb{R}^m . W szczególności, otwarty podzbiór powierzchni M jest jego podpowierzchnią.

Oczywistym jest wniosek, że podpowierzchnia N powierzchni $M \subset X$ jest powierzchnią w X .

15.2. Funkcje na powierzchniach.

W dalszym ciągu tylko sporadycznie będziemy korzystać explicite z faktu, że powierzchnia M jest podzbiorem przestrzeni wektorowej X . Proponowane sformułowania opierać się będą tylko na istnieniu i zgodności (Stwierdzenie 15.1) lokalnych parametryzacji lub lokalnych układów współrzędnych. Niech M będzie powierzchnią w \mathbb{R}^n .

DEFINICJA 15.2. Odwzorowanie $f: M \rightarrow Y$ o wartościach w przestrzeni Banacha Y nazywamy *różniczkowalnym*, jeżeli dla każdej lokalnej parametryzacji $\psi: \mathbb{R}^m \supset O \rightarrow M$ odwzorowanie

$$f \circ \psi: \mathbb{R}^m \supset O \rightarrow Y$$

jest różniczkowalne.

W oczywisty sposób definiujemy też odwzorowanie różniczkowalne w punkcie. Na mocy Stwierdzenia 1, dla sprawdzenia różniczkowalności odwzorowania w punkcie p , wystarczy sprawdzić różniczkowalność $f \circ \psi$ w punkcie $\psi^{-1}(p)$ dla jednej tylko parametryzacji otoczenia p .

Przykład. Każda lokalna mapa jest odwzorowaniem różniczkowalnym.

Jeżeli mamy odwzorowanie różniczkowalne $F: X \supset O \rightarrow Y$ określone na otwartym otoczeniu powierzchni M , to $f := F|_M$ jest też odwzorowaniem różniczkowalnym. Wystarczy zauważyć, że

$$f \circ \psi = F \circ \psi,$$

a ψ jest różniczkowalne jako odwzorowanie $\psi: \mathbb{R}^m \supset O \rightarrow X$. Możemy pokazać, że każde odwzorowanie różniczkowalne $f: M \rightarrow Y$ jest uzyskiwalne w ten sposób. Lokalnie jest to oczywiste: mając lokalną reprezentację M jako wykresu odwzorowania $\varphi: O_V \rightarrow O_W$ definiujemy $F_O: O_V \times O_W \rightarrow \mathbb{R}$ przez

$$F_O(x, y) = f(x, \varphi(x)).$$

Problem polega na zbudowaniu z rodziny (F_O) jednej funkcji F na otoczeniu całego M . Standardowa metoda polega na wykorzystaniu twierdzenia o różniczkowalnym rozkładzie jedności. Przy okazji dowodzenia twierdzenia o zamianie zmiennych poznaliśmy twierdzenie o rozkładzie jedności w następującym kształcie.

TWIERDZENIE (O RÓŻNICZKOWALNYM ROZKŁADZIE JEDNOŚCI). Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ zwarty i (U_i) - jego pokrycie zbiorami otwartymi. Istnieją nieujemne funkcje gładkie (ϕ_i) na \mathbb{R}^n takie, że $\text{supp}(\phi_i) \subset U_i$, tylko skończona liczba funkcji jest różna od zera oraz $0 \leq \sum_i \phi_i \leq 1$ i $\sum_i \phi_i(x) = 1$ dla $x \in K$.

Dzięki zwartości można było żądać, by prawie wszystkie funkcje były równe zeru i w konsekwencji, by występujące w sformułowaniu twierdzenia sumy były dobrze określone. Zauważmy, że dla określenia tych sum wystarczy, żeby w otoczeniu każdego punktu tylko skończona liczba funkcji z rodziny (ϕ_i) była różna od zera. Mając to na uwadze można twierdzenie o rozkładzie jedności przeformułować w sposób następujący:

TWIERDZENIE 15.3 (O RÓŻNICZKOWALNYM ROZKŁADZIE JEDNOŚCI). Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ i niech (U_i) będzie pokryciem M zbiorami otwartymi w X . Istnieją nieujemne funkcje gładkie (ϕ_i) na X takie, że $\text{supp}(\phi_i) \subset U_i$, w otoczeniu każdego punktu X tylko skończona liczba funkcji jest różna od zera, $\sum_i \phi_i \leq 1$ i $\sum_i \phi_i(x) = 1$ dla $x \in M$.

Twierdzenie to przyjmujemy bez dowodu.

Wykażemy teraz, korzystając z rozkładu jedności, istnienie odwzorowania gładkiego F na \mathbb{R}^n takiego, że $F|_M = f$. Dla każdego punktu $p \in M$ mamy otoczenie $O_p = O_{V_p} \times O_{W_p}$, o którym mówi definicja powierzchni. Rodzina $(O_p)_{p \in M}$ tworzy pokrycie M zbiorami otwartymi. Bierzymy rozkład jedności (ϕ_p) związany z tym pokryciem i kładziemy

$$F = \sum_p \tilde{F}_p$$

gdzie

$$\tilde{F}_p(x) = \begin{cases} \phi_p(x)F_{O_p}(x) & \text{dla } x \in O_p \\ 0 & \text{dla } x \notin O_p. \end{cases}$$

Lokalnie jest to skończona suma funkcji różniczkowalnych, więc jest funkcją różniczkowalną. Dla $x \in M$ mamy

$$F(x) = \sum_p \phi_p(x)F_{O_p}(x) = f(x) \sum_p \phi_p(x) = f(x).$$

Zatem każde odwzorowanie różniczkowalne na M o wartościach w przestrzeni Banacha jest obcięciem odwzorowania różniczkowalnego, określonego na otwartym otoczeniu M w \mathbb{R}^n .

Wniosek ten można też ująć w następujący sposób.

STWIERDZENIE 15.4. *Każde odwzorowanie różniczkowalne na podpowierzchni N powierzchni M o wartościach w przestrzeni Banacha jest obcięciem odwzorowania różniczkowalnego, określonego na otwartym otoczeniu N w M .*

DOWÓD: Wystarczy przypomnieć, że podpowierzchnia powierzchni $M \subset \mathbb{R}^n$ jest powierzchnią w \mathbb{R}^n . ■

I jeszcze jedna uwaga dotycząca rozkładu jedności. Z Twierdzenia 15.3 wynika inna wersja twierdzenia o rozkładzie jedności na powierzchni M . W wersji tej nie odwołujemy się explicite do faktu, że M jest zanurzone w \mathbb{R}^n .

TWIERDZENIE 15.5 (O ROZKŁADZIE JEDNOŚCI NA POWIERZCHNI). *Niech (U_i) będzie pokryciem powierzchni M zbiorami otwartymi w M . Istnieją nieujemne funkcje gładkie (ϕ_i) na M takie, że $\text{supp}(\phi_i) \subset U_i$, w otoczeniu każdego punktu M tylko skończona liczba funkcji jest różna od zera i $\sum_i \phi_i(p) = 1$ dla $p \in M$.*

Z tej postaci twierdzenia o rozkładzie jedności będziemy intensywnie korzystać w dalszej części wykładu.

15.3. Różniczkowalne odwzorowania powierzchni.

Niech $X \supset M$ i $X' \supset M'$ będą powierzchniami i niech dane będzie odwzorowanie $F: M \rightarrow M'$.

DEFINICJA 15.6. *Odwzorowanie F jest różniczkowalnym odwzorowaniem powierzchni, jeżeli traktowana jako odwzorowanie w przestrzeń Banacha (wymiaru skończonego)*

$$F: M \rightarrow X'$$

jest różniczkowalne.

STWIERDZENIE 15.7. *F jest różniczkowalne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej parametryzacji ψ powierzchni M i każdego lokalnego układu współrzędnych κ' na powierzchni M' odwzorowanie*

$$(\kappa') \circ F \circ \psi \tag{15.2}$$

jest różniczkowalne (tam, gdzie określone).

DOWÓD: Jeżeli odwzorowanie F jest różniczkowalne, to z definicji odwzorowanie $F \circ \psi: \mathbb{R}^m \supset O \rightarrow X'$ jest też różniczkowalne. Lokalna mapa $\kappa': M' \supset U' \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym, więc jest obcięciem odwzorowania różniczkowalnego $\tilde{\kappa}': X' \supset \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$ (strona 5). Odwzorowanie $\tilde{\kappa}' \circ F \circ \psi$ jest różniczkowalne jako złożenie odwzorowań różniczkowalnych, ale

$$\tilde{\kappa}' \circ F \circ \psi = \kappa' \circ F \circ \psi,$$

bo obraz ψ jest zawarty w M . W drugą stronę:

$$F \circ \psi = (\kappa')^{-1} \circ \kappa' \circ F \circ \psi$$

(tam, gdzie to ma sens). Odwzorowanie $(\kappa')^{-1}$ jest lokalną parametryzacją, więc jest różniczkowalnym odwzorowaniem z otwartego podzbioru $\mathbb{R}^{m'}$ w X' . Jeżeli zatem $\kappa' \circ F \circ \psi$ jest różniczkowalne, to $F \circ \psi$ jest też odwzorowaniem różniczkowalnym. Wnioskujemy, że odwzorowanie F jest różniczkowalne. ■

Ze stwierdzenia tego mamy oczywisty wniosek: złożenie odwzorowań różniczkowalnych powierzchni jest odwzorowaniem różniczkowalnym.

STWIERDZENIE 15.8. *Odwzorowanie $F: M \rightarrow M'$ jest różniczkowalne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej funkcji różniczkowalnej $f: M' \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja $f \circ F: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna.*

DOWÓD: W jedną stronę oczywiste, bo złożenie odwzorowań różniczkowalnych jest różniczkowalne. W drugą stronę prawie oczywiste. Wystarczy zauważyć, że odwzorowanie κ' ma wartości w $\mathbb{R}^{m'}$, jest więc skończonym ciągiem funkcji (lokalnych) na M' . Są one funkcjami różniczkowalnymi, więc ich złożenia z F też są różniczkowalne. Konsekwentnie, $\kappa' \circ F \circ \psi$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym. Ze Stwierdzenia 15.7 wynika, że odwzorowanie F jest różniczkowalne. ■

15.4. Rozmaitość różniczkowa (różniczkowalna).

Rozumowania z poprzedniego rozdziału można podsumować wnioskiem, że dla stwierdzenia, czy odwzorowanie F między powierzchniami M i M' jest różniczkowalne potrzebne są tylko lokalne parametryzacje lub, równoważnie, lokalne układy współrzędnych. Możemy zapomnieć o tym, że M jest zanurzone w X a M' w X' . Istotny jest tylko fakt, że dla każdej pary lokalnych układów współrzędnych κ i κ' , odpowiednio na M i M' , odwzorowanie

$$\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}: \mathbb{R}^m \supset O \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$$

jest różniczkowalne wszędzie tam, gdzie określone.

Podobne warunki zgodności mamy też dla lokalnych parametryzacji M i M' . Zbiór lokalnych map (lokalnych układów współrzędnych) nazywa się *atlasem*. Dochodzimy w ten sposób do pojęcia *abstrakcyjnej rozmaitości różniczkowej* jako zbioru M wyposażonego w topologię i atlas. Poważnym problemem jest rozpoznanie ograniczeń na topologię wynikających z faktu, że powierzchnia jest zanurzona w X . Okazuje się, że znakiem rozpoznawczym jest istnienie lokalnego rozkładu jedności.

W dalszym ciągu używać będziemy zamiennie określeń powierzchnia i rozmaitość.

15.5. Wektory styczne do powierzchni (rozmaitości).

Niech M będzie powierzchnią. Krzywą w M nazywamy odwzorowanie różniczkowalne

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M.$$

Założenie, że krzywa jest określona na całym \mathbb{R} nie jest istotne. Wystarczy, by była określona w otoczeniu zera. Dla wygody notacji będziemy jednak zakładać, że

zbiorem argumentów krzywej jest cała oś rzeczywista. Dwie krzywe γ, γ' w M są równoważne, jeżeli $\gamma(0) = \gamma'(0)$ i

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma')(0) \quad (15.3)$$

dla każdej funkcji różniczkowalnej na M . Klasę równoważności krzywych względem tej relacji równoważności nazywamy *wektorem stycznym* do M z punktem zaczepienia $\gamma(0)$. Będziemy go oznaczać $\mathbf{t}\gamma(0)$. Zbiór wektorów stycznych do M , zaczepionych w punkcie p będziemy oznaczać $\mathbf{T}_p M$ i nazywać przestrzenią styczną do M w punkcie p . Zbiór wszystkich wektorów stycznych do M oznaczamy $\mathbf{T}M$ i nazywamy *wiazką styczną* do M . Mamy oczywisty rzut kanoniczny

$$\tau_M: \mathbf{T}M \rightarrow M: \mathbf{t}\gamma(0) \mapsto \gamma(0).$$

Każdej parze (wektor styczny $v = \mathbf{t}\gamma(0)$, funkcja f na M) możemy przypisać liczbę

$$v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0).$$

Z definicji wektora stycznego wynika niezależność tej liczby od krzywej reprezentującej wektor styczny v . Liczba $v(f)$ jest pochodną funkcji f w kierunku wektora stycznego v .

W fizyce wektory styczne reprezentują takie intuicje jak infinitezymalne przesunięcia (np w statyce), prędkości (w dynamice). Zwróćmy tylko uwagę na fakt, że wektor styczny (prędkość) ma zawsze punkt zaczepienia (położenie). Wektorów stycznych zaczepionych w różnych punktach nie da się porównać nie mając do dyspozycji dodatkowej struktury. Wektor styczny jest infinitezymalnym kawałkiem ruchu. Nieco większy (ciągle infinitezymalny) kawałek ruchu (np położenie, prędkość i przyspieszenie) dostaniemy, dokładając do warunku (15.3) równość wyższych pochodnych do pewnego rzędu (np. drugiego).

15.6. Operacje algebraiczne na wektorach stycznych.

Niech $v = \mathbf{t}\gamma$ będzie wektorem stycznym do M i niech $a \in \mathbb{R}$. Iloczyn av zdefiniowany jest wzorem

$$av = \mathbf{t}\gamma',$$

gdzie $\gamma'(t) = \gamma(at)$. Łatwo sprawdzić, że definicja ta jest poprawna, to znaczy av nie zależy od reprezentacji wektora v . Wynika to z równości

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma')(0) = a \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0).$$

Powiemy, że między trzema wektorami v, w, u zaczepionymi w jednym punkcie zachodzi relacja

$$u = v + w,$$

jeżeli dla każdej funkcji f

$$u(f) = v(f) + w(f).$$

Uwaga. Z konstrukcji wektora stycznego v wynika, że definiuje on odwzorowanie $\varphi_v: f \mapsto v(f) \in \mathbb{R}$ na przestrzeni funkcji gładkich na M . Jest zatem elementem dużej przestrzeni wektorowej wszystkich funkcji (funkcjonałów) określonych na przestrzeni funkcji gładkich. Wprowadzone powyżej relacje iloczynu i sumy są zgodne ze strukturą tej przestrzeni wektorowej. Powstaje naturalne pytanie: czy przestrzeń wektorów stycznych tworzy podprzestrzeń wektorową tej dużej przestrzeni.

Zastanówmy się najpierw, czy wszystkie wektory zaczepione w dwóch różnych punktach mogą tworzyć jedną podprzestrzeń wektorową.

Niech $v \in \mathbb{T}_p M$, $w \in \mathbb{T}_q M$ będą niezerowymi wektorami zaczepionymi w dwóch różnych punktach, tzn. $p \neq q$. Przypuśćmy, że istnieje wektor styczny u taki, że dla każdej funkcji f na M zachodzi równość.

$$v(f) + w(f) = u(f). \quad (15.4)$$

Wektor u nie może być zaczepiony jednocześnie w p i q , więc możemy przyjąć, że $\tau_M(u) \neq p$. Argumentacje takie jak przy dowodzie twierdzenia o rozkładzie jedności (Analiza II) pokazują, że istnieje funkcja gładka φ taka, że w otoczeniu punktu p jest równa zero, a w otoczeniu punktów q i $\tau_M(u)$ jest równa jeden. Ponieważ pochodna w zerze funkcji $f \circ \gamma$ zależy tylko od wartości f w otoczeniu $\gamma(0)$, mamy równości

$$v(f\varphi) = 0, \quad w(f\varphi) = w(f), \quad u(f\varphi) = u(f). \quad (15.5)$$

Ponieważ równość (15.4) zachodzi dla każdej funkcji f , mamy

$$w(f) = v(f\varphi) + w(f\varphi) = u(f\varphi) = u(f) = v(f) + w(f), \quad (15.6)$$

czyli $v(f) = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że v jest wektorem stycznym różnym od zera. Nie ma więc wektora, który byłby sumą dwóch (różnych od zera) wektorów zaczepionych w dwóch różnych punktach. Mowa o sumie w przestrzeni wektorowej wszystkich funkcji określonych na zbiorze funkcji gładkich.

15.7. Transport wektorów. Odwzorowania styczne.

Niech M , N będą powierzchniami (rozmaitościami) i niech $F: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Dla każdej krzywej różniczkowalnej $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ na M definiujemy krzywą $F_*\gamma$ na N wzorem

$$F_*\gamma = F \circ \gamma.$$

STWIERDZENIE 15.9. *Przyporządkowanie $\gamma \mapsto F_*\gamma$ definiuje odwzorowanie między wektorami*

$$\mathbb{T}_p F: \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_{F(p)} N,$$

przy czym

$$(\mathbb{T}_p F(v))(f) = v(f \circ F) \quad (15.7)$$

dla każdej funkcji f na N . Ponadto $\mathbb{T}_p F$ zachowuje relacje dodawania wektorów stycznych i mnożenia ich przez liczbę.

DOWÓD: Najpierw trzeba pokazać, że jeżeli krzywe γ, γ' są równoważne, to krzywe $F_*\gamma$ i $F_*\gamma'$ też są równoważne. Istotnie, dla dowolnej funkcji f na N

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f \circ (F \circ \gamma)(0) &= \frac{d}{dt}(f \circ F) \circ \gamma(0) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ F) \circ \gamma'(0) = \frac{d}{dt}f \circ (F \circ \gamma')(0). \end{aligned}$$

Wynika stąd też relacja (15.7). Jeżeli teraz dla trzech wektorów v, w, u , stycznych do M w punkcie p mamy

$$u = v + w,$$

to

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_p F(u))(f) &= u(f \circ F) = v(f \circ F) + w(f \circ F) \\ &= (\mathbb{T}_p F(v))(f) + (\mathbb{T}_p F(w))(f). \end{aligned}$$

Zatem $\mathbb{T}_p F(u) = \mathbb{T}_p F(v) + \mathbb{T}_p F(w)$. Podobnie wykazujemy jednorodność. ■

Odwzorowanie $\mathbb{T}_p F$ nazywamy *odwzorowaniem stycznym* w punkcie p do odwzorowania F . Zebrane punkt po punkcie definiują *odwzorowanie styczne*

$$\mathbb{T}F: \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}N.$$

Z definicji odwzorowania stycznego wynika natychmiast

STWIERDZENIE 15.10. Niech $F: M \rightarrow N$ i $\Psi: N \rightarrow S$ będą różniczkowalnymi odwzorowaniami powierzchni. Wówczas

$$\mathbb{T}(\Psi \circ F) = \mathbb{T}\Psi \circ \mathbb{T}F$$

DOWÓD: Niech f będzie funkcją gładką na S . Wówczas

$$\begin{aligned} ((\mathbb{T}(\Psi \circ F))(v))(f) &= v(f \circ \Psi \circ F) = (\mathbb{T}F(v))(f \circ \Psi) \\ &= (\mathbb{T}\Psi(\mathbb{T}Fv))(f) = ((\mathbb{T}\Psi \circ \mathbb{T}F)(v))(f). \end{aligned}$$

Jako prostą konsekwencję tej własności odwzorowań stycznych dostajemy

STWIERDZENIE 15.11. Jeżeli odwzorowanie $F: M \rightarrow N$ jest, w otoczeniu punktu $p \in M$, dyfeomorfizmem (F jest odwracalne i odwzorowanie odwrotne jest różniczkowalne), to $\mathbb{T}_p F: \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_{F(p)} N$ jest odwracalne i

$$(\mathbb{T}_p F)^{-1} = \mathbb{T}_{F(p)} F^{-1}. \quad (15.8)$$

DOWÓD: Z poprzedniego stwierdzenia mamy

$$\mathbb{T}_p (F^{-1} \circ F) = \mathbb{T}_{F(p)} F^{-1} \circ \mathbb{T}_p F$$

oraz

$$\mathbb{T}_{F(p)} (F \circ F^{-1}) = \mathbb{T}_p F \circ \mathbb{T}_{F(p)} F^{-1}.$$

Z równości tych dostajemy natychmiast tezę. ■

W szczególności, wynika stąd

STWIERDZENIE 15.12. Niech $\psi: \mathbb{R}^m \supset O \rightarrow M$ będzie lokalną parametryzacją M otoczenia $p \in M$ i niech $\psi(x) = p$. Odwzorowanie

$$\mathbb{T}_x \psi: \mathbb{T}_x O \rightarrow \mathbb{T}_p M$$

jest bijekcją przestrzeni stycznych.

DOWÓD: Wystarczy przypomnieć sobie, że ψ^{-1} jest odwzorowaniem różniczkowalnym (lokalnym układem współrzędnych). Z poprzedniego stwierdzenia wynika, że

$$\mathbb{T}_p(\psi^{-1}) = (\mathbb{T}_x \psi)^{-1}.$$

■

Uwaga: Jeżeli $O \subset M$ jest otwartym podzbiorem M , to dla $p \in O$ mamy utożsamienie

$$\mathbb{T}_p O = \mathbb{T}_p M.$$

W ogólności, jeżeli $N \subset M$ jest podpowierzchnią i $\iota: N \rightarrow M$ jest kanonicznym włożeniem, to $\mathbb{T}\iota$ jest injekcją. Wynika to natychmiast ze Stwierdzenia 15.4. Możemy zatem utożsamiać wektor styczny do N z wektorem stycznym do M . Punkt zaczepienia jest oczywiście ten sam.

15.8. Ważne przykłady.

- (1) Jeżeli $M = \{p\}$, to $\mathbb{T}M$ składa się z jednego wektora zerowego zaczepionego w p .
- (2) Niech $M = O \subset X$ będzie otwartym podzbiorem przestrzeni wektorowej X .

STWIERDZENIE 15.13. Dla każdego $p \in O$ istnieje kanoniczna bijekcja przestrzeni stycznej $\mathbb{T}_p O$ i przestrzeni X . Operacje algebraiczne w przestrzeni stycznej odpowiadają kanonicznym operacjom dodawania i mnożenia przez liczbę w X .

DOWÓD: Ustalmy $p \in O$. Dla każdego elementu $v \in X$ zdefiniujemy krzywą γ_v wzorem (w otoczeniu p)

$$\gamma_v(t) = p + tv.$$

Wybermy bazę w przestrzeni X . Jeżeli funkcja $x^i: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest i -tą współrzędną względem tej bazy, to jak łatwo zauważyć

$$(\mathbf{t}\gamma_v(0))(x^i) = \frac{d}{dt}(x^i(p) + tx^i(v))|_{t=0} = x^i(v) = v^i,$$

(v^i jest współrzędną wektora v w wybranej bazie). Wynika stąd, że odwzorowanie

$$X \ni v \mapsto \mathbf{t}\gamma_v(0) \in \mathbb{T}_p M \tag{15.9}$$

jest injekcją oraz że zachowuje działania algebraiczne.

Wystarczy teraz wykazać surjektywność odwzorowania (15.9). Niech γ będzie krzywą w O i niech $\gamma(0) = p$. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że krzywa γ jest równoważna krzywej

$$t \mapsto p + t \frac{d}{dt} \gamma(0).$$

Krzywa ta jest postaci γ_v , gdzie $v = \frac{d}{dt} \gamma(0)$. ■

Mamy więc w tym przypadku naturalne utożsamienie $\mathbb{T}O$ z $O \times X$. Jeżeli $F: O \rightarrow N$ i również $N = U$ jest otwartym podzbiorem Y , to dla każdego $m \in O$

$$\mathbb{T}_m F: \mathbb{T}_m O = X \rightarrow \mathbb{T}_{F(m)} N = Y.$$

Odwzorowanie to jest znaną z Analizy II pochodną odwzorowania. Odwzorowanie styczne jest odpowiednikiem pochodnej dla dowolnych powierzchni (rozmaitości).

Z drugiego przykładu i ze Stwierdzenia 15.12 wynika, że przestrzeń styczna do powierzchni M jest w każdym punkcie przestrzenią wektorową wymiaru równego wymiarowi powierzchni.

STWIERDZENIE 15.14. *Wymiar przestrzeni stycznej $\mathbb{T}_p M$ jest równy wymiarowi powierzchni M w punkcie p .*

Możemy teraz sformułować geometryczną wersję twierdzenia o lokalnej odwracalności.

TWIERDZENIE 15.3 (O LOKALNEJ ODWRACALNOŚCI). *Niech $F: M \rightarrow N$ będzie gładkim odwzorowaniem powierzchni. Jeżeli odwzorowanie styczne*

$$\mathbb{T}_p F: \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_{F(p)} N \tag{15.10}$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych, to istnieje otoczenie otwarte O punktu p takie, że zbiór $F(O)$ jest otwarty i indukowane odwzorowanie

$$F: O \rightarrow F(O)$$

jest dyfeomorfizmem (jest odwracalne i odwzorowanie odwrotne jest gładkie).

DOWÓD: F jest dyfeomorfizmem w otoczeniu p wtedy i tylko wtedy, gdy $\kappa \circ F \circ \psi$ jest dyfeomorfizmem w otoczeniu x . κ jest tu lokalnym układem współrzędnych w otoczeniu $F(p)$, ψ jest lokalną parametryzacją w otoczeniu p i $p = \psi(x)$. Wystarczy teraz skorzystać drugiego przykładu i zastosować twierdzenie o lokalnej odwracalności, znane z Analizy II. ■

I jeszcze jedna uwaga. W \mathbb{R}^m mamy bazę kanoniczną (e_1, \dots, e_n) i, w związku z tym, każdy lokalny układ współrzędnych $\kappa = (x^i)_{i=1}^m$ zadaje bazę w $\mathbb{T}_p M$. Element tej bazy, odpowiadający e_i , oznaczamy

$$\frac{\partial}{\partial x^i},$$

to znaczy

$$\mathbb{T}\kappa\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = e_i$$

Uwaga. W oznaczeniach tych nie jest widoczny punkt zaczepienia wektora.

Zajmijmy się teraz przypadkiem powierzchni zanurzonej w przestrzeni wektorowej X . Wiemy już, że przestrzeń styczną do powierzchni $M \subset X$ można utożsamić z podprzestrzenią przestrzeni stycznej do X , którą utożsamiamy z X .

Niech $\psi: \mathbb{R}^m \supset O \rightarrow M \subset X$ będzie parametryzacją powierzchni M . Z własności odwzorowania stycznego wynika że $\mathbb{T}\psi$ zadaje lokalną parametryzację wiązki stycznej i że dwie takie parametryzacje ψ, ψ' są zgodne, tzn. $(\mathbb{T}\psi)^{-1} \circ \mathbb{T}\psi'$ jest gładkie tam, gdzie określone. Wynika stąd, że wiązka styczna jest powierzchnią w $X \times X$.

Twierdzenia o stałym rzędzie i o funkcji uwikłanej dają nam prosty przepis na znajdowanie przestrzeni stycznej do M jako podprzestrzeni X .

STWIERDZENIE 15.15. *Załóżmy, że odwzorowanie $G: X \rightarrow Y$ spełnia założenia Twierdzenia 15.1. Wówczas dla $p \in G^{-1}(0) = M$*

$$\mathbb{T}_p M = G'(p)^{-1}(0).$$

DOWÓD: Niech $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ będzie krzywą w M i niech $p = \gamma(0)$. Mamy $G \circ \gamma = 0$, więc $G'(p)(t\gamma) = 0$. Stąd zawieranie w jedną stronę. Z dowodu Twierdzenia 15.1 wynika, że w otoczeniu p powierzchnia M jest wykresem odwzorowania z otwartego podzbioru podprzestrzeni $G'(p)^{-1}(0) \subset X$ w podprzestrzeń dopełniającą. Jest zatem wymiaru $\dim G'(p)^{-1}(0)$. Przestrzeń styczna jest tego samego wymiaru, więc mamy dowodzoną równość. ■

Podobnie mamy

STWIERDZENIE 15.16. *Niech odwzorowanie $T: Y \supset U \rightarrow X$ spełnia założenia Twierdzenia 15.2. Jeżeli powierzchnia M jest równa $T(U)$, to przestrzeń styczna $\mathbb{T}_p M$ jest równa $T'(y)(Y)$, gdzie $T(y) = p$.*

Uwagi.

- (1) Jeżeli powierzchnia M jest otwartym podzbiorem przestrzeni wektorowej X , to wektor styczny, zaczepiony w dowolnym punkcie, może być utożsamiony z elementem przestrzeni X . Mówimy, że element przestrzeni X jest *wektorem swobodnym*.

- (2) Jeżeli $M = X$, to każdy wektor $v \in T_p X$ jest reprezentowany przez wyróżnioną krzywą (prostą)

$$\gamma_v: t \mapsto p + tv,$$

a prosta przez dwa punkty: p i $\gamma_v(1) = p + v$. Stąd częsta reprezentacja wektora stycznego jako pary punktów w X .

15.9. Wektory ko-styczne (ko-wektory styczne) do powierzchni.

Niech $f \in C^\infty(M)$. Dla każdego punktu p na powierzchni M funkcja f zadaje odwzorowanie liniowe

$$T_p M \ni v \mapsto v(f) \in \mathbb{R}.$$

Liniowość tego odwzorowania zawarta jest w definicji struktury wektorowej w przestrzeni stycznej (struktura wektorowa przestrzeni stycznej jest, z definicji, taką, w której powyższe odwzorowania są liniowe). Odwzorowanie to nazywamy *różniczką* funkcji f w punkcie p i oznaczamy $d_p f$. Zbiór różniczek w punkcie p oznaczamy $T_p^* M$. Jest to przestrzeń wektorowa z naturalną strukturą indukowaną ze struktury przestrzeni wektorowej funkcji na M :

$$d_p f + d_p g := d_p(f + g).$$

Jako funkcjonał liniowy na $T_p M$ różniczka funkcji jest elementem $(T_p M)^*$, przestrzeni dualnej (sprzężonej) do $T_p M$. Dodawania (i mnożenia przez liczby) w $T_p^* M$ i $(T_p M)^*$ są zgodne, więc przestrzeń różniczek jest w naturalny sposób utożsamiana z podprzestrzenią wektorową przestrzeni dualnej do przestrzeni stycznej. Dalej pokażemy, że obie przestrzenie są równe. Element przestrzeni wektorowej $T_p^* M$ nazywamy również ko-wektorem (kovektorem) stycznym lub wektorem ko-stycznym (kostycznym) do powierzchni M , zaczepionym w punkcie p , a zbiór $T_p^* M$ *przestrzenią kostyczną*. Zbiór wszystkich kowektorów na M oznaczamy $T^* M$ i nazywamy *wiązką kostyczną*. Istnieje kanoniczne rzutowanie

$$\pi_M: T^* M \rightarrow M: d_p f \mapsto p.$$

Niech $F: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym powierzchni. Odwzorowanie sprzężone do odwzorowania stycznego

$$T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

jest odwzorowaniem liniowym

$$(T_p F)^*: (T_{F(p)} N)^* \rightarrow (T_p M)^*.$$

Odwzorowanie to indukuje odwzorowanie przestrzeni różniczek

$$(T_p F)^*: T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M,$$

tzn. obraz różniczki jest różniczką. Aby to udowodnić zauważmy, że dla $f \in C^\infty(N)$ i dla $v \in \mathbb{T}_p M$ mamy

$$\begin{aligned} \langle v, (\mathbb{T}_p F)^*(d_{F(p)} f) \rangle &= \langle \mathbb{T}_p F(v), d_{F(p)} f \rangle \\ &= \mathbb{T}_p F v(f) = v(f \circ F) \\ &= \langle v, d_p(f \circ F) \rangle. \end{aligned} \quad (15.11)$$

W szczególności, dla lokalnej mapy $\kappa: M \supset O \rightarrow \mathbb{R}^m$ odwzorowanie $(\mathbb{T}_p \kappa)^*$ jest liniowym izomorfizmem $\mathbb{T}_{\kappa(p)}^* \mathbb{R}^m$ i $\mathbb{T}_p^* M$, oraz $(\mathbb{T}_{\kappa(p)} \mathbb{R}^m)^*$ i $(\mathbb{T}_p M)^*$.

Uwaga. Odwzorowania styczne $\mathbb{T}_p F$ zbierają się w odwzorowanie między wiązkami stycznymi $\mathbb{T}F: \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}N$. W przeciwieństwie do tego, odwzorowania $(\mathbb{T}_p F)^*$ nie zbierają się do odwzorowania między \mathbb{T}^*M i \mathbb{T}^*N , a jedynie do relacji. Wynika to z faktu, że F i $\mathbb{T}_p F$ „działają” od M do N , zaś $(\mathbb{T}_p F)^*$ w kierunku przeciwnym.

STWIERDZENIE 15.17. *Każdy element $z \in (\mathbb{T}_p M)^*$ jest różniczką funkcji, czyli*

$$(\mathbb{T}_p M)^* = \mathbb{T}_p^* M.$$

DOWÓD: Ponieważ $(\mathbb{T}_p \kappa)^*$ jest liniowym izomorfizmem, na mocy związku (15.11) wystarczy pokazać, że stwierdzenie jest prawdziwe dla otwartego podzbioru \mathbb{R}^n . Niech więc $O \subset \mathbb{R}^n$ i niech $a \in (\mathbb{T}_{x_0} O)^*$. Oznaczmy

$$a_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, a \right\rangle$$

i zdefiniujmy funkcję f_a na O przez

$$f_a(x) = \sum_i a_i (x^i - x_0^i).$$

Prosty rachunek pokazuje, że

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f_a) = a_i$$

czyli $a = d_{x_0} f_a$. ■

Argumentacja użyta w dowodzie pokazuje również, że dla każdego $x \in O$ kowektory $(d_x x^i)$ tworzą bazę $\mathbb{T}_x^* O$, dualną do bazy $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ w $\mathbb{T}_x O$. W bazie tej różniczka funkcji f ma taki rozkład:

$$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) d_x x^i. \quad (15.12)$$

I jeszcze dwie uwagi:

Ponieważ dla zbioru otwartego $O \subset X$ mamy $\mathbb{T}O = O \times X$, więc podobnie

$\mathbb{T}^*O = O \times X^*$. Zatem dla $M \subset X$ przestrzeń \mathbb{T}_p^*M może być utożsamiona z przestrzenią ilorazową X^* przez anihilator przestrzeni stycznej \mathbb{T}_pM jako podprzestrzeni X^* . Anihilator ten może być utożsamiony z dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni stycznej względem dowolnego iloczynu skalarnego w X . W konsekwencji, przestrzeń dualna do podprzestrzeni w X może być utożsamiona z nią samą. Oznacza to, że możemy uważać \mathbb{T}^*M za podzbiór $X \times X$ (lub $X \times X^*$). Lokalne układy współrzędnych na M zadają (patrz wyżej) lokalne układy współrzędnych na \mathbb{T}^*M . Są one zgodne, więc \mathbb{T}^*M jest powierzchnią.

Druga uwaga dotyczy związku różniczki z pochodną funkcji jako odwzorowania. Oczywiście jest sens robić to porównanie jedynie w przypadku $O \subset X$. Dla $x \in O$ pochodna $f'(x)$ jest odwzorowaniem liniowym $f'(x): X \rightarrow \mathbb{R}$. Ponieważ X utożsamiamy z przestrzenią styczną w każdym punkcie, $f'(x)$ definiuje nam kowektor. Natychmiast sprawdzamy, że ten kowektor jest równy $d_x f$.

15.10. Pola wektorowe i kowektorowe.

Polem wektorowym (polem wektorów stycznych) Z na M nazywamy odwzorowanie

$$Z: M \rightarrow \mathbb{T}M$$

takie, że

$$\tau_M \circ Z(p) = p.$$

Mówimy, że pole wektorów stycznych jest gładkie, jeżeli jest gładkie jako odwzorowanie między powierzchniami.

Niech $\kappa = (x^i)$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Jak już wiemy, wektory $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, m$, tworzą bazę przestrzeni stycznej w każdym punkcie dziedziny κ . Zatem

$$Z = \sum_{i=1}^m Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (15.13)$$

gdzie Z^i są funkcjami na dziedzinie κ . Z jest gładkim polem jeżeli funkcje Z^i są gładkie.

Uwaga. $Z(M)$ jest podzbiorem $\mathbb{T}M$, jest więc sens mówić o obrazie $\mathbb{T}F(Z(M))$ tego podzbioru względem odwzorowania stycznego $\mathbb{T}F$, gdzie $F: M \rightarrow N$. Zbiór ten nie jest (na ogół) obrazem pola wektorowego na N (jeżeli F nie jest bijekcją). Pól wektorowych na ogół nie można transportować, mimo istnienia odwzorowania stycznego. Jako przykład weźmy $M = N = \mathbb{R}$, $F(t) = t^2$ i $Z(t) = t^3 \frac{\partial}{\partial t}$. Obrazem wektora $Z(1)$ jest wektor $2 \frac{\partial}{\partial t}$ zaczepiony w 1, a obrazem wektora $Z(-1)$ wektor $-2 \frac{\partial}{\partial t}$, też zaczepiony w jedynce.

Polem kowektorowym ω na M nazywamy odwzorowanie

$$\omega: M \rightarrow \mathbb{T}^*M$$

takie, że

$$\pi_M \circ \omega(p) = p,$$

tzn. $\pi_M \circ \omega$ jest identycznością na M .

Mówimy, że pole kowektorów stycznych jest gładkie, jeżeli jest gładkie jako odwzorowanie między powierzchniami. Niech $\kappa = (x^i)$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Bazę w przestrzeni kowektorów \mathbb{T}_p^*M tworzą różniczki dx^i , więc lokalnie możemy zapisać

$$\omega = \sum_{i=1}^m f_i dx^i, \quad (15.14)$$

gdzie f_i są funkcjami na dziedzinie κ . Pole kowektorowe ω jest gładkie, jeżeli funkcje f_i są gładkie.

STWIERDZENIE 15.18. Pole kowektorowe jest gładkie, jeżeli dla każdego różniczkowalnego pola wektorowego $Z: M \rightarrow \mathbb{T}M$ funkcja

$$M \ni p \mapsto \langle Z(p), \omega(p) \rangle \in \mathbb{R}$$

jest różniczkowalna.

DOWÓD: Korzystając z lokalnych reprezentacji (16.3) i (15.14) pól ω i Z dostajemy

$$\langle Z(p), \omega(p) \rangle = \sum_{i=1}^m Z^i(p) f_i(p). \quad (15.15)$$

Dalej oczywiste. ■

Przykładem pola kowektorów jest różniczka df funkcji f :

$$M \ni p \mapsto d_p f.$$

Lokalnie:

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Uwaga. Każdy kowektor jest różniczką (w punkcie zaczepienia kowektora) pewnej funkcji, ale pole kowektorów na ogół nie jest różniczką funkcji. W dalszej części wykładu poznamy warunki, jakie musi spełniać pole kowektorów by być różniczką jakiejś funkcji.

Jeżeli odwzorowanie $F: M \rightarrow N$ jest różniczkowalne to, jak wiemy, nie mamy odwzorowania między wiązkami kowektorów. Tym niemniej dla każdego pola kowektorów ω na N możemy zdefiniować pole kowektorów $F^*\omega$ na M przez

$$F^*\omega(p) = (\mathbb{T}_p F)^*\omega(F(p)).$$

Zachodzi prosty, ale ważny fakt

$$dF^*f = F^*df \quad , \quad (15.16)$$

tzn. transport (funkcji, pola) jest przemienny z różniczkowaniem. Istotnie, dla $\mathbb{T}_p M \ni v = \mathbf{t}\gamma(0)$ mamy

$$\begin{aligned} \langle v, dF^*f \rangle &= \frac{d}{dt}((F^*f) \circ \gamma)(0) = \frac{d}{dt}((f \circ F) \circ \gamma)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ (F \circ \gamma))(0) \\ &= \langle \mathbb{T}F(v), df \rangle = \langle v, F^*df \rangle. \end{aligned}$$

15.11. Pole wektorowe jako równanie różniczkowe.

Niech będzie dana krzywa na powierzchni M , to znaczy odwzorowanie różniczkowalne $\gamma: \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$. *Podniesieniem stycznym* $\mathbf{t}\gamma$ krzywej γ nazywamy odwzorowanie

$$\mathbf{t}\gamma: I \rightarrow \mathbb{T}M: s \mapsto \mathbf{t}\gamma_s(0),$$

gdzie γ_s jest krzywą $t \mapsto \gamma(s+t)$. Oczywiście jest, że $\tau_M \circ \mathbf{t}\gamma = \gamma$.

Niech teraz $Z: M \rightarrow \mathbb{T}M$ będzie polem wektorowym. Mówimy, że krzywa γ jest krzywą całkową tego pola, jeżeli $\mathbf{t}\gamma = Z \circ \gamma$. W lokalnym układzie współrzędnych dostajemy równania

$$\frac{d}{dt}\gamma^i(t) = Z^i(\gamma(t)),$$

czyli równanie (układ równań) zwyczajne pierwszego rzędu. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań wynika, że gładkie pole wektorowe ma dokładnie jedną krzywą całkową przechodzącą przez dany punkt p dla wartości parametru zero. Zauważmy przy tym, że warunek $\mathbf{t}\gamma = Z \circ \gamma$ można sformułować inaczej:

$$\mathbf{t}\gamma(I) \subset Z(M)$$

i w oczywisty sposób uogólnić zastępując $Z(M)$ dowolnym podzbiorem $D \subset \mathbb{T}M$. Dowolny podzbiór wiązki stycznej do powierzchni można zatem traktować jako równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu, tzn. równanie na krzywe na tej powierzchni.

15.12. Metoda mnożników Lagrange'a.

Niech M będzie powierzchnią i niech f będzie funkcją na M . Funkcję f możemy badać na powierzchni za pośrednictwem lokalnych parametryzacji, to znaczy badając zamiast funkcji f funkcję $f \circ \psi$, gdzie ψ jest lokalną parametryzacją. Oczywiście, że $f \circ \psi$ ma lokalne minimum (maksimum) w x wtedy i tylko wtedy, gdy f ma lokalne minimum (maksimum) w $q = \psi(x)$. Znajdujemy też warunek konieczny ekstremum: $d_q f = 0$.

Metoda ta, ze względu na swoją lokalność, nie jest zbyt wygodna. W sytuacji, gdy $M \subset X$, możemy badanie funkcji f na M zastąpić badaniem na X funkcji F takiej, że $F|_M = f$.

TWIERDZENIE 15.19. Niech $M = G^{-1}(0)$, gdzie $G: X \rightarrow Y$ spełnia założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej w punkcie p (tzn. jej pochodna jest surjekcją w tym punkcie – mówimy też, że p jest punktem regularnym odwzorowania G). Jeżeli $d_p f = 0$, to istnieje odwzorowanie liniowe $\Lambda: Y \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$d_p F = \Lambda \circ G'(p).$$

DOWÓD: Ponieważ $G'(p)$ jest surjekcją, odwzorowanie sprzężone

$$(G'(p))^*: Y^* \rightarrow X^*$$

jest injekcją w podprzestrzeni funkcji liniowych zerujących się na $\ker G'(p)$ (fakt znany z algebry). Z porównania wymiarów wynika, że jest to izomorfizm. Z założenia $d_p f$ zeruje się na przestrzeni stycznej $T_p M = \ker G'(p)$, zatem istnieje dokładnie jeden funkcjonał $\Lambda \in Y^*$ taki, że

$$d_p F = (G'(p))^*(\Lambda)$$

lub równoważnie,

$$\begin{aligned} d_p F &= \Lambda \circ G'(p) = (\Lambda \circ G)'(p) = d_p(\Lambda \circ G), \\ d_p(F - \Lambda \circ G) &= 0. \end{aligned}$$

■

Λ nazywa się funkcjonałem (mnożnikiem) Lagrange'a. Z powyższego twierdzenia widać, że dla znalezienia miejsc podejrzanych o ekstrema można, zamiast funkcji f , badać miejsca zerowe pochodnej (różniczki) funkcji $F - \Lambda \circ G$ znajdujące się na powierzchni M (pochodna $\Lambda \circ G$ w q jest równa $\Lambda \circ G'(q)$). Mamy też warunek dostateczny istnienia ekstremum.

STWIERDZENIE 15.20. Niech będą spełnione założenia Twierdzenia 15.19 i niech

$$d_p F - \Lambda \circ G'(p) = 0.$$

Jeżeli dla $0 \neq h \in T_p M$

$$(F''(p) - \Lambda \circ G''(p))(h, h) > 0 (< 0),$$

to w punkcie p funkcja f ma minimum (maksimum) lokalne.

DOWÓD: Niech $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ będzie krzywą reprezentującą wektor $h \in T_p M \subset X$. Zbadajmy funkcję $f \circ \gamma = F \circ \gamma$ w otoczeniu zera. Jej pierwsza pochodna jest równa $(F' \circ \gamma) \cdot \gamma'$, a druga

$$(F'' \circ \gamma)(\gamma', \gamma') + (F' \circ \gamma)(\gamma'').$$

Ponieważ $G \circ \gamma = 0$, mamy też, różniczkując dwukrotnie,

$$(G' \circ \gamma)\gamma' = 0, \quad (G'' \circ \gamma)(\gamma', \gamma') + (G' \circ \gamma)(\gamma'') = 0,$$

a ponieważ $F'(p) = \Lambda \circ G'(p)$, więc

$$F'(p)(\gamma''(0)) = (\Lambda \circ G'(p))(\gamma''(0)) = -\Lambda \circ G''(p)(h, h).$$

Zatem druga pochodna funkcji $f \circ \gamma$ jest w zerze równa

$$F''(q)(h, h) - \Lambda \circ G''(q)(h, h).$$

Z założenia wynika, że funkcja $f \circ \gamma$ ma w zerze minimum (maksimum) lokalne. Dalej dowód przebiega jak dla odwzorowań między przestrzeniami Banacha. ■

Rozdział 16. FORMY RÓŻNICZKOWE

16.1. Odwzorowania wieloliniowe, antysymetryczne.

Niech V będzie przestrzenią wektorową wymiaru n . l -kovektorem na V nazywamy odwzorowanie

$$\alpha: V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

l -egzemplarzy przestrzeni V w liczby, które jest

- (1) liniowe w każdym argumencie (jest l -liniowe),
- (2) antysymetryczne, tzn.

$$\alpha(v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_l) = -\alpha(v_k, v_2, \dots, v_1, \dots, v_l)$$

Przykład: Wyznacznik jest n -kovektorem na \mathbb{R}^n . Forma liniowa jest 1-kovektorem. Umawiamy się, że 0-kovektory są po prostu liczbami.

Oczywiste, że zbiór l -kovektorów na przestrzeni V tworzy przestrzeń wektorową (podprzestrzeń przestrzeni wektorowej wszystkich funkcji na $V \times \cdots \times V$). Oznaczamy ją $\bigwedge^l V^*$. Niech $\alpha \in \bigwedge^k V^*, \beta \in \bigwedge^l V^*$. *Iloczynem zewnętrznym* $\alpha \wedge \beta$ nazywamy $(k+l)$ -kovektor zdefiniowany w sposób następujący:

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma} \frac{\text{sgn } \sigma}{k!l!} \alpha(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

przy czym sumowanie odbywa się po wszystkich permutacjach zbioru $(k+l)$ elementowego.

Dla $k=0$ (lub $l=0$) dostajemy zwykły iloczyn l -kovektora (k -kovektora) przez liczbę.

STWIERDZENIE 16.1. *Iloczyn zewnętrzny kovektorów ma następujące własności:*

- (1) jest biliniowy,
- (2) jest działaniem łącznym,
- (3) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$.

DOWÓD:

- (1) Oczywiście.

(2) Niech $\alpha \in \wedge^l V^*$, $\beta \in \wedge^k V^*$, $\gamma \in \wedge^s V^*$.

$$\begin{aligned}
& (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(v_1, \dots, v_{k+l+s}) \\
&= \sum_{\sigma \in \Pi(k+l+s)} \frac{\text{sgn } \sigma}{(k+l)!s!} (\alpha \wedge \beta)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+s)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \Pi(k+l+s)} \frac{\text{sgn } \sigma}{(k+l)!s!} \left(\sum_{\rho \in \Pi(k+l)} \frac{\text{sgn } \rho}{k!l!} \alpha(v_{\sigma(\rho(1))}, \dots, v_{\sigma(\rho(k))}) \right. \\
&\quad \left. \beta(v_{\sigma(\rho(k+1))}, \dots, v_{\sigma(\rho(k+l))}) \right) \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+s)}) \\
&= \sum_{\rho \in \Pi(k+l)} \frac{\text{sgn } \rho}{k!l!} \sum_{\sigma \in \Pi(k+l+s)} \frac{\text{sgn } \sigma}{(k+l)!s!} \alpha(v_{\sigma(\rho(1))}, \dots, v_{\sigma(\rho(k))}) \cdot \\
&\quad \beta(v_{\sigma(\rho(k+1))}, \dots, v_{\sigma(\rho(k+l))}) \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+s)})
\end{aligned}$$

Wyrażenie

$$\sum_{\sigma \in \Pi(k+l+s)} \text{sgn } \sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+s)})$$

jest całkowicie antysymetryczne, więc

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in \Pi(k+l+s)} \text{sgn } \sigma \alpha(v_{\sigma(\rho(1))}, \dots, v_{\sigma(\rho(k))}) \beta(v_{\sigma(\rho(k+1))}, \dots, v_{\sigma(\rho(k+l))}) \cdot \\
& \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+s)}) = \text{sgn } \rho \sum_{\sigma \in \Pi(k+l+s)} \text{sgn } \sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \\
& \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+s)}),
\end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned}
& (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(v_1, \dots, v_{k+l+s}) \\
&= \sum_{\sigma \in \Pi(k+l+s)} \frac{\text{sgn } \sigma}{k!l!s!} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, v_{\sigma(k+l)}) \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+s)}).
\end{aligned}$$

Analogiczny rachunek dla $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ prowadzi do tego samego wyniku. Stąd łączność.

(3) Mamy

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \sum_{\sigma} \frac{\text{sgn } \sigma}{k!l!} \alpha(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \sum_{\sigma'} \frac{\text{sgn } \sigma}{k!l!} \beta(v_{\sigma'(1)}, v_{\sigma'(2)}, \dots, v_{\sigma'(l)}) \alpha(v_{\sigma'(l+1)}, \dots, v_{\sigma'(l+k)}),
\end{aligned}$$

gdzie $\sigma' = \sigma \circ \rho$, a ρ jest permutacją $(k+1, k+2, \dots, k+l, 1, 2, \dots, k)$. Wystarczy teraz zauważyć, że permutacja $(k+1, k+2, \dots, k+l, 1, 2, \dots, k)$ ma znak $(-1)^{kl}$ i skorzystać z faktu, że znak permutacji jest homomorfizmem

$$\operatorname{sgn} \sigma' = \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho.$$

■

Baza. Wymiar. Niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni V . $\alpha \in \bigwedge^l V^*$ jest, jako odwzorowanie wieloliniowe, wyznaczone przez swoje wartości na ciągach wektorów bazowych, czyli na ciągach $(e_{i(1)}, e_{i(2)}, \dots, e_{i(l)})$. Ze względu na antysymetrię wystarczy znać wartość α na ciągach, dla których $i(1) < i(2) < \dots < i(l)$. Ustalmy $j(1) < \dots < j(l)$. Definiujemy $f^{(j(1), \dots, j(l))} \in \bigwedge^l V^*$ kładąc

$$f^{(j(1), \dots, j(l))}(e_{i(1)}, e_{i(2)}, \dots, e_{i(l)}) = \delta_{i(1)}^{j(1)} \dots \delta_{i(l)}^{j(l)}$$

gdzie $i(1) < i(2) < \dots < i(l)$. Oczywiście, że l -kwektory $(f^{(j(1), \dots, j(l))})$ są liniowo niezależne i rozpinają całą przestrzeń, więc po uporządkowaniu tworzą bazę. Dla $l = 1$ baza $(f^{(i)})$ jest znaną z algebry bazą dualną do e w V^* .

Uwaga. Stosowany jest też inny zapis l -kwektorów. Zamiast w bazie $(f^{(j(1), \dots, j(l))})_{j(1) < \dots < j(l)}$, przedstawia się α jako kombinację wszystkich l -kwektorów $f^{(j(1), \dots, j(l))}$

$$\alpha = \sum_{j(1) < \dots < j(l)} \alpha_{j(1), \dots, j(l)} f^{(j(1), \dots, j(l))} = \frac{1}{l!} \sum_{j(1), \dots, j(l)} \tilde{\alpha}_{j(1), \dots, j(l)} f^{(j(1), \dots, j(l))}. \quad (16.1)$$

Ponieważ l -kwektory $f^{(j(1), \dots, j(l))}$ są liniowo zależne, współczynniki $\tilde{\alpha}_{j(1), \dots, j(l)}$ nie są wyznaczone jednoznacznie. Ujednoznacznia się je nakładając warunek antysymetrii. Przy wybranym unormowaniu dostajemy równość $\tilde{\alpha}_{j(1), \dots, j(l)} = \alpha_{j(1), \dots, j(l)}$ dla $j(1) < \dots < j(l)$.

STWIERDZENIE 16.2. $f^{(j(1), \dots, j(l))} = f^{j(1)} \wedge f^{j(2)} \wedge \dots \wedge f^{j(l)}$.

DOWÓD: Niech $i(1) < i(2) < \dots < i(l)$. Mamy

$$f^{(j(1), \dots, j(l))}(e_{i(1)}, e_{i(2)}, \dots, e_{i(l)}) = \delta_{i(1)}^{j(1)} \dots \delta_{i(l)}^{j(l)}$$

i z drugiej strony,

$$\begin{aligned} & f^{i(1)} \wedge f^{i(2)} \wedge \dots \wedge f^{i(l)}(e_{i(1)}, e_{i(2)}, \dots, e_{i(l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Pi(l)} \operatorname{sgn} \sigma f^{j(1)}(e_{i(\sigma(1))}) \dots f^{j(l)}(e_{i(\sigma(l))}) = \sum_{\sigma \in \Pi(l)} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{i(\sigma(1))}^{j(1)} \dots \delta_{i(\sigma(l))}^{j(l)}. \end{aligned}$$

Ale $j(1) < \dots < j(l)$, zatem nieznikający wyraz może być tylko dla $i(\sigma(1)) < \dots < i(\sigma(l))$, a ponieważ $i(1) < \dots < i(l)$, więc σ musi być identycznością. Stąd

$$f^{i(1)} \wedge f^{i(2)} \wedge \dots \wedge f^{i(l)}(e_{i(1)}, e_{i(2)}, \dots, e_{i(l)}) = \delta_{i(1)}^{j(1)} \dots \delta_{i(l)}^{j(l)}.$$

■

Ze znanych z kombinatoryki wzorów dostajemy, że wymiar przestrzeni $\bigwedge^l V^*$ jest równy $\binom{n}{l}$.

Uwaga. Zamieniając w powyższych rozważaniach rolami V i V^* otrzymamy algebrę zewnętrzną wielowektorów. Przestrzeń l -wektorów oznaczamy $\bigwedge^l V$. Pokażemy, że istnieje naturalne utożsamienie przestrzeni $(\bigwedge^l V)^*$ dualnej do l -wektorów i przestrzeni l -kovektorów $\bigwedge^l V^*$. Zaczniemy od odwzorowania

$$(V \times \dots \times V) \times (V^* \times \dots \times V^*) \longrightarrow \mathbb{R}$$

danego wzorem

$$((v_1, \dots, v_l), (f_1, \dots, f_l)) \mapsto f_1 \wedge \dots \wedge f_l(v_1, \dots, v_l) = \det[\langle v_i, f_j \rangle]. \quad (16.2)$$

Jest ono l -liniowe i całkowicie antysymetryczne ze względu na (f_1, \dots, f_l) . Przy ustalonych v_1, \dots, v_l wyznacza element z $\bigwedge^l V$. Łatwo sprawdzić, że jest on równy $v_1 \wedge \dots \wedge v_l$, więc wzór (16.2) wyznacza odwzorowanie

$$((v_1 \wedge \dots \wedge v_l), (f_1 \wedge \dots \wedge f_l)) \mapsto \det[\langle v_i, f_j \rangle]. \quad (16.3)$$

Rozszerzając liniowo to odwzorowanie ze względu na obie zmienne dostajemy ewaluację

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \bigwedge^l V \times \bigwedge^l V^* \longrightarrow \mathbb{R},$$

biliniową, nie degenerowaną, więc zadającą utożsamienie przestrzeni $(\bigwedge^l V)^*$ dualnej do l -wektorów i przestrzeni l -kovektorów $\bigwedge^l V^*$ (i na odwrót).

16.2. Iloczyn tensorowy i uwagi o uniwersalności.

Przedstawione powyżej konstrukcje są szczególnym przypadkiem ogólniejszej konstrukcji. Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem \mathbb{K} (\mathbb{R} lub \mathbb{C}) wymiaru skończonego. *Iloczynem tensorowym* (nad \mathbb{K}) $V \otimes W$ nazywamy przestrzeń wektorową odwzorowań biliniowych

$$t: V^* \times W^* \rightarrow \mathbb{K}.$$

Niech $v \in V$ i $w \in W$. Wektory te wyznaczają element $v \otimes w \in V \otimes W$ (iloczyn tensorowy wektorów) przez wzór

$$v \otimes w: V^* \times W^* \rightarrow \mathbb{K}: (f, g) \mapsto f(v)g(w).$$

Iloczyn tensorowy jest, jak łatwo się przekonać, łączny.

Widzimy stąd, że $\bigwedge^2 V$ jest podprzestrzenią $V \otimes V$ tensorów spełniających warunek antysymetrii. Łatwo sprawdzić, że dla $v, w \in V$ zachodzi związek

$$v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v.$$

Przestrzeń $V \otimes W$ posiada następującą własność:

STWIERDZENIE 16.3. *Dla każdego odwzorowania biliniowego $F: V \times W \rightarrow E$ w przestrzeń wektorową E istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe*

$$\tilde{F}: V \otimes W \rightarrow E$$

takie, że

$$F(v, w) = \tilde{F}(v \otimes w).$$

Własność, o której mówi to stwierdzenie charakteryzuje, z dokładnością do izomorfizmu, iloczyn tensorowy przestrzeni wektorowych (mówimy o *uniwersalności* iloczynu tensorowego). Przytoczona konstrukcja jest więc jedną z możliwych konstrukcji iloczynu tensorowego.

Iloczyn zewnętrzny też ma własność uniwersalności:

STWIERDZENIE 16.4. *Dla każdego antysymetrycznego odwzorowania biliniowego $F: V \times V \rightarrow E$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe*

$$\overline{F}: \bigwedge^2 V \rightarrow E$$

takie, że

$$F(v, w) = \overline{F}(v \wedge w).$$

Zgodnie z wprowadzonymi powyżej definicjami, $v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v$, a stąd dostajemy dla antysymetrycznego F

$$2\overline{F}(v \wedge w) = 2\tilde{F}(v \otimes w) = \tilde{F}(v \otimes w) - \tilde{F}(w \otimes v) = \tilde{F}(v \wedge w),$$

czyli na $\bigwedge^2 V$ mamy $\tilde{F} = 2\overline{F}$.

16.3. Wielo-wektory i wielo-kowektory styczne.

Konstrukcje omówione w poprzednich częściach możemy zastosować do przestrzeni wektorów stycznych $T_p M$ do powierzchni M . Otrzymamy w ten sposób przestrzenie l -kovektorów stycznych $\bigwedge^l T_p^* M$ i przestrzeni l -wektorów stycznych $\bigwedge^l T_p M$. Zbiór wszystkich l -kovektorów stycznych oznaczają będziemy $\bigwedge^l T^* M$, a zbiór wszystkich l -wektorów stycznych $\bigwedge^l T M$.

DEFINICJA 16.5. *Polem l -kovektorowym α na powierzchni M nazywamy odwzorowanie*

$$\alpha: M \rightarrow \bigwedge^l T^* M: q \mapsto \alpha(q) \in \bigwedge^l T_q^* M.$$

Podobnie definiujemy pola l -wektorowe. Na polach wielo-kovektorowych (wielo-wektorowych) możemy wykonywać (punkt po punkcie) działania algebraiczne zdefiniowane dla wielo-kovektorów (wielo-wektorów). W szczególności możemy je dodawać i mnożyć przez liczbę. Tworzą one w ten sposób przestrzeń wektorową. Możemy też mnożyć takie pola zewnętrznie. Iloczyn zewnętrzny $\alpha \wedge \beta$ pola l -kovektorowego α i k -kovektorowego β jest polem $(k + l)$ -kovektorowym.

Przestrzeń wektorową pól l -kovektorowych oznaczają będziemy $\Phi^l(M)$, zaś przez $\Phi(M)$ przestrzeń wszystkich pól wielo-kovektorowych. Podobnie, przestrzeń wektorową pól l -wektorowych oznaczają będziemy $\Psi^l(M)$, zaś przez $\Psi(M)$ przestrzeń wszystkich pól wielo-wektorowych.

16.4. Orientacja przestrzeni wektorowej.

Niech V będzie przestrzenią wektorową wymiaru skończonego n . Przypomnijmy, że bazą przestrzeni wektorowej V nazywamy ciąg n wektorów liniowo niezależnych. W szczególności, przestrzeń wymiaru zero ma jedną, pustą bazę. Odwzorowanie tożsamościowe przestrzeni V oznaczają będziemy id_V .

W zbiorze baz przestrzeni V wprowadzamy relację równoważności:

$$(e_1, \dots, e_n) \sim (e'_1, \dots, e'_n) \Leftrightarrow \det [\text{id}_V]_{e'}^e > 0.$$

Dowód, że jest to relacja równoważności:

- (1) zwrotność: $\det [\text{id}_V]_{e'}^e = \det I = 1 > 0$
- (2) symetria: $\det [\text{id}_V]_{e'}^e = (\det [\text{id}_V]_{e'}^{e'})^{-1}$
- (3) przechodniość: korzystamy z tego, że $\det [\text{id}_V]_{e''}^e = \det [\text{id}_V]_{e'}^e \det [\text{id}_V]_{e''}^{e'}$.

Klasę równoważności baz nazywamy *orientacją wewnętrzną* przestrzeni V . Z definicji tej wynika, że przestrzeń wektorowa wymiaru różnego od zera ma dwie orientacje wewnętrzne. Przestrzeń wymiaru zerowego ma jedną orientację wewnętrzną (chyba, że umówimy się inaczej).

Na relację równoważności definiującą orientację możemy spojrzeć nieco inaczej. W zbiorze baz działa w oczywisty sposób grupa $\text{Aut}(V)$ automorfizmów przestrzeni

V . Automorfizm jest endomorfizmem będącym jednocześnie izomorfizmem. W grupie tej jest wyróżniona podgrupa: składowa spójna jedności. Orientacja jest orbitą tej podgrupy w zbiorze baz. Taką definicję bazy można przenieść na przestrzenie wektorowe ze strukturą (np metryczną) ograniczając się do baz i automorfizmów respektujących tę strukturę.

Uwaga. Można też nieco inaczej rozumieć pojęcie bazy. Otóż wśród przestrzeni wektorowych nad \mathbb{R} mamy wyróżnioną klasę przestrzeni (obiektów wzorcowych): przestrzenie \mathbb{R}^n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Jak wiadomo, baza przestrzeni V (w sensie jak wyżej) zadaje izomorfizm V z przestrzenią wyróżnioną. I na odwrót. Zatem możemy definiować bazę przestrzeni V jako izomorfizm tej przestrzeni z przestrzenią (obiektem wzorcowym) z wyróżnionej klasy. Takie pojęcie bazy pasuje nie tylko do przestrzeni wektorowych. Na przykład, lokalny układ współrzędnych możemy uważać za lokalną bazę powierzchni (obiektami wyróżnionymi są otwarte otoczenia w \mathbb{R}^n).

Niech teraz V będzie podprzestrzenią przestrzeni wektorowej W wymiaru m . *Orientacją zewnętrzną* podprzestrzeni V w W nazywamy orientację wewnętrzną przestrzeni ilorazowej W/V .

Z definicji orientacji zewnętrznej wynika, że cała przestrzeń V ma jedną orientację zewnętrzną (chyba, że umówimy się inaczej).

STWIERDZENIE 16.6. *Orientacja zewnętrzna podprzestrzeni jest zadana przez orientację wewnętrzną dowolnej podprzestrzeni dopełniającej.*

DOWÓD: Niech $W = V \oplus V'$, tzn. podprzestrzeń V' jest dopełniająca do V w W . Odwzorowanie $V' \ni v \mapsto [v] \in W/V$ jest izomorfizmem, więc zadaje odpowiedniość między bazami i w konsekwencji, między orientacjami przestrzeni V' i W/V . ■

Niech teraz $W = V \oplus V'$. Orientacje wewnętrzne podprzestrzeni V i V' zadają orientację przestrzeni W w sposób następujący: niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą w przestrzeni V , zgodną z orientacją V , zaś (e'_1, \dots, e'_{m-n}) bazą w V' , zgodną z orientacją V' . Orientację przestrzeni W zadaje baza $(e'_1, \dots, e'_{m-n}, e_1, \dots, e_m)$.

Uwaga. Tworząc bazę w W z baz w V i V' ustawiliśmy najpierw wektory z podprzestrzeni V' , a następnie z V . Odwracając kolejność dostajemy inne przyporządkowanie orientacjom podprzestrzeni orientację całej przestrzeni W .

Wybierając inne, ale równoważne bazy w przestrzeniach V i V' dostaniemy równoważną bazę w przestrzeni W . Istotnie, mamy $\det [\text{id}_W]_e^f = \det [\text{id}_V]_e^f \det [\text{id}_{V'}]_e^f$ (jedną literą oznaczyliśmy bazy w trzech przestrzeniach). Widać też stąd, że zmiana orientacji w przestrzeniach W i V oznacza, że orientacja V' jest zachowana. Możemy więc orientację wewnętrzną V' (a zatem orientację zewnętrzną V w W) reprezentować parą

$$(\text{orientacja wewnętrzną } V, \text{ orientacja wewnętrzną } W),$$

przy czym zmiana jednej z tych orientacji na przeciwną oznacza zmianę orientacji zewnętrznej na przeciwną.

Jeżeli przestrzeń W jest zorientowana, to dostajemy wzajemnie jednoznaczność odpowiedniość między orientacją wewnętrzną i zewnętrzną podprzestrzeni W wymiaru różnego od 0 i m .

W przypadku przestrzeni trójwymiarowej opisana wyżej odpowiedniość nosi nazwę reguły prawej (lub lewej) śruby.

Związek wielowektorów z orientacją. Niech V będzie przestrzenią wektorową wymiaru n i niech $\omega \in \bigwedge^n V^*$, $n > 0$. Z antysymetrii ω wynika, że jeżeli e, e' są dwiema bazami na V , to

$$\omega(e_1, \dots, e_n) = \det [\text{id}_V]^{e'}_e \omega(e'_1, \dots, e'_n).$$

Zatem na bazach wyznaczających tą samą orientację (wewnętrzną) znak ω jest ten sam i możemy w związku z tym przyporządkować różnemu od zera n -kovektorowi ω orientację taką, że na zgodnych z orientacją bazach ω przyjmuje wartości dodatnie.

Dualnie, orientację możemy reprezentować różnym od zera n -wektorem stycznym, np. $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$.

16.5. Orientacja powierzchni.

Niech w każdym punkcie p powierzchni M wymiaru m większego od zera będzie zadana orientacja wewnętrzna przestrzeni stycznej $T_p M$. Mówimy, że orientacje te zadają *orientację wewnętrzną powierzchni M* jeżeli lokalnie istnieją gładkie pola wektorowe (E_1, \dots, E_m) takie, że $(E_1(p), \dots, E_m(p))$ tworzą bazę reprezentującą orientację $T_p M$. Innymi słowy: w otoczeniu każdego punktu istnieje lokalny układ współrzędnych (x^i) taki, że indukowana baza $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ w przestrzeni stycznej do M jest zgodna z orientacją.

Wynika stąd, że na spójnej, zorientowanej powierzchni orientacja jest scharakteryzowana orientacją jednej przestrzeni stycznej (w dowolnym punkcie). Powierzchnia spójna może więc mieć dwie orientacje lub żadną.

Orientacja przestrzeni stycznej do powierzchni może być reprezentowana przez niezerowy m -wektor styczny lub m -kovektor styczny, gdzie m jest wymiarem powierzchni. Mając więc na powierzchni M o wymiarze m zadane pole m -wektorowe lub m -kovektorowe ω , wszędzie różne od zera, możemy jej przypisać orientację. W każdym punkcie $p \in M$ orientacja przestrzeni stycznej zadana jest przez $\omega(p)$. Zgodność tych orientacji jest oczywista.

I na odwrót, mając zadaną orientację M , możemy znaleźć zgodną z nią pole m -wektorów stycznych (kovektorów stycznych). Najpierw lokalnie, na przykład równe iloczynowi zewnętrznemu wektorów bazy zadanej lokalnym układem współrzędnych, a następnie, korzystając z rozkładu jedności, globalnie.

W dalszym ciągu wykładu poznamy jeszcze jedną reprezentację orientacji.

Osobnego omówienia wymaga przypadek $n = 0$. Spójna powierzchnia wymiaru zero jest punktem. Jej przestrzeń styczna ma tylko jedną bazę. Przyjmujemy jednak, że powierzchnia ta może mieć dwie orientacje oznaczane (+) i (-).

Powierzchnia jest *orientowalna*, jeżeli można na niej określić orientację.

Przykłady:

- (1) Baza kanoniczna w \mathbb{R}^m wyznacza kanoniczną orientację M będącej, otwartym podzbiorem \mathbb{R}^m . W szczególności, orientacja kanoniczna w \mathbb{R}^3 nazywa się prawoskrętną (wyznacza regułę prawej śruby). Orientacja przeciwna nazywana jest lewoskrętną.
- (2) Każda powierzchnia jednowymiarowa jest orientowalna.
- (3) Wstęga Möbiusa, czyli obraz odwzorowania

$$\varphi:]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

danego wzorem

$$\varphi(x, y) = \left((1 + x \sin(\frac{1}{2}y)) \cos y, (1 + x \sin(\frac{1}{2}y)) \sin y, x \sin(\frac{1}{2}y) \right) \quad (16.4)$$

nie jest orientowalna.

Oznaczmy przez $\mathbb{O}_p(M)$ dwupunktowy zbiór orientacji przestrzeni stycznej T_pM . Niech

$$\mathbb{O}(M) = \bigcup_{p \in M} \mathbb{O}_p(M)$$

będzie zbiorem wszystkich orientacji wszystkich przestrzeni stycznych. Mamy naturalne rzutowanie $o_M: \mathbb{O}(M) \rightarrow M$. Lokalnie $\mathbb{O}(M)$ składa się z dwóch egzemplarzy otwartego podzbioru M , jest więc powierzchnią. Orientacja M jest gładkim odwzorowaniem $\iota: M \rightarrow \mathbb{O}(M)$ takim, że $o_M \circ \iota = \text{id}_M$.

Analogicznie do orientacji wewnętrznej definiujemy orientację zewnętrzną powierzchni M względem powierzchni N .

DEFINICJA 16.7. Powiemy, że podrozmaitość N powierzchni M jest *zorientowana zewnętrźnie*, jeżeli w każdym punkcie $p \in N$ przestrzeń styczna T_pN jest zorientowana zewnętrźnie względem T_pM . Żądamy przy tym, by lokalnie orientacja ta była reprezentowana gładkim polem baz przestrzeni dopełniających T_pM w T_pN . Powiemy, że podrozmaitość N jest *orientowalna zewnętrźnie* względem M , jeżeli istnieje orientacja zewnętrzna N .

Jeżeli M jest powierzchnią orientowalną, to podrozmaitość N jest orientowalna zewnętrźnie wtedy i tylko wtedy, gdy jest orientowalna wewnętrznie. Jeżeli ponadto M jest zorientowana, to orientacji zewnętrznej N odpowiada jednoznacznie jej orientacja wewnętrzna (zgodnie z przyjętą konwencją).

Przykłady.

- (1) Wstęga Möbiusa nie jest orientowalna zewnętrźnie w \mathbb{R}^3 .

- (2) Okrąg w \mathbb{R}^3 dany równaniami $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ jest orientowalny wewnątrz i zewnątrz względem \mathbb{R}^3 . Jest również podrozmaitością wstęgi Möbiusa, obrazem zbioru $\{0\} \times \mathbb{R}$ dla odwzorowania (16.4). Nie jest orientowalny zewnątrz względem wstęgi Möbiusa.
- (3) Obraz zbioru $\{\frac{1}{4}\} \times \mathbb{R}$ dla odwzorowania (16.4) jest orientowalny wewnątrz, zewnątrz względem \mathbb{R}^3 oraz względem wstęgi Möbiusa.

16.6. Formy różniczkowe na powierzchni.

Oznaczmy przez $(\times_M^l TM) \times_M \mathbb{O}(M)$ zbiór wszystkich ciągów (v_1, \dots, v_l, ι) wektorów stycznych, zaczepionych w tym samym punkcie, wraz z orientacją przestrzeni stycznej, do której należą.

DEFINICJA 16.8. l -formą (formą rzędu $l \geq 0$) α na powierzchni M nazywamy odwzorowanie

$$\alpha: (\times_M^l TM) \times_M \mathbb{O}(M) \rightarrow R,$$

w każdym punkcie powierzchni antysymetryczne ze względu na wektory.

Forma zadaje więc w punkcie $p \in M$ i przy zadanej orientacji przestrzeni stycznej $T_p M$, l -kovektor styczny. Wyznaczona jest zatem przez dwie pary $(\omega(p), \iota)$ oraz $(\omega'(p), \iota')$, gdzie ι i ι' są dwiema orientacjami przestrzeni $T_p M$, $\omega(p)$ i $\omega'(p)$ l -kovektorami stycznymi w punkcie p . W dalszym ciągu zajmować dwiema klasami form:

- (1) W każdym punkcie l -kovektor nie zależy od orientacji, $\omega = \omega'$. Takie formy nazywamy *parzystymi*.
- (2) W każdym punkcie l -kovektor zmienia znak przy zmianie orientacji, $\omega = -\omega'$. Takie formy nazywamy *nieparzystymi*.

Zatem l -formę parzystą można utożsamić, co się zwykle robi, z polem l -kovektorowym. Obcięcie l -nieparzystej do wektorów z przestrzeni stycznej w jednym punkcie p nazwiemy l -kovektorem *nieparzystym*. Przestrzeń l -kovektorów nieparzystych oznaczajmy $\bigwedge_o^l T^* M$.

Formy w lokalnym układzie współrzędnych. Niech teraz $\kappa = (x^i): M \supset O \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie lokalnym układem współrzędnych. W każdym punkcie $p \in O$ przestrzeń $T_p^* M$ ma bazę $(d_p x^i)$, a przestrzeń styczna $T_p M$ bazę $(\frac{\partial}{\partial x^i})$. Zatem pole l -kovektorowe α jest na O postaci

$$\alpha(p) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(p) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_l},$$

gdzie współczynniki $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}$ są funkcjami na O . Bazy indukowane układem współrzędnych zadają orientację dziedziny układu. Oznaczać ją będziemy ι_x . Forma nieparzysta reprezentowana parą (α, ι_x) może być więc utożsamiona (w lokalnym

układzie współrzędnych) z polem l -kwektorowym α , podobnie jak forma parzystą. Niech teraz będzie dany inny układ współrzędnych (y^i) . Pole α zapisuje się w nowym układzie współrzędnych

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \beta_{i_1 i_2 \dots i_l} dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \dots \wedge dy^{i_l}, \quad (16.5)$$

a ponieważ

$$dx^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j,$$

więc

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_l} = \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} \left(\sum_j \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^j} dy^j \right) \wedge \left(\sum_j \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^j} dy^j \right) \dots \wedge \left(\sum_j \frac{\partial x^{i_l}}{\partial y^j} dy^j \right) = \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} \left(\sum_{\sigma \in \Pi(l)} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_{\sigma(1)}}} \dots \frac{\partial x^{i_l}}{\partial y^{j_{\sigma(l)}}} \operatorname{sgn} \sigma \right) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_l} = \\ &= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_l} \left(\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} \det \left[\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_r}} \right] \right) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_l}. \quad (16.6) \end{aligned}$$

Oznaczając

$$\frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_l})}{\partial(y^{j_1}, \dots, y^{j_l})} = \det \left[\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_r}} \right]$$

i porównując (16.6) z (16.5) dostajemy wzór transformacyjny

$$\beta_{j_1 i_2 \dots j_l} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} \frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_l})}{\partial(y^{j_1}, \dots, y^{j_l})} \quad (16.7)$$

Jeżeli więc (α, ι_x) reprezentuje formę **parzystą**, to (α, ι_y) reprezentuje tę samą formę, czyli wzór transformacyjny dla form parzystych wygląda jak (16.7).

Jeżeli natomiast (α, ι_x) reprezentuje formę **nieparzystą**, to (α, ι_y) reprezentuje tę samą formę pod warunkiem $\iota_x = \iota_y$. W przeciwnym razie należy wziąć parę $(-\alpha, \iota_y)$. Zatem wzór transformacyjny dla form nieparzystych wygląda tak:

$$\beta_{j_1 i_2 \dots j_l} = \frac{J}{|J|} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} \frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_l})}{\partial(y^{j_1}, \dots, y^{j_l})}, \quad (16.8)$$

gdzie $J = \frac{\partial(x^1, \dots, x^m)}{\partial(y^1, \dots, y^m)}$.

W szczególnym przypadku $l = 0$, czyli dla funkcji nieparzystych f , prawo transformacji z jednego układu współrzędnych do drugiego wygląda tak:

$$f(p) = (f(p), \iota_x) = \left(\frac{J}{|J|} f(p), \iota_y \right)$$

W przypadku $l = n$, jeżeli

$$\beta(p) = (b(p) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \iota_x),$$

to

$$\beta(p) = (|J|b(p) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n, \iota_y).$$

Działania algebraiczne na formach. Działania na formach definiujemy lokalnie poprzez działania na reprezentujących je polach wielokwektorowych:

- (1) $(\alpha, \iota) + (\beta, \iota) = (\alpha + \beta, \iota)$,
- (2) $(\alpha, \iota) \wedge (\beta, \iota) = (\alpha \wedge \beta, \iota)$.

Niezależność od reprezentacji jest oczywista. Widać też, że suma form parzystych jest formą parzystą, a suma form nieparzystych jest formą nieparzystą. Iloczyn zewnętrzny form parzystych jest formą parzystą i iloczyn dwóch form nieparzystych jest formą parzystą. Natomiast iloczyn zewnętrzny formy parzystej i formy nieparzystej jest formą nieparzystą.

W dalszym ciągu przestrzeń wektorową form różniczkowych parzystych na M rzędu l oznaczają będziemy $\Phi_e^l(M)$, zaś przestrzeń wszystkich form różniczkowych parzystych na M przez $\Phi_e(M)$. Przestrzenie form nieparzystych oznaczamy odpowiednio $\Phi_o^l(M)$ i $\Phi_o(M)$.

Funkcje nieparzyste a orientacja.

STWIERDZENIE 16.9. *M jest orientowalne wtedy i tylko wtedy, gdy na M istnieje (gładka) funkcja nieparzysta ε taka, że $\varepsilon^2 = 1$.*

DOWÓD: Dla $\dim M = 0$ twierdzenie jest oczywiste, bo M jest zawsze orientowalna i zawsze istnieje funkcja nieparzysta równa jeden.

Jeżeli M , $\dim M > 0$, jest orientowalna i ι jest jej orientacją, to definiujemy

$$\varepsilon = (1, \iota).$$

Załóżmy teraz, że istnieje nieparzysta funkcja ε taka, że $\varepsilon^2 = 1$. Definiujemy orientację $\iota(p)$ przestrzeni stycznej $T_p M$ warunkiem

$$\varepsilon(p, \iota(p)) = 1.$$

Z lokalnej reprezentacji funkcji nieparzystej wynika, że $p \mapsto \iota(p)$ jest przyporządkowaniem ciągłym, więc wyznacza orientację M . ■

Jeżeli rozmaitość M jest orientowalna, to istnieją dokładnie dwie takie funkcje. Orientację wewnętrzną M można więc jednoznacznie reprezentować (tak jak w dowodzie) funkcją nieparzystą ε spełniającą warunek $\varepsilon^2 = 1$. Zwróćmy uwagę na to, reprezentacja ta dobrze funkcjonuje również w przypadku $\dim M = 0$.

Oczywiste jest następujące stwierdzenie.

STWIERDZENIE 16.10. *Jeżeli M jest orientowalna i ε jest funkcją nieparzystą reprezentującą orientację, to każda forma nieparzysta jest postaci $\varepsilon\alpha$, gdzie α jest formą parzystą.*

Mając więc ustaloną, nieznikającą funkcję nieparzystą można (co nie znaczy, że należy) utożsamiać formy nieparzyste z parzystymi.

STWIERDZENIE 16.11. *Niech M będzie orientowalne. Dla $\alpha \in \Phi_o(M)$ zachodzi równość*

$$\alpha = (\varepsilon\alpha, \iota_\varepsilon), \quad (16.9)$$

gdzie ε jest funkcją nieparzystą, $\varepsilon^2 = 1$, a ι_ε odpowiadającą jej orientacją M .

Transport formy.

Niech $F: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem powierzchni. W poprzednim rozdziale zdefiniowaliśmy transport F^* funkcji i pól kowektorowych z powierzchni N na powierzchnię M . Operacją tą możemy rozszerzyć na pola wielo-kowektorowe, żądając spełnienia warunku

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta).$$

Warunek ten w oczywisty sposób spełnia przyporządkowanie zdefiniowane wzorem

$$F^*\alpha(p)(v_1, \dots, v_l) = \alpha(F(p))(\mathbb{T}_p F(v_1), \dots, \mathbb{T}_p F(v_l)).$$

Niech teraz $(x^i)_{i=1}^m$ będzie lokalnym układem współrzędnych na M , a $(y^j)_{j=1}^n$ lokalnym układem współrzędnych na N . W dziedzinie układu współrzędnych mamy

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \dots \wedge dy^{i_l}.$$

Ponieważ

$$F^* dy^i = d(F^* y^i) = d(y^i \circ F) = dF^i = \sum_j \frac{\partial F^i}{\partial x^j} dx^j,$$

mamy

$$\begin{aligned} F^*\alpha(x) &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_l \\ j_1, \dots, j_l}} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(F(x)) \frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^{j_1}}(x) \dots \frac{\partial F^{i_l}}{\partial x^{j_l}}(x) dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_l} \left(\sum_{i_1 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(F(x)) \frac{\partial(F^{i_1}, \dots, F^{i_l})}{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_l})}(x) \right) dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \dots \wedge dx^{j_l} \end{aligned} \quad (16.10)$$

gdzie

$$\frac{\partial(F^{i_1}, \dots, F^{i_l})}{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_l})} = \det \left[\frac{\partial F^{i_k}}{\partial x^{j_h}} \right].$$

Kładąc we wzorze (16.10) odwzorowanie F równe identyczności na M dostajemy transformację współczynników formy przy zmianie lokalnego układu współrzędnych (wzory (16.7)).

W definicji transportu formy nie korzystaliśmy z gładkości współczynników, więc transport można definiować dla dowolnych pól wielo-kowektorowych.

Transport pól wielo-kowektorowych możemy przenieść na transport form parzystych. Nie wystarcza on do transportu form nieparzystych, bo samo odwzorowanie F nie daje przyporządkowania między orientacjami na M i N . Wyjątkiem są dyfeomorfizmy, i o transporcie form nieparzystych mówić będziemy tylko w kontekście (lokalnych) dyfeomorfizmów.

16.7. Całkowanie form.

Formy parzyste rzędu l całkować będziemy po zorientowanych wewnątrznie podpowierzchniach wymiaru l .

Formy nieparzyste rzędu l całkować będziemy po zorientowanych zewnątrznie podpowierzchniach wymiaru l .

Całka z formy parzystej po powierzchni zorientowanej wewnątrznie

Przypadek $M = O \subset \mathbb{R}^n$, $n > 0$. Niech D będzie zwartym obszarem w O i niech α będzie parzystą n -formą różniczkową na O (utożsamioną z polem n -kovektorów stycznych). W przestrzeni \mathbb{R}^n mamy bazę kanoniczną. Jej klasa równoważności jest orientacją kanoniczną oznaczaną $(+)$, orientację przeciwną oznaczamy $(-)$.

Jeżeli $\alpha(x) = a(x)dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n$, to *całką z formy α po obszarze zorientowanym $(D, +)$* nazywamy liczbę

$$\int_{(D,+)} \alpha = \int_D a.$$

Ponadto definiujemy

$$\int_{(D,-)} \alpha = - \int_{(D,+)} \alpha.$$

Niech F będzie dyfeomorfizmem obszarów

$$F: O \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n.$$

Mówimy, że F jest dyfeomorfizmem obszarów zorientowanych

$$F: (O, +) \rightarrow (U, +),$$

jeżeli odwzorowanie styczne przeprowadza bazę kanoniczną przestrzeni stycznej w bazę do niej równoważną. Na odwrót, F jest dyfeomorfizmem

$$F: (O, +) \rightarrow (U, -)$$

jeżeli odwzorowanie styczne przeprowadza bazę kanoniczną w bazę orientacji $(-)$. Będziemy pisać odpowiednio $(U, +) = F(O, +)$ ($(U, -) = F(O, -)$) lub $(U, -) = F(O, +)$ ($(U, +) = F(O, -)$).

STWIERDZENIE 16.12. *Dyfeomorfizm obszarów $F: O \rightarrow U$ jest dyfeomorfizmem obszarów zorientowanych*

$$F: (O, +) \rightarrow (U, +)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det F'(x) > 0.$$

DOWÓD: Niech $f = (F'(x)e_1, \dots, F'(x)e_n)$ będzie obrazem bazy kanonicznej $e = (e_1, \dots, e_n)$ w \mathbb{R}^n . Teza wynika z następującej tożsamości:

$$\det [\text{id}]_e^f = \det F'(x).$$

■

Ważne jest następujące twierdzenie o zamianie zmiennych.

STWIERDZENIE 16.13. *Niech $F: O \rightarrow U$ będzie dyfeomorfizmem i niech α będzie n -formą na U . Wówczas*

$$\int_{(D,+)} F^* \alpha = \int_{F(D,+)} \alpha.$$

DOWÓD: Niech $\alpha(y) = a(y)dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$. Z własności transportu formy mamy

$$F^* \alpha(x) = a(F(x)) \frac{\partial(F^1, \dots, F^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Zatem z definicji całki i z twierdzenia o zamianie zmiennych

$$\begin{aligned} \int_{(D,+)} F^* \alpha &= \int_D a \circ F \frac{\partial(F^1, \dots, F^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \\ &= \text{sgn} \left(\frac{\partial(F^1, \dots, F^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \right) \int_D a \circ F \left| \frac{\partial(F^1, \dots, F^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \right| \\ &= \text{sgn} \left(\frac{\partial(F^1, \dots, F^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \right) \int_{F(D)} a \\ &= \int_{F(D,+)} \alpha. \end{aligned}$$

■

Przypadek $n = 0$. Przypadek ten wymaga osobnej umowy. Forma rzędu zeroowego jest funkcją, więc na \mathbb{R}^0 jest to po prostu liczba a . Umawiamy się, że

$$\int_{(\{0\},+)} a = a, \quad \int_{(\{0\},-)} a = -a.$$

Całka po obszarze na rozmaitości. Możemy teraz zdefiniować całkę z formy $\alpha \in \Phi_e^m(M)$, gdzie m jest wymiarem M , po zwartym, zorientowanym obszarze $D \subset M$. Orientację oznaczamy literą ι (orientację przeciwną $-\iota$). Rozważmy najpierw przypadek, gdy nośnik α jest zawarty w dziedzinie O lokalnego układu współrzędnych $\kappa: O \rightarrow \mathbb{R}^m$. Całkę definiujemy wzorem

$$\int_{(D,\iota)} \alpha = \int_{\kappa(D \cap O,\iota)} (\kappa^{-1})^* \alpha.$$

Ze Stwierdzenia 16.13 wynika, że całka ta nie zależy od wyboru układu współrzędnych.

Niech teraz α będzie dowolną m -formą i niech $D \subset \cup_i O_i$ będzie pokryciem dziedzinami lokalnych układów współrzędnych. Niech ponadto (φ_i) będzie lokalnym rozkładem jedności dla pokrycia (O_i) . Kładziemy

$$\int_{(D,\iota)} \alpha = \sum_i \int_{(D,\iota)} \varphi_i \alpha.$$

Prosty rachunek pokazuje, że całka nie zależy od wyboru rozkładu jedności. Korzystamy tu z addytywności całki Riemanna.

Całka z l -formy po l -wymiarowej, zorientowanej podrozzmaitości.

Niech teraz $\alpha \in \Phi_e^l(M)$ i niech $N \subset M$ będzie l -wymiarową podpowierzchnią w M z orientacją ι . Oznaczmy przez i kanoniczne włożenie $i: N \rightarrow M$. Definiujemy całkę z α po $D \subset N$ (D jest zwartym obszarem w N) wzorem

$$\int_{(N,\iota)} \alpha = \int_{(N,\iota)} i^* \alpha.$$

W przypadku $l = 0$ powierzchnia (spójna) N jest zbiorem jednopunktowym $N = \{p_0\}$, a forma α po prostu funkcją (np. f). Mamy

$$\int_{(N,+)} \alpha = f(p_0).$$

Całka z formy nieparzystej po powierzchni zorientowanej zewnątrznie.

Całkę definiujemy podobnie jak dla form, lokalnie i korzystając z rozkładu jedności. Lokalnie każda powierzchnia jest orientowalna (wewnątrznie), wystarczy więc

zdefiniować całkę z formy nieparzystej dla przypadku orientowalnych M i N . Niech ν będzie orientacją zewnętrzną N względem M , a ι_M, ι_N orientacjami wewnętrznymi M, N takimi, że para (ι_M, ι_N) reprezentuje orientację zewnętrzną ν . Niech D będzie zwartym obszarem w N . Całkę $\int_{(D,\nu)} \alpha$ definiujemy wzorem

$$\int_{(D,\nu)} \alpha = \int_{(D,\iota_N)} \varepsilon \alpha \quad (16.11)$$

gdzie funkcja nieparzysta ε na M reprezentuje orientację wewnętrzną ι_M . Inaczej mówiąc, $\alpha = (\varepsilon \alpha, \iota_M)$ (patrz (16.9)). Oczywiście, że

$$\int_{(D,-\nu)} \alpha = - \int_{(D,\nu)} \alpha.$$

W szczególności, dla zwartego obszaru $D \subset M$ i m -formy nieparzystej $\alpha = (\alpha, \iota_M)$, mamy kanoniczną orientację zewnętrzną i

$$\int_D \alpha = \int_{(D,\iota)} \alpha.$$

Z tego powodu m -formę nieparzystą nazywa się też *gęstością (skalarną)*.

W przypadku $l = 0$ (N jest punktem p_0) orientacja zewnętrzna ν jest wyznaczona przez orientację rozmaitości M . Oznaczmy ją ι_ν . Mamy tu, dla $f = (f, \iota_\nu)$,

$$\int_{(N,\nu)} f = f(p_0).$$

Wielkości fizyczne jako formy.

Możemy teraz wyrazić pogląd, że formy parzyste opisują wielkości całkowane po powierzchniach (odpowiedniego wymiaru) zorientowanych wewnątrznie, zaś formy nieparzyste po powierzchniach zorientowanych zewnątrznie. Patrząc na wzory całkowe fizyki można rozpoznać charakter geometryczny obiektów matematycznych reprezentujących wielkości fizyczne. Inaczej mówiąc: *Powiedz mi po czym ciebie całkują, a powiem ci czym jesteś*. Dla przykładu:

- (1) Pole sił w mechanice nierelatywistycznej - 1-forma parzysta.
- (2) Potencjał elektrostatyczny - 0-forma (funkcja) parzysta.
- (3) Pole elektrostatyczne - 1-forma parzysta.
- (4) Pole indukcji elektrostatycznej - 2-forma nieparzysta.
- (5) Ładunek elektrostatyczny - 3-forma nieparzysta.
- (6) Potencjał magnetostaticzny - 1-forma parzysta.
- (7) Pole indukcji magnetycznej - 2-forma parzysta.
- (8) Pole magnetyczne - 1-forma nieparzysta.
- (9) Gęstość prądu - 2-forma nieparzysta.

16.8. Pochodna (różniczka) zewnętrzna.

W tej części wykładu szukać będziemy odpowiednika znanego z Analizy 1 wzoru

$$\int_a^b df = f(b) - f(a),$$

przy czym odcinek będziemy zastępować powierzchnią zorientowaną, a funkcję odpowiednią formą. Zaczniemy od rozszerzenia różniczki na dowolne pola wielo-kowektorowe, a w konsekwencji, na formy różniczkowe parzyste i nieparzyste.

Pochodna zewnętrzna (różniczka) pola wielo-kowektorowego.

Pochodną (różniczką) zewnętrzną funkcji f nazywamy jej różniczkę df , pochodną zewnętrzną $d\alpha$ pola l -kowektorowego

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_l}$$

na dziedzinie lokalnego układu współrzędnych $O \subset M$ nazywamy pole $l + 1$ -kowektorowe

$$d\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} d\alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_l}. \quad (16.12)$$

STWIERDZENIE 16.14. *Pochodna zewnętrzna jest liniowym odwzorowaniem*

$$d: \Phi(O) \rightarrow \Phi(O)$$

scharakteryzowanym jednoznacznie przez poniższe warunki:

- (1) $\text{rzęd } d\alpha = \text{rzęd } \alpha + 1$
- (2) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge d\beta$ gdzie l jest rzędem pola α
- (3) $dd\alpha = 0$
- (4) *pochodna zewnętrzna funkcji f jest jej różniczką df .*

DOWÓD: Jednoznaczność jest oczywista: z warunku (2) wynika, że wystarczy znać pochodną na polach kowektorowych. Z warunku (3) wystarczy ją znać na funkcjach. Zatem warunek (4) określa ją jednoznacznie.

Należy teraz sprawdzić, czy powyższe własności są przez pochodną zewnętrzną zdefiniowaną wzorem (16.12) spełnione.

- (1) Oczywiście.
- (2) Niech

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_l}$$

oraz

$$\beta = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} \beta_{j_1 j_2 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \dots \wedge dx^{j_k}.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \\ & \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \dots < i_l \\ j_1 < j_2 < \dots < j_k}} d(\alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} \beta_{j_1 j_2 \dots j_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_l} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \dots \wedge dx^{j_k} = \\ & \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_l \\ j_1 < \dots < j_k}} (\beta_{j_1 \dots j_k} d\alpha_{i_1 \dots i_l} + \alpha_{i_1 \dots i_l} d\beta_{j_1 \dots j_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_l} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \dots \wedge dx^{j_k} = \\ & \left(\sum_{i_1 < \dots < i_l} d\alpha_{i_1 \dots i_l} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_l} \right) \wedge \left(\sum_{j_1 < \dots < j_k} \beta_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \dots \wedge dx^{j_k} \right) \\ & + (-1)^l \left(\sum_{i_1 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 \dots i_l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} \right) \wedge \left(\sum_{j_1 < \dots < j_k} d\beta_{j_1 \dots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right) \\ & = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

(3) Na mocy poprzedniego punktu wystarczy sprawdzić, że dla funkcji $df = 0$.

$$df = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} f dx^i$$

i stąd

$$\begin{aligned} dd f &= \sum_j \sum_i d\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right) \wedge dx^i = \sum_j \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &= - \sum_j \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = -dd f \end{aligned}$$

z symetrii drugiej pochodnej. Zatem $dd f = 0$. ■

Z powyższego stwierdzenia wynika, że definicja (16.12) nie zależy od lokalnego układu współrzędnych i że pochodną zewnętrzną można określić dla pól określonych na całej powierzchni M .

Pochodną (różniczkę) zewnętrzną na powierzchni możemy zdefiniować jako operację spełniającą powyższe cztery warunki.

Różniczka form.

Różniczkę formy parzystej definiujemy jako różniczkę odpowiadającego jej pola wielo-kowektorowego. Podobnie dla form nieparzystych (lokalnie): dla $\alpha = (\alpha, \iota)$

$$d\alpha = (d\alpha, \iota).$$

16.9. Twierdzenie Stokesa.

16.9.1. Zwarte powierzchnie z brzegiem. Orientacja brzegu. Niech M będzie rozmaitością wymiaru m . Zwarty podzbiór $D \subset M$ nazywamy m -wymiarową *powierzchnią (podrozmaitością) z brzegiem*, jeżeli dla każdego punktu $q_0 \in D$ istnieje lokalny układ współrzędnych $\kappa = (x^1, \dots, x^m)$ na M , w otoczeniu $O \ni q_0$, taki, że

- (a) $x^1(q) \leq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q \in D \cap O$,
- (b) $\partial D \cap O \ni q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^1(q) = 0$.

W powyższej definicji brzeg jest rozumiany w sensie topologicznym, tzn. punkt z D należy do brzegu, jeżeli nie należy do wnętrza D (w topologii rozmaitości M). Z definicji wynika natychmiast, że brzeg ∂D jest podrozmaitością w M wymiaru $m - 1$ lub zbiorem pustym.

Zwarty podzbiór $D \subset M$ nazywamy k -wymiarową *powierzchnią (podrozmaitością) z brzegiem*, jeżeli istnieje k -wymiarowa podrozmaitość $N \subset M$ taka, że D jest k -wymiarową powierzchnią z brzegiem w N . Jeżeli D jest powierzchnią wymiaru k , to brzeg ∂D jest powierzchnią wymiaru $k - 1$.

Niech $q \in \partial D$. Powiemy, że wektor $v \in T_q M$ jest styczny do D , jeżeli istnieje krzywa γ reprezentująca v i taka, że $\gamma(t) \in D$ dla $t > 0$. (Przestrzeń styczna do D na brzegu składa się z wektorów stycznych do M , reprezentowanych przez krzywe, których „dodatnia połówka” jest w D .) Przestrzeń styczna do brzegu $T_q \partial D$ jest podprzestrzenią (kowymiaru 1) przestrzeni rozpiętej na wektorach stycznych do D .

Niech D będzie k -wymiarową, zwartą powierzchnią z brzegiem w M . Niech $N \supset D$ będzie k -wymiarową podrozmaitością M . Załóżmy, że D jest zorientowana, tzn. zorientowane jest jej otoczenie w N . Oznaczmy tę orientację ι . Pokażemy, że brzeg ∂D ma naturalną orientację indukowaną orientacją ι . Weźmy punkt $p \in \partial D$. Niech (e_1, \dots, e_{k-1}) będzie bazą przestrzeni $T_p \partial D$ i niech \bar{n} będzie wektorem z $T_p N$ takim, że $\bar{n} \notin T_p D$ („wystaje na zewnątrz” D). Powiemy, że baza (e_1, \dots, e_{k-1}) jest zgodna z orientacją indukowaną brzegu, jeżeli baza $(\bar{n}, e_1, \dots, e_{k-1})$ jest zgodna z orientacją ι . Łatwo jest sprawdzić, że tak wybrane orientacje przestrzeni stycznych do brzegu są zgodne, czyli zadają orientację całego brzegu. Orientację indukowaną brzegu oznaczać będziemy $\partial \iota$. Powyższą konstrukcję orientacji indukowanej brzegu można wypowiedzieć tak: wektor \bar{n} zadaje orientację zewnętrzną brzegu względem N . Ponieważ mamy zadaną orientację N (w otoczeniu D), więc orientacja zewnętrzna brzegu wyznacza orientację wewnętrzną według wprowadzonego wcześniej przepisu. Jest to indukowana orientacja wewnętrzna brzegu.

W przypadku $k = 1$ brzeg jest powierzchnią 0-wymiarową. Jeżeli D jest spójne, to ∂D składa się z dwóch punktów. Orientacja indukowana punktu brzegowego jest dodatnia, jeżeli wektor \bar{n} w tym punkcie jest zgodny z orientacją D .

16.9.2. Twierdzenie Stokesa dla form parzystych.

Zachodzi bardzo ważne

Twierdzenie 16.15 (Stokes'a). Dla $\alpha \in \Phi_c^{k-1}(M)$ i zwartej k -wymiarowej powierzchni z brzegiem D

$$\int_{(D,\iota)} d\alpha = \int_{(\partial D,\partial\iota)} \alpha. \quad (16.13)$$

Dowód: Z definicji całki wynika, że wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy wymiary M i D są równe (D jest zwartym obszarem w M). Niech (O_i) będzie pokryciem skończonym D takim, że

- (a) O_i jest dziedziną lokalnego układu współrzędnych $\kappa_i = (x_i^j)$,
- (b) $x_i^1(q) \leq 0$ dla $q \in D \cap O_i$,
- (c) $\partial D \cap O_i \ni q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i^1(q) = 0$.

Istnienie takiego pokrycia wynika natychmiast z definicji powierzchni z brzegiem. Niech (φ_i) będzie rozkładem jedności dla pokrycia (O_i) . Ponieważ $\sum_i \varphi_i = 1$, mamy

$$d \sum_i \varphi_i \alpha = \sum_i d(\varphi_i \alpha) = \sum_i \varphi_i d\alpha + \sum_i d\varphi_i \wedge \alpha = \sum_i \varphi_i d\alpha$$

i, w konsekwencji,

$$\begin{aligned} \int_{(D,\iota)} d\alpha &= \sum_i \int_{(D \cap O_i, \iota)} \varphi_i d\alpha = \sum_i \int_{(D \cap O_i, \iota)} d(\varphi_i \alpha) \\ &= \sum_i \int_{\kappa_i(D \cap O_i, \iota)} d(\kappa_i^{-1})^* \varphi_i \alpha. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy dwa przypadki:

- (1) $O_i \cap \partial D = \emptyset$
Niech

$$(\kappa_i^{-1})^* \varphi_i \alpha = \sum_j a_{(i)}^j dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^{j-1} \wedge dx_i^{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_i^m. \quad (16.14)$$

Ponieważ nośnik powyższej formy zawiera się w $\kappa(O_i)$ możemy ją rozszerzyć do gładkiej formy na całym \mathbb{R}^m kładąc zero poza $\kappa(O_i)$. Mamy więc, jeżeli $\kappa(D \cap O_i, \iota)$ ma orientację dodatnią

$$\int_{(D \cap O_i, \iota)} d(\varphi_i \alpha) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_i^j} a_{(i)}^j.$$

Ale całka po j -tej współrzędnej daje

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x^j} a_{(i)}^j = \Big|_{-\infty}^{\infty} a_{(i)}^j = 0,$$

więc, z twierdzenia Fubiniiego,

$$\int_{(D \cap O_i, \iota)} d(\varphi_i \alpha) = 0.$$

Dla orientacji ujemnej też dostajemy zero.

(2) $O_i \cap \partial D \neq \emptyset$

Podobnie jak w poprzednim przypadku mamy, jeżeli $\kappa(D \cap O_i, \iota)$ ma orientację dodatnią,

$$\int_{(D \cap O_i, \iota)} d(\varphi_i \alpha) = \int_{\mathbb{R}_-^m} \sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_i^j} a_{(i)}^j.$$

gdzie $\mathbb{R}_-^m = \{\mathbb{R}^m \ni (x_1, \dots, x_m) : x_1 \leq 0\}$. Całkując najpierw po j -tej współrzędnej dostajemy dla $j \neq 1$, jak i poprzednio,

$$\int_{\mathbb{R}_-^m} \frac{\partial}{\partial x_i^j} a_{(i)}^j = 0$$

oraz dla $j = 1$

$$\int_{\mathbb{R}_-^m} \frac{\partial}{\partial x_i^1} a_{(i)}^1 = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} a_{(i)}^1|_{x_1=0}. \quad (16.15)$$

Jeżeli $\kappa(D \cap O_i, \iota)$ ma orientację ujemną, to otrzymujemy analogiczną formułę ze znakiem minus.

Z drugiej strony,

$$\int_{(\partial D \cap O_i, \partial \iota)} \varphi_i \alpha = \int_{\kappa(\partial D \cap O_i, \partial \iota)} (\kappa^{-1})^* \varphi_i (\kappa^{-1})^* \alpha. \quad (16.16)$$

Oczywiście, że przy dokonanej wyborze mapy orientacja $\partial \iota$ przechodzi na orientację $\partial \mathbb{R}_-^m$, indukowaną orientacją $\kappa(\iota)$ całego \mathbb{R}^m .

Jeżeli więc orientacja $\kappa(\iota) = +$ (jest dodatnia), to

$$\int_{\kappa(\partial D \cap O_i, \partial \iota)} (\kappa^{-1})^* \varphi_i (\kappa^{-1})^* \alpha = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} a_{(i)}^1|_{x_1=0} = \int_{\mathbb{R}_-^m} \frac{\partial}{\partial x_i^1} a_{(i)}^1 \quad (16.17)$$

a jeżeli jest ujemna, to

$$\int_{\kappa(\partial D \cap O_i, \partial \iota)} (\kappa^{-1})^* \varphi_i (\kappa^{-1})^* \alpha = - \int_{\mathbb{R}^{m-1}} a_{(i)}^1|_{x_1=0} = - \int_{\mathbb{R}_-^m} \frac{\partial}{\partial x_i^1} a_{(i)}^1. \quad (16.18)$$

Porównując (16.15), (16.17) i (16.18) dostajemy

$$\int_{(D \cap O_i, \iota)} d(\varphi_i \alpha) = \int_{(\partial D \cap O_i, \partial \iota)} \varphi_i \alpha.$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} \int_{(D, \iota)} d\alpha &= \sum_i \int_{(D \cap O_i, \iota)} \varphi_i d\alpha = \sum_i \int_{(D \cap O_i, \iota)} d(\varphi_i \alpha) \\ &= \sum_i \int_{(\partial D \cap O_i, \partial \iota)} \varphi_i \alpha = \int_{(\partial D, \partial \iota)} \alpha. \end{aligned}$$

■

Uwaga. Założenie, że brzeg jest powierzchnią, nie jest konieczne. Wystarczy, żeby dał się pokryć skończoną liczbą kawałków powierzchni.

Dla $m = 1$ brzeg jest zbiorem 0-wymiarowym, dwupunktowym (jeżeli D jest spójne). W tym przypadku Twierdzenie Stokesa ma szczególnie prostą postać

$$\int_a^b df = f(b) - f(a).$$

Z twierdzenia Stokes'a wynika następująca, ważna obserwacja.

STWIERDZENIE 16.16. *Jeżeli D jest zwartą powierzchnią bez brzegu, a α jest różniczką formy rzędu $\dim D - 1$, to*

$$\int_D \alpha = 0.$$

DOWÓD: Z założenia $\alpha = d\beta$ i $\partial D = \emptyset$, więc

$$0 = \int_{(\partial D, \partial \iota)} \beta = \int_{(D, \iota)} \alpha$$

na mocy Twierdzenia Stokesa, dla dowolnej orientacji ι .

■

16.9.3. Twierdzenie Stokesa dla form nieparzystych.

Niech $D \subset N \subset M$ będzie zwartym obszarem (w N) z brzegiem. Niech ν będzie orientacją zewnętrzną N względem M . Zdefiniujemy indukowaną orientację zewnętrzną brzegu ∂D . Niech lokalnie orientacja ν będzie reprezentowana parą (ι_M, ι_N) , gdzie ι_M, ι_N są orientacjami wewnętrznymi odpowiednio M i N . Orientację indukowaną brzegu $\partial \nu$ definiujemy jako reprezentowaną parą $(\iota_M, \partial \iota_N)$. Używając przestrzeni dopełniającej, orientację indukowaną można opisać tak: niech W będzie przestrzenią dopełniającą $T_p N$ w $T_p M$, $p \in \partial D$. Podprzestrzeń dopełniająca do $T_p \partial D$ jest rozpięta przez W i wektor \bar{n} . Jeżeli (e_1, \dots, e_{n-k}) jest bazą W , zgodną z orientacją ν , to baza $(e_1, \dots, e_{n-k}, \bar{n})$ jest zgodna z orientacją $\partial \nu$.

Możemy teraz sformułować Twierdzenie Stokesa w wersji dla form nieparzystych.

Twierdzenie 16.17 (Stokes'a). Dla $\alpha \in \Phi_o^{n-1}(M)$, i zwartej powierzchni z brzegiem $D \subset N \subset M$ (D jest zwartym obszarem w N)

$$\int_{(D, \nu)} d\alpha = \int_{(\partial D, \partial \nu)} \alpha. \quad (16.19)$$

Dowód: Wystarczy wykazać równość całek w przypadku powierzchni orientowalnych. Mamy więc, jak w (17.9),

$$\int_{(D, \nu)} d\alpha = \int_{(D, \iota_N)} \varepsilon d\alpha = \int_{(D, \iota_N)} d(\varepsilon\alpha) = \int_{(\partial D, \partial \iota_N)} \varepsilon\alpha = \int_{(\partial D, \partial \nu)} \alpha. \quad (16.20)$$

■

16.10. Lemat Poincarégo.

Dla ustalenia uwagi zajmijmy się teraz tylko formami parzystymi. Przejście do form nieparzystych jest oczywiste. Formę parzystą α na powierzchni M nazywamy *zamkniętą*, jeżeli $d\alpha = 0$, jeżeli zaś istnieje forma β taka, że $\alpha = d\beta$ to mówimy, że forma α jest *zupełna*. Z własności pochodnej zewnętrznej ($dd = 0$) wynika, że każda forma zupełna jest zamknięta. Forma zamknięta na ogół nie jest zupełna. Poniższe twierdzenie pokazuje, że dla dużej klasy obszarów zamkniętość formy pociąga za sobą jej zupełność.

Obszar O w \mathbb{R}^n nazywamy *gwiazdzistym względem* $a \in O$, jeżeli dla każdego $x \in O$ i dla każdej liczby $0 \leq t \leq 1$ punkt $a + t(x - a)$ też należy do O .

Twierdzenie 16.18 (Lemat Poincarégo). Na obszarze gwiazdzistym każda forma zamknięta jest zupełna.

Dowód: Dla prostoty przyjmijmy, że obszar O jest gwiazdzisty względem zera. Zdefiniujmy odwzorowanie (ściągające)

$$F: O \times [0, 1] \rightarrow O: (x, t) \rightarrow tx.$$

Odwzorowanie to jest oczywiście gładkie. Niech

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_l}$$

będzie l -formą na O . Mamy

$$\begin{aligned} F^* \alpha(x, t) &= t^l \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(xt) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_l} \\ &- t^{l-1} \sum_j \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} (-1)^j x^{i_j} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(tx) dt \wedge dx^{i_1} \dots \wedge dx^{i_{j-1}} \wedge dx^{i_{j+1}} \dots \wedge dx^{i_l} \end{aligned}$$

Zdefiniujemy teraz odwzorowanie liniowe

$$K: \Phi(O \times [0, 1]) \rightarrow \Phi(O)$$

wzorami

$$K(a(x, t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \left\{ \int_0^1 a(x, t)dt \right\} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

oraz

$$K(a(x, t)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0.$$

Pokażemy, że dla każdej k -formy α na O zachodzi związek

$$K(dF^*\alpha) + dK(F^*\alpha) = \alpha. \quad (16.21)$$

Z definicji operacji K mamy

$$\begin{aligned} & K(F^*\alpha) = \\ &= - \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_l \\ j}} (-1)^j x^{i_j} \left(\int_0^1 t^{l-1} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{j-1}} \wedge dx^{i_{j+1}} \cdots \wedge dx^{i_l}, \end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned} dK(F^*\alpha) &= l \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1} \alpha_{i_1 \dots i_l}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l} - \\ & \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^n (-1)^j x^{i_j} \left(\int_0^1 t^l \frac{\partial}{\partial x^k} \alpha_{i_1 \dots i_l}(tx) dt \right) dx^k \wedge dx^{i_1} \cdots \wedge dx^{i_{j-1}} \wedge dx^{i_{j+1}} \cdots \wedge dx^{i_l}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} dF^*\alpha &= F^*d\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_l} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(tx) t^{l+1} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \cdots \wedge dx^{i_l} + \\ & + \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_l} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(tx) t^l x^k dt \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l} + \\ & \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^l (-1)^j \frac{\partial}{\partial x^k} \alpha_{i_1 \dots i_l}(tx) t^l x^{i_j} dt \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \cdots \wedge dx^{i_{j-1}} \wedge dx^{i_{j+1}} \cdots \wedge dx^{i_l} \end{aligned}$$

i w końcu

$$K(dF^*\alpha) = \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(tx) t^l x^k dt \right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} +$$

$$\sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^l (-1)^j \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^k} \alpha_{i_1 \dots i_l}(tx) t^l x^{i_j} dt \right) dx^{i_1} \dots \wedge dx^{i_{j-1}} \wedge dx^{i_{j+1}} \dots \wedge dx^{i_l}.$$

W sumie obu wyrażeń sumowania potrójne redukują się i dostajemy

$$dK(F^*\alpha) + K(dF^*\alpha) = l \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} +$$

$$+ \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(tx) t^l x^k dt \right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} =$$

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} [t^l \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(tx)] dt \right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} =$$

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} = \alpha(x).$$

Jeżeli $d\alpha = 0$, to również $dF^*\alpha = 0$. Mamy więc ze związku (16.21)

$$dK(F^*\alpha) = \alpha.$$

■

Z przemienności różniczkowania zewnętrznego i transportu formy wynika, że na każdym obszarze powierzchni M , dyfeomorficznym obszarowi gwiazdzystemu na \mathbb{R}^m , forma zamknięta jest zupełna.

Sposób na rozpoznawanie form zamkniętych, ale nie zupełnych daje Stwierdzenie 16.16. Jeżeli znajdziemy obszar zwarty bez brzegu i taki, że całka po nim z pewnej formy jest różna od zera, to forma ta nie jest zupełna.

Przykład. Niech $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i niech

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Wybermy $D = S^1$ (okrąg o promieniu jeden). Oczywiście $\partial S^1 = \emptyset$ i $d\alpha = 0$, ale

$$\int_{(S^1, \iota_\varphi)} \alpha = \int_0^{2\pi} (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) d\varphi = 2\pi \neq 0,$$

gdzie ι_φ jest orientacją zadaną parametryzacją kątem φ . Wnioskujemy, że α jest formą zamkniętą, ale nie zupełną.

Rozdział 17. GĘSTOŚCI. KLASYCZNA ANALIZA WEKTOROWA.

17.1. Gęstości wektorowe.

W poprzedniej sekcji pokazaliśmy, że (lokalnie) każda l -forma nieparzysta jest iloczynem 0-formy nieparzystej (na przykład reprezentującej orientację) i l -formy parzystej. Poznamy teraz inną reprezentację form nieparzystych, bardziej wśród fizyków popularną.

Przypuśćmy, że mamy zadany niezerowy m -kowektor nieparzysty $\alpha(p) \in \bigwedge_o^m \mathbb{T}_p^* M$ na powierzchni M wymiaru m . Dla dowolnych l wektorów stycznych $v_1, \dots, v_l \in \mathbb{T}_p M$ zdefiniujemy $m-l$ -kowektor nieparzysty $\widetilde{W}_p(v_1, \dots, v_l, \alpha)$, w punkcie p , wzorem

$$\widetilde{W}_p(v_1, \dots, v_l, \alpha(p)): (w_1, \dots, w_{m-l}, \iota) \mapsto \alpha(v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_{m-l}; \iota) \mapsto \mathbb{R} \quad (17.1)$$

Odwzorowanie \widetilde{W}_p jest l -liniowe i antysymetryczne ze względu na (v_1, \dots, v_l) , więc definiuje odwzorowanie

$$W_p: \bigwedge^l \mathbb{T}M \times \bigwedge_o^m \mathbb{T}_p^* M \longrightarrow \bigwedge_o^{m-l} \mathbb{T}_p^* M,$$

a stąd

$$W: \Psi^l(M) \times \Phi_o^m(M) \longrightarrow \Phi_o^{m-l}(M).$$

Odwzorowanie W_p jest biliniowe, więc indukuje odwzorowanie liniowe (oznaczać je będziemy też W_p)

$$W_p: \bigwedge^l \mathbb{T}_p M \otimes \bigwedge_o^m \mathbb{T}_p^* M \longrightarrow \bigwedge_o^{m-l} \mathbb{T}_p^* M.$$

Pokażemy, że odwzorowanie to jest iniektywne. Niech ε będzie funkcją nieparzystą. Z wzoru (17.1) dostajemy, że dla l -wektora v i $m-l$ -wektora w

$$\langle \varepsilon W_p(v \otimes \alpha), w \rangle = \langle \varepsilon \alpha, v \wedge w \rangle. \quad (17.2)$$

$\varepsilon \alpha$ jest różnym od zera m -kowektorem, więc dla $v \wedge w \neq 0$, prawa strona (17.2) jest różna od zera. Ale dla każdego, różnego od zera l -wektora v znaleźć można $m-l$ -wektor w taki, że $v \wedge w$ jest różny od zera. Stąd $W_p(v \otimes \alpha)$ jest różny od zera dla v różnego od zera. W_p jest iniekcją, więc z porównania wymiarów przestrzeni argumentów i wartości dostajemy, że jest też izomorfizmem. Oznaczmy

$$\bigwedge^l \mathbb{T}M \otimes_M \bigwedge_o^m \mathbb{T}^* M = \bigcup_p \left(\bigwedge^l \mathbb{T}_p M \otimes \bigwedge_o^m \mathbb{T}_p^* M \right).$$

Odwzorowanie

$$\mathfrak{n}: M \rightarrow \bigwedge^l \mathbb{T}M \otimes_M \bigwedge_o^m \mathbb{T}_p^* M: p \mapsto \mathfrak{n}(p) \in \bigwedge^l \mathbb{T}_p M \otimes \bigwedge_o^m \mathbb{T}_p^* M$$

nazywać będziemy *gęstością l -wektorową*. Przestrzeń gęstości l -wektorowych na M oznaczajmy $\mathfrak{T}^l(M)$.

Zdefiniowane powyżej odwzorowanie W indukuje odwzorowanie

$$W: \mathfrak{T}^l(M) \rightarrow \Phi_o^{m-l}(M)$$

przypisując gęstości l -wektorowej formę nieparzystą rzędu $(m-l)$. Odwzorowanie to nazywamy *izomorfizmem (dwoistością) Weyla*.

Dywergencja gęstości wektorowych. Niech \mathfrak{n} będzie gęstością l -wektorową. Dywergencją $\text{Div } \mathfrak{n}$ pola \mathfrak{n} nazywamy gęstość $(l-1)$ wektorową

$$\text{Div } \mathfrak{n} = (-1)^{l-1} W^{-1} \circ d \circ W(\mathfrak{n}).$$

Gęstości wektorowe w lokalnym układzie współrzędnych. Niech (x^i) będzie lokalnym układem współrzędnych na M . Zadaje on orientację ι_x i m -formę $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$, czyli m -formę nieparzystą $d^m x = (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m, \iota_x)$. Gęstość l -wektorowa zadana jest więc samym polem l -wektorowym X :

$$\mathfrak{n}(q) = X \otimes d^m x = \left(\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_l} X^{i_1 i_2 \cdots i_l}(q) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \right) \otimes d^m x. \quad (17.3)$$

Ta sama gęstość jest reprezentowana w układzie współrzędnych (y^i) w sposób następujący:

$$\mathfrak{n}(q) = \left(|J| \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_l \\ j_1 < \cdots < j_l}} X^{j_1 j_2 \cdots j_l}(q) \frac{\partial(y^{i_1}, \dots, y^{i_l})}{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_l})} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y^{i_l}} \right) \otimes d^m y.$$

Zapiszmy teraz izomorfizm Weyla w lokalnym układzie współrzędnych. Niech \mathfrak{n} będzie jak w (17.3) i niech

$$W(\mathfrak{n}) = \left(\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_{m-l}} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{m-l}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \cdots \wedge dx^{i_{m-l}}, \iota_x \right).$$

Z definicji izomorfizmu W dostajemy

$$\begin{aligned}
\alpha_{j_1 i_2 \dots j_{m-l}} &= \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{m-l}}} \right) \\
&= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} X^{i_1 i_2 \dots i_l} d^m x \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_l}}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{m-l}}}, \iota_x \right) \\
&= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_{m-l}) X^{i_1 i_2 \dots i_l}.
\end{aligned}$$

Mamy więc

$$\alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_{m-l}} \sum_{i_1 < \dots < i_l} \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_{m-l}) X^{i_1 i_2 \dots i_l} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \dots \wedge dx^{j_{m-l}}. \quad (17.4)$$

W szczególności, dla gęstości m -wektorowej

$$n = X^{12\dots m} \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^m} \otimes d^m x$$

mamy

$$W(n) = (X^{12\dots m}, \iota_x).$$

W innej konwencji, stosujemy zapis jak (16.1) dla form,

$$n = \frac{1}{m!} \sum_{i_1 < \dots < i_m} X^{i_1 \dots i_m} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \otimes d^m x,$$

gdzie zakładamy antysymetrię współczynników. Funkcji nieparzystej $f = (f, \iota_x)$ odpowiada gęstość

$$W^{-1}(f) = \frac{1}{m!} \sum_{i_1 < \dots < i_m} X^{i_1 \dots i_m} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \otimes d^m x, \quad (17.5)$$

gdzie $X^{i_1 \dots i_m} = \operatorname{sgn}(i_1 \dots i_m) f$. Jeżeli f funkcją nieparzystą zadającą orientację ι_x , to $X^{i_1 \dots i_m} = \operatorname{sgn}(i_1 \dots i_m)$.

Wyrażenia lokalne na dywergencję są dość skomplikowane, ograniczymy się więc do przypadku $l = 1$.

Niech

$$w = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes d^m x$$

będzie gęstością 1-wektorową. Odpowiadająca jej $(m - 1)$ -forma nieparzysta $W(w)$ jest równa

$$W(w) = \left(\sum_i (-1)^{i-1} X^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^m, \iota_x \right),$$

a stąd

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \left(\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes d^m x \right) \\ = W^{-1} \left(\sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m, \iota_x \right) = \left(\sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \right) d^m x. \end{aligned} \quad (17.6)$$

Ewaluacja między gęstościami i formami. Niech $D \subset M$ będzie obszarem zwartym. Dla każdej pary złożonej z l -gęstości wektorowej $n = X \otimes a$ i l -formy α na M możemy określić liczbę

$$\langle \alpha, n \rangle_D = \int_D \langle \alpha, X \rangle a. \quad (17.7)$$

W lokalnym układzie współrzędnych, dla

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \cdots \wedge dx^{i_l}$$

i

$$n = X \otimes d^m x = \left(\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_l} X^{i_1 i_2 \dots i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \right) \otimes d^m x$$

dostajemy

$$\begin{aligned} \langle \alpha, w \rangle a &= \left(\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} X^{i_1 i_2 \dots i_l} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m, \iota_x \right) \\ &= \left(\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_l} \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_{m-l}} \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_{m-l}) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l} X^{i_1 i_2 \dots i_l} \right. \\ &\quad \left. dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{m-l}}, \iota_x \right) = \alpha \wedge W(n). \end{aligned} \quad (17.8)$$

Jeżeli teraz nośniki $w \otimes a$ i $l - 1$ -formy α są zawarte we wnętrzu D , to zachodzi związek

$$\langle d\alpha, w \otimes a \rangle_D = -\langle \alpha, \operatorname{Div}(w \otimes a) \rangle_D. \quad (17.9)$$

Istotnie, z własności różniczki i Twierdzenia Stokesa

$$d(\alpha \wedge W(\mathbf{n})) = (d\alpha) \wedge W(\mathbf{n}) + (-1)^l \alpha \wedge d(W(\mathbf{n})) \quad \text{i} \quad \int_D d(\alpha \wedge W(\mathbf{n})) = 0,$$

a stąd i z (17.8)

$$\langle d\alpha, \mathbf{n} \rangle_D = \int_D d\alpha \wedge W(\mathbf{n}) = -(-1)^l \int_D \alpha \wedge d(W(\mathbf{n})) = -\langle \alpha, \text{Div}(\mathbf{n}) \rangle_D$$

Mówimy, że dywergencja jest operacją formalnie sprzężoną do różniczki zewnętrznej względem ewaluacji (17.7).

Uwaga. Ewaluacja (17.7) odgrywa ważną rolę w fizyce (zwłaszcza w klasycznej teorii pola). Jeżeli α reprezentuje pole fizyczne, $w \otimes \alpha$ pole dualne to ewaluacja (17.7) ma (z dokładnością do współczynnika) interpretację energii pola (statyka) lub działania (dynamika) w obszarze D . Dla przykładu: pole elektrostatyczne jest reprezentowane 1-formą E na trójwymiarowej przestrzeni, a dualne pole indukcji gęstością wektorową D . Podobnie pole indukcji magnetycznej jest 2-formą B na trójwymiarowej przestrzeni, a dualne pole magnetyczne gęstością 2-wektorową H . Ogólnie, pole elektromagnetyczne jest 2-formą F na czasoprzestrzeni, a dualne pole G gęstością 2-wektorową na czasoprzestrzeni.

17.2. Wykorzystanie metryki. Wzory analizy wektorowej.

Metryką (riemannowską) g na M nazywamy odwzorowanie

$$g: \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}^*M$$

takie, że

- (1) $g(\mathbb{T}_q M) \subset \mathbb{T}_q^* M$,
- (2) $g: \mathbb{T}_q M \rightarrow \mathbb{T}_q^* M$ jest samosprzężonym izomorfizmem przestrzeni wektorowych, to znaczy dla każdej pary wektorów v, w zaczepionych w jednym punkcie, $\langle v, g(w) \rangle = \langle w, g(v) \rangle$,
- (3) $\langle v, g(v) \rangle \geq 0$ dla każdego $v \in \mathbb{T}M$.

Metryka przedłuża się w sposób naturalny do odwzorowania liniowego z przestrzeni wielo-wektorów w przestrzeń wielo-kowektorów, zachowującego iloczyn zewnętrzny:

$$g(w \wedge v) = g(w) \wedge g(v).$$

Liczbę $\langle v, g(w) \rangle$ zapisujemy również $(v|w)$.

Oprócz odpowiedniości między wektorami a kowektorami i, w konsekwencji, między formami parzystymi a polami wielo-wektorowymi, metryka zadaje m -formę nieparzystą g :

STWIERDZENIE 17.1. *Wzór*

$$g(v_1, \dots, v_m; \iota) = (\det \langle v_i, g(v_j) \rangle)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie ι jest orientacją zgodną z ciągiem wektorów (v_1, \dots, v_m) jeśli jest on bazą, definiuje m -formę nieparzystą.

DOWÓD: Jeżeli wektory są liniowo zależne to wyznacznik jest równy zero, więc orientacja jest obojętna. Niech zatem wektory będą liniowo niezależne. Dla $a > 0$ bazy (v_1, \dots, v_m) i (av_1, v_2, \dots, v_m) wyznaczają tę samą orientację, więc

$$g(av_1, \dots, v_m; \iota) = (a^2 \det \langle v_i, g(v_j) \rangle)^{\frac{1}{2}} = ag(v_1, \dots, v_m; \iota). \quad (17.10)$$

Jeżeli $g(v_1, \dots, v_m; \iota) = (\det \langle v_i, g(v_j) \rangle)^{\frac{1}{2}}$, to

$$\begin{aligned} g(-v_1, v_2, \dots, v_m; \iota) &= -g(-v_1, v_2, \dots, v_m; -\iota) \\ &= -(\det \langle v_i, g(v_j) \rangle)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (17.11)$$

bo orientacja $(-v_1, v_2, \dots, v_m)$ jest przeciwna orientacji (v_1, \dots, v_m) . Z (17.10) i (17.11) dostajemy jednorodność ze względu na każdy z argumentów.

Wykażemy teraz addytywność (ze względu na pierwszy argument).

Jeżeli ciągi wektorów (v_1, v_2, \dots, v_m) i (v'_1, v_2, \dots, v_m) nie są bazami, to również nie jest bazą ciąg $(v_1 + v'_1, v_2, \dots, v_m)$ i dostajemy

$$g(v_1, \dots, v_m; \iota) + g(v'_1, \dots, v_m; \iota) = 0 = g(v_1 + v'_1, \dots, v_m; \iota).$$

Niech więc (v_1, \dots, v_m) będzie bazą, wówczas $v'_1 = \lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^m v_m$, a z własności wyznacznika i z jednorodności dostajemy

$$\begin{aligned} g(v_1 + v'_1, v_2, \dots, v_m; \iota) &= g(v_1 + \lambda^1 v_1, v_2, \dots, v_m; \iota) = (1 + \lambda^1)g(v_1, \dots, v_m; \iota) = \\ &= g(v_1, \dots, v_m; \iota) + g(\lambda^1 v_1, \dots, v_m; \iota) = g(v_1, \dots, v_m; \iota) + g(v'_1, v_2, \dots, v_m; \iota). \end{aligned}$$

Korzystamy tu z tego, że orientacja zadana przez $(v_1 + v'_1, \dots, v_m)$ jest równa orientacji zadanej przez $(v_1 + \lambda^1 v_1, \dots, v_m)$. ■

Mając gęstość g możemy dowolną $(m-l)$ -formę nieparzystą reprezentować polem l -wektorowym. Mamy więc następujące możliwości:

- (1) Pole wektorowe X może być po prostu polem wektorowym.
- (2) Pole wektorowe X może reprezentować 1-formę różniczkową $g \circ X$.
- (3) Pole wektorowe X może reprezentować gęstość wektorową $X \otimes g$.

W zależności od charakteru w jakim występuje pole wektorowe, inne stosuje się do niego operacje algebraiczne i różniczkowe:

- (1) Jeżeli $g \circ X = df$, to X nazywamy *gradientem* funkcji f .
- (2) $\text{Div}(X \otimes g)$ jest gęstością skalarną, więc iloczynem $f(X)g$. Funkcję $f(X)$ nazywamy divergencją pola wektorowego i oznaczamy $\text{div } X$.
- (3) Niech M będzie wymiaru 3 zadaną orientację ι . $(d(g \circ X), \iota)$ jest 2-formą nieparzystą, więc gęstością wektorową równą $Y \otimes g$. Pole wektorowe Y nazywa się rotacją X i oznaczamy je $\text{rot } X$. Możemy to zapisać

$$\text{rot } X \otimes g = W^{-1}(\varepsilon d(g \circ X)), \quad (17.12)$$

gdzie ε jest funkcją nieparzystą zadającą orientację ι .

- (4) $\text{div grad } f$ nazywa się laplasjanem funkcji f i oznacza się Δf .

W dalszym ciągu przyda nam się następujący związek dla funkcji f i pola wektorowego X :

$$\text{div}(fX) = f \text{div } X + (\text{grad } f | X). \quad (17.13)$$

DOWÓD: Mamy

$$\begin{aligned} \text{Div}(fX \otimes g) &= W^{-1} \circ d \circ W(fX \otimes g) \\ &= W^{-1}(df \wedge W(X \otimes g)) + fW^{-1} \circ d \circ W(X \otimes g). \end{aligned}$$

W lokalnym układzie współrzędnych $g = ad^m x$ i, zgodnie z (17.4),

$$W(X \otimes g) = \sum_i (-1)^{i-1} X^i a (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^m, \iota_x)$$

i stąd

$$\begin{aligned} df \wedge W(X \otimes g) &= \sum_i (-1)^{i-1} X^i a \frac{\partial f}{\partial x^i} (d^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^m, \iota_x) \\ &= df(X)a(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m, \iota_x) = (\text{grad } f | X)g \end{aligned}$$

Zatem

$$\text{Div}(fX \otimes g) = (X | \text{grad } f)g + f \text{Div}(X \otimes g),$$

a stąd

$$\text{div}(fX) = f \text{div } X + (X | \text{grad } f). \quad \blacksquare$$

Gwiazdka Hodge'a. Mając metrykę g i l -formę parzystą α możemy zdefiniować gęstość l -wektorową

$$(g^{-1} \circ \alpha) \otimes g.$$

Odpowiadającą jej (poprzez izomorfizm Weyla) formę nieparzystą oznaczać będziemy $*\alpha$. Operację

$$*: \Phi_e^l(M) \longrightarrow \Phi_e^{m-l}: \alpha \mapsto *\alpha$$

nazywamy *odwzorowaniem Hodge'a*. Przy ustalonej orientacji ι rozmaitości M forma nieparzysta jest reprezentowana formą parzystą, więc odwzorowanie Hodge'a może być traktowane jako odwzorowanie przyporządkowujące l -formom formy rzędu $n-l$

$$*: \Phi_e^l(M) \longrightarrow \Phi_e^{m-l}.$$

Ta, zależna od orientacji, wersja odwzorowania Hodge'a nazywa się *gwiazdką Hodge'a*.

Metryka i gęstość na podrozmaitości. Jeżeli $N \subset M$ jest podrozmaitością, to $\mathbb{T}N \subset \mathbb{T}M$, więc metrykę g na M można zredukować do metryki g_N na N . Jeżeli $j: \mathbb{T}N \rightarrow \mathbb{T}M$ jest kanonicznym włożeniem, to

$$g_N = j^* \circ g \circ j: \mathbb{T}N \rightarrow \mathbb{T}^*N$$

i

$$\langle v, g_N(w) \rangle = \langle j(v), g(j(w)) \rangle.$$

Metryka g_N wyznacza n -gęstość skalarną g_N na N .

17.3. Klasyczne wersje twierdzenia Stokesa.

Twierdzenie Stokesa dla form możemy przetłumaczyć na twierdzenia dotyczące pól wektorowych. Ograniczmy się przy tym do przypadku $M = \mathbb{R}^3$ z metryką g i orientacją kanoniczną. Niech $\mathfrak{n} = X \otimes g$ będzie gęstością wektorową. Niech S będzie 2-wymiarową powierzchnią orientowalną zewnętrznio, z orientacją zewnętrzną ν . Orientacja ta może być zadana polem \mathfrak{n} wektorów na S , unormowanych i prostopadłych do powierzchni.

STWIERDZENIE 17.2.

$$\int_{(S,\nu)} X \otimes g = \int_S \langle \mathfrak{n}, g(X) \rangle g_S$$

DOWÓD: Niech $(t, s) \rightarrow (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$ będzie parametryzacją powierzchni S . Całka z gęstości jest równa całce z odpowiadającej jej formy nieparzystej

$$\int_{(S,\nu)} X \otimes g = \int_{(S,\nu)} W(X \otimes g).$$

Z definicji izomorfizmu Weyla

$$W(X \otimes g)(v_1, v_2; t) = g(X, v_1, v_2; t),$$

więc dla $v_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ i $v_2 = \frac{\partial}{\partial s}$ i orientacji ι zgodnej z (X, v_1, v_2) , dostajemy z definicji gęstości g

$$W(X \otimes g)(v_1, v_2; \iota) = (\det A)^{\frac{1}{2}}, \quad (17.14)$$

gdzie A jest macierzą

$$A = \begin{bmatrix} (X|X) & (X|\frac{\partial}{\partial t}) & (X|\frac{\partial}{\partial s}) \\ (X|\frac{\partial}{\partial t}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial t}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) \\ (X|\frac{\partial}{\partial s}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) & (\frac{\partial}{\partial s}|\frac{\partial}{\partial s}) \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $(\mathbf{n}|\frac{\partial}{\partial t}) = (\mathbf{n}|\frac{\partial}{\partial s}) = 0$, to rozkładając pole X na S

$$X = (X|\mathbf{n})\mathbf{n} + a\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial s},$$

dostajemy

$$\begin{aligned} \det A &= (\mathbf{n}|X) \det \begin{bmatrix} (\mathbf{n}|X) & (X|\frac{\partial}{\partial t}) & (X|\frac{\partial}{\partial s}) \\ 0 & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial t}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) \\ 0 & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) & (\frac{\partial}{\partial s}|\frac{\partial}{\partial s}) \end{bmatrix} \\ &+ a \det \begin{bmatrix} (\frac{\partial}{\partial t}|X) & (X|\frac{\partial}{\partial t}) & (X|\frac{\partial}{\partial s}) \\ (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial t}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial t}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) \\ (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) & (\frac{\partial}{\partial s}|\frac{\partial}{\partial s}) \end{bmatrix} + b \det \begin{bmatrix} (\frac{\partial}{\partial s}|X) & (X|\frac{\partial}{\partial t}) & (X|\frac{\partial}{\partial s}) \\ (\frac{\partial}{\partial s}|\frac{\partial}{\partial t}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial t}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) \\ (\frac{\partial}{\partial s}|\frac{\partial}{\partial s}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) & (\frac{\partial}{\partial s}|\frac{\partial}{\partial s}) \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{n}|X)^2 \det \begin{bmatrix} (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial t}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) \\ (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) & (\frac{\partial}{\partial s}|\frac{\partial}{\partial s}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

przy założeniu, że $(\mathbf{n}|X) \geq 0$ dostajemy

$$(\det A)^{\frac{1}{2}} = (X|\mathbf{n}) \left(\det \begin{bmatrix} (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial t}) & (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) \\ (\frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial}{\partial s}) & (\frac{\partial}{\partial s}|\frac{\partial}{\partial s}) \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = W((\mathbf{n}|X)g_S)(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}; \iota_S),$$

gdzie orientacja ι_S powierzchni S jest zadana przez parametryzację.

Ponieważ dla $(\mathbf{n}|X) > 0$ orientacja $(X, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s})$ jest równa orientacji $(\mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s})$, dostajemy

$$\int_{(S,\nu)} X \otimes g = \int_{\mathbb{R}^2} (\det A)^{\frac{1}{2}} = \int_S (\mathbf{n}|X) g_S.$$

Jeżeli $(\mathbf{n}|X) < 0$, to orientacja $(X, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s})$ jest przeciwna orientacji $(\mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s})$, więc

$$\int_{(S,\nu)} X \otimes g = - \int_{\mathbb{R}^2} (\det A)^{\frac{1}{2}}.$$

Z drugiej jednak strony

$$(\det A)^{\frac{1}{2}} = (X|\mathbf{n}) \left(\det \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} \middle| \frac{\partial}{\partial t}\right) & \left(\frac{\partial}{\partial t} \middle| \frac{\partial}{\partial s}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \middle| \frac{\partial}{\partial s}\right) & \left(\frac{\partial}{\partial s} \middle| \frac{\partial}{\partial s}\right) \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}},$$

więc znów dostajemy dowodzoną równość. ■

Podobnie, jeżeli C jest jednowymiarową podzaimością z orientacją wewnętrzną ι , to orientację tą można reprezentować polem \mathbf{s} unormowanych wektorów stycznych.

STWIERDZENIE 17.3.

$$\int_{(C,\iota)} g \circ X = \int_C \langle \mathbf{s}, g \circ X \rangle g_C$$

DOWÓD: Niech $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow C \subset M$ będzie parametryzacją C , zgodną z orientacją. Z definicji całki z formy

$$\begin{aligned} \int_{(C,\iota)} g \circ X &= \int_{\mathbb{R}} \langle \mathbb{T}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), g \circ X \circ \varphi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \mathbf{s}, g \circ X \circ \varphi \rangle \|\mathbb{T}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\| \\ &= \int_C \langle \mathbf{s}, g \circ X \rangle g_C \end{aligned}$$

Z powyższych wzorów dostajemy, jako wnioski z twierdzenia Stokesa, jego wersje klasyczne

TWIERDZENIE 17.4 (KLASYCZNE TWIERDZENIE STOKESA).

$$\int_S (\mathbf{n}|\text{rot } X) g_S = \int_{\partial S} (\mathbf{s}|X) g_{\partial S}$$

przy czym kierunki pól \mathbf{s} i \mathbf{n} są związane ze sobą regułą prawej śruby.

DOWÓD: Niech ι oznacza orientację \mathbb{R}^3 , ν orientację zewnętrzną S zadaną polem \mathbf{n} , a ι_S odpowiadającą jej orientację wewnętrzną. Mamy ze Stwierdzenia 17.2, definicji rotacji i ze Stwierdzenia 17.3,

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{n}|\text{rot } X) g_S &= \int_{(S,\nu)} \text{rot } X \otimes g = \int_{(S,\nu)} (d(g \circ X), \iota) = \int_{(S,\iota_S)} d(g \circ X) \\ &= \int_{(\partial S, \partial \iota_S)} g \circ X = \int_{\partial S} \langle \mathbf{s}, g \circ X \rangle g_{\partial S} = \int_{\partial S} (\mathbf{s}|X) g_{\partial S}. \end{aligned}$$

■

TWIERDZENIE 17.5 (TWIERDZENIE GAUSSA-OSTROGRADZKIEGO-GREENA).

$$\int_D (\operatorname{div} X)g = \int_{\partial D} (\mathbf{n}|X)g_{\partial D}$$

przy czym wektor \mathbf{n} jest skierowany na zewnątrz obszaru D .

DOWÓD: Niech ν oznacza orientację zewnętrzną S zadaną polem \mathbf{n} . Mamy ze Stwierdzenia 17.2, definicji dywergencji i z Twierdzenia Stokesa dla form nieparzystych,

$$\int_D \operatorname{div} Xg = \int_D \operatorname{Div}(X \otimes g) = \int_D d(W(X \otimes g)) = \int_{(\partial D, \nu)} X \otimes g = \int_{\partial D} (\mathbf{n}|X)g_{\partial D}.$$

■

Z powyższego twierdzenia dostajemy dwie klasyczne formuły.

TWIERDZENIE 17.6 (WZORY GREENA). Dla dowolnych funkcji f, h zachodzą wzory

$$\int_D (\operatorname{grad} f | \operatorname{grad} h)g = - \int_D f \Delta h g + \int_{\partial D} f (\mathbf{n} | \operatorname{grad} h)g_{\partial D} \quad (17.15)$$

i

$$\int_D f \Delta h g - \int_D h \Delta f g = \int_{\partial D} f (\mathbf{n} | \operatorname{grad} h)g_{\partial D} - \int_{\partial D} h (\mathbf{n} | \operatorname{grad} f)g_{\partial D}. \quad (17.16)$$

DOWÓD: Z (17.13) mamy

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + (X | \operatorname{grad} f),$$

więc, kładąc $X = \operatorname{grad} h$, wzór (17.15) wynika z twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego-Greena.

Wzór (17.16) wynika natychmiast z (17.15) (wystarczy zamienić rolami f i g i odjąć stronami dwie równości (17.15)).

■

17.3.1. Wzory w lokalnych układach współrzędnych.

Niech (x^i) będzie lokalnym układem współrzędnych. W indukowanych bazach przestrzeni stycznych i kostycznych g wyraża się symetryczną, nieosobliwą macierzą funkcji $[g_{ij}]$. Oznaczmy $g = \det[g_{ij}]$.

STWIERDZENIE 17.7.

$$g = \sqrt{g} d^m x. \quad (17.17)$$

DOWÓD: Dla układu wektorów (v_1, \dots, v_m) zadającego orientację ι mamy

$$g(v_1, \dots, v_m; \iota) = \sqrt{\det[\langle v_i, g(v_j) \rangle]},$$

ale

$$\langle v_i, g(v_j) \rangle = \sum_{k,l} a_i^k a_j^l \left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, g\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right) \right\rangle,$$

gdzie $v_i = \sum_k a_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ i w konsekwencji,

$$\sqrt{\det[\langle v_i, g(v_j) \rangle]} = \sqrt{\det[a_i^k] \det[g_{kl}] \det[a_j^l]} = |\det[a_j^i]| \sqrt{\det[g_{kl}]}.$$

Ale

$$|\det[a_j^i]| = d^m x(v_1, \dots, v_m; \iota),$$

więc $g = \sqrt{g} d^m x$. ■

Mamy zatem

$$X \otimes g = (\sqrt{g} X) \otimes d^m x.$$

Stąd i z wzoru (17.6) dostajemy,

$$\operatorname{Div}(X \otimes g) = \sum_i \frac{\partial \sqrt{g} X^i}{\partial x^i} d^m x = \left(\sum_i \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} X^i}{\partial x^i} \right) g.$$

Podsumowując, w lokalnym układzie współrzędnych mamy następujące wzory:

- (1) $\operatorname{div} X = \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} X^i}{\partial x^i},$
- (2) $\operatorname{grad} f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i},$
- (3) $\Delta f = \sum_{ij} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$

Niech teraz dana będzie orientacja ι powierzchni trójwymiarowej M , odpowiadająca funkcji nieparzystej ε . Rotacja pola wektorowego X zadana jest wzorem (17.12). Gęstość trójwektorowa $W^{-1}(\varepsilon)$ zapisuje się, zgodnie z (17.5),

$$W^{-1}(\varepsilon) = \frac{1}{3!} \sum_{ijk} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że

$$(4) \operatorname{rot} X = \sum_{ijkl} \varepsilon^{lkj} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{ij} X^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Rozdział 18. FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

18.1. Różniczkowalność w sensie zespolonym.

Jako przestrzeń wektorowa nad ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{C} jest równe \mathbb{R}^2 . Zatem odwzorowanie (funkcję) $f: \mathbb{C} \supset O \rightarrow \mathbb{C}$ można traktować jako odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \supset O \rightarrow \mathbb{R}^2$. Jeżeli f jest różniczkowalna w $(x, y) = z \in O$, to pochodna

$$f'(z): \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

jest, z definicji, odwzorowaniem \mathbb{R} -liniowym.

DEFINICJA 18.1. Funkcję f nazywamy *różniczkowalną w sensie zespolonym* w punkcie z , jeżeli jest w tym punkcie różniczkowalna w sensie rzeczywistym i $f'(z)$ jest odwzorowaniem \mathbb{C} -liniowym, to znaczy jeżeli

$$f'(z)(\lambda w) = \lambda f'(z)(w) \quad \lambda, w \in \mathbb{C}.$$

STWIERDZENIE 18.2. *Następujące warunki są równoważne:*

- (1) f jest różniczkowalna w sensie zespolonym.
- (2) Spełnione są warunki Cauchy'ego–Riemanna

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (18.1)$$

gdzie $P = \operatorname{Re} f$, $Q = \operatorname{Im} f$.

- (3) Istnieje granica ilorazu

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

przy w dążącym do zera.

DOWÓD: Pochodna f dana jest macierzą Jacobiego

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Warunek \mathbb{C} -liniowości jest równoważny warunkowi $f'(z)(i) = i f'(z)(1)$, czyli

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a z kolei ta równość jest równoważna

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Udowodniliśmy więc równoważność pierwszych dwóch warunków.

Różniczkowalność f jest równoważna z definicji temu, że wyrażenie

$$w \mapsto f(z+w) - f(z) - f'(z)(w)$$

jest resztą, czyli

$$\frac{f(z+w) - f(z) - f'(z)w}{|w|} \xrightarrow{w \rightarrow 0} 0, \quad (18.2)$$

lub równoważnie (liczby zespolone możemy dzielić),

$$\frac{f(z+w) - f(z) - f'(z)w}{w} \xrightarrow{w \rightarrow 0} 0.$$

Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} \frac{1}{w}(f(z+w) - f(z) - f'(z)(w)) &= \\ &= \left(\frac{f(z+w) - f(z)}{w} - f'(z)(1) \right) + \left(f'(z)(1) - \frac{1}{w}f'(z)(w) \right), \quad (18.3) \end{aligned}$$

więc z różniczkowalności (zbieżność do zera lewej strony) i \mathbb{C} -liniowości (drugi składnik z prawej strony jest równy zeru) wynika zbieżność

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w} \xrightarrow{w \rightarrow 0} f'(z)(1).$$

Na odwrót, jeżeli istnieje granica

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w} \xrightarrow{w \rightarrow 0} L \in \mathbb{C},$$

to $w \mapsto f(z+w) - f(z) - wL$ jest resztą, czyli f jest różniczkowalne w z i $f'(z)(w) = wL$, więc pochodna jest \mathbb{C} -liniowa. ■

Uwaga: W dalszym ciągu symbolem $f'(z)$, dla f różniczkowalnych w sensie zespolonym, oznaczać będziemy liczbę zespoloną $f'(z)(1)$. Trzeci równoważny warunek z powyższego stwierdzenia sugeruje, by pochodną w sensie zespolonym oznaczać też $\frac{df}{dz}$.

STWIERDZENIE 18.3. Jeżeli f, g są różniczkowalne w sensie zespolonym w punkcie z , to również $f+g, fg, \frac{f}{g}, f \circ g$ są różniczkowalne w sensie zespolonym w z . Ponadto

- (1) $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$,
- (2) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$,
- (3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ (tutaj zakładamy, że $g(z) \neq 0$),
- (4) $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$.

DOWÓD: Dowód tych związków przebiega dokładnie tak samo jak w przypadku rzeczywistym. ■

Formy o wartościach zespolonych. Kowektor styczny jest odwzorowaniem \mathbb{R} -liniowym z przestrzeni stycznej w przestrzeń liczbową \mathbb{R} . Kowektorem o wartościach zespolonych nazwiemy odwzorowanie \mathbb{R} -liniowe z przestrzeni stycznej o wartościach w \mathbb{C} . Oczywiście jest, że takie kowektory można uważać za pary kowektorów o wartościach rzeczywistych i że tworzą one przestrzeń wektorową nad ciałem \mathbb{C} . Na płaszczyźnie zespolonej bazą w przestrzeni kowektorów zaczepionych w punkcie w są różniczki współrzędnych: $d_w x, d_w y$. Mamy więc ogólną postać kowektora o wartościach zespolonych, zaczepionego w punkcie w

$$(a_x d_w x + a_y d_w y) + i(b_x d_w x + b_y d_w y) = c_x d_w x + c_y d_w y,$$

gdzie $c_x = a_x + ib_x$ i $c_y = a_y + ib_y$.

W oczywisty sposób definiujemy wielo-kowektory o wartościach zespolonych oraz ich iloczyn zewnętrzny, formy różniczkowe o wartościach zespolonych i ich różniczkę zewnętrzną. W szczególności, podobnie jak w przypadku rzeczywistym, dla funkcji różniczkowalnej f

$$d_w f(v) = f'(w)v, \quad v \in \mathbb{C}.$$

Mamy oczywiście

$$dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy,$$

więc w każdym punkcie $w \in \mathbb{C}$ kowektory $d_w z, d_w \bar{z}$ tworzą bazę nad \mathbb{C} w przestrzeni kowektorów o wartościach zespolonych. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że

$$dz \wedge dz = 0 = d\bar{z} \wedge d\bar{z} \quad \text{i} \quad dz \wedge d\bar{z} = -2idx \wedge dy$$

Symbole $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Niech f będzie funkcją o wartościach zespolonych, różniczkowalną w sensie rzeczywistym. Jej części: rzeczywista P i urojona Q są różniczkowalnymi funkcjami rzeczywistymi i mamy

$$df = dP + idQ.$$

Zapiszmy teraz różniczkę w bazie $(dz, d\bar{z})$:

$$d_w f = a(w)d_w z + b(w)d_w \bar{z}. \quad (18.4)$$

W dalszym ciągu współczynnik $a(w)$ będziemy oznaczać symbolem $\frac{\partial f}{\partial z}(w)$, a współczynnik $b(w)$ symbolem $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(w)$. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że w każdym punkcie kowektor dz jest \mathbb{C} -liniowy, a $d\bar{z}$ nie jest. Korzystamy tu z utożsamienia przestrzeni wektorowej ze stycznią do niej (w dowolnym punkcie). W tym utożsamieniu wektorowi $\frac{\partial}{\partial x}$ odpowiada liczba 1, a wektorowi $\frac{\partial}{\partial y}$ liczba i . Mamy zatem w dowolnym punkcie $w \in \mathbb{C}$

$$d_w z(v_x + iv_y) = d_w z\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\right) = d_w x(v_x) + i d_w y(v_y) = v_x + iv_y$$

i

$$d_w \bar{z}(v_x + iv_y) = d_w \bar{z}\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\right) = d_w x(v_x) - i d_w y(v_y) = v_x - iv_y.$$

Różniczka $d_w f$ jest więc \mathbb{C} -liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy współczynnik przy $d\bar{z}$ jest równy zeru.

STWIERDZENIE 18.4.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

DOWÓD: Dla każdej funkcji f

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + i \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f d\bar{z}. \end{aligned}$$

■

Podsumowując,

STWIERDZENIE 18.5. f jest różniczkowalna w sensie zespolonym wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Wówczas

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Dla funkcji jednej zmiennej zespolonej, różniczkowalnej w sensie zespolonym, piszemy $\frac{df}{dz}$ zamiast $\frac{\partial f}{\partial z}$.

I jeszcze jedna ważna własność: jeżeli f jest dwukrotnie różniczkowalna i $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, to

$$\Delta f = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0.$$

Mówimy, że części rzeczywista i urojona funkcji f są funkcjami *harmonicznymi*.

DEFINICJA 18.6. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym obszarem. Funkcję klasy $\mathcal{C}^1(O)$, różniczkowalną w sensie zespolonym na Ω nazywamy *holomorficzną* na Ω . Przestrzeń (wektorową) funkcji holomorficzych na Ω oznaczamy $\mathcal{A}(\Omega)$.

Uwaga. Założenie ciągłości pochodnej nie jest konieczne. Wynika ona z różniczkowalności w sensie zespolonym. Dowód tego faktu wykracza jednak poza ramy naszego wykładu.

18.2. Wzory całkowe Cauchy'ego.

W Rozdziale 15 zdefiniowana była całka z 1-formy (parzystej) po 1-wymiarowej podrozmaitości zorientowanej (wewnętrznie). Takie (zwarte) podrozmaitości nazywać teraz będziemy *łukami zorientowanymi* lub *konturami zorientowanymi*, jeżeli łuk jest zamknięty.

DEFINICJA 18.7. Całką z funkcji $f: \mathbb{C} \supset O \rightarrow \mathbb{C}$ o wartościach zespolonych po łuku zorientowanym Γ nazywać będziemy całkę $\int_{\Gamma} f dz$.

Należy tu zwrócić uwagę na fakt, że \mathbb{C} ma kanoniczną orientację zadaną bazą $(1, i)$. Zatem brzeg każdego obszaru ma naturalną orientację wewnętrzną, odpowiadającą orientacji zewnętrznej 'na zewnątrz' obszaru. Naturalna orientacja okręgu jako brzegu koła jest orientacja 'przeciwna ruchowi wskazówek zegara'. O takiej orientacji można mówić w przypadku dowolnego konturu, będącego brzegiem obszaru. Stosuje się oznaczenia

$$\oint_{\Gamma}, \quad \text{a dla orientacji przeciwnej} \quad \oint_{\Gamma}^{-}.$$

STWIERDZENIE 18.8. Funkcja $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ jest holomorficzną na Ω wtedy i tylko wtedy, gdy forma różniczkowa

$$\alpha = f dz$$

jest zamknięta.

DOWÓD:

$$d\alpha = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz,$$

a $d\bar{z} \wedge dz = -dz \wedge d\bar{z} = 2i dx \wedge dy \neq 0$. ■

Wnioski:

- (1) Jeżeli łuk (kontur) Γ jest brzegiem obszaru O w Ω , to $\int_{\Gamma} f dz = \int_O d(f dz) = 0$.
- (2) Jeżeli Ω jest obszarem gwiaździstym (ogólniej – jednospójnym), to z lematu Poincarégo istnieje funkcja F taka, że $dF = f dz$ (stąd $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$). Łatwo sprawdzić, że F jest dwukrotnie różniczkowalna. Z twierdzenia Stokesa

$$F(z) - F(a) = \int_{\Gamma} f dz$$

gdzie Γ jest dowolnym łukiem w Ω o początku w a i końcu w z . Piszemy też $\int_a^z f dz$.

TWIERDZENIE 18.9 (WZÓR CAŁKOWY CAUCHY'EGO). Niech f będzie funkcją holomorficzną w Ω i niech $U \subset \Omega$ będzie zwartym obszarem z brzegiem Γ , zorientowanym kanonicznie. Wówczas

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0,$$

jeżeli $a \notin U$ oraz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a),$$

jeżeli $a \in U, a \notin \partial U$.

DOWÓD: Jeżeli $a \notin U$, to funkcja

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}$$

jest na $\Omega \setminus \{a\} \supset U$ holomorficzną jako iloraz funkcji holomorficzných, więc z wniosku z poprzedniego stwierdzenia

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0.$$

Niech teraz $a \in U$. Wybierzmy ε dostatecznie małe tak, by koło $K(a; \varepsilon)$ leżało w U . Oznaczmy $U_\varepsilon = U \setminus K(a; \varepsilon)$. Z poprzedniego mamy

$$\int_{\partial U_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0,$$

więc

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{S_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

gdzie S_ε jest zorientowanym kanonicznie brzegiem koła $\bar{K}(a; \varepsilon)$. Wystarczy teraz oszacować całkę po tym okręgu. Mamy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{f(a)}{2\pi i} \int_{S_\varepsilon} \frac{dz}{z-a} + \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varepsilon} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz.$$

Obliczymy pierwszą całkę parametryzując okrąg przez $z = a + \varepsilon e^{i\varphi}$:

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1} e^{-i\varphi} d(\varepsilon e^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} i df = 2\pi i.$$

Z drugiej strony

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \varepsilon^{-1} e^{-i\varphi} (f(a + \varepsilon e^{i\varphi}) - f(a)) d(\varepsilon e^{i\varphi}) \right| \leq M \cdot 2\pi\varepsilon.$$

Ostatnia nierówność wynika z twierdzenia o wartości średniej dla odwzorowań, a $M = \sup_{K(a; \varepsilon)} |f'|$. Ponieważ mamy tak dla każdego ε , więc przechodząc z ε do zera dostajemy tezę. ■

Wnioski z twierdzenia Cauchy'ego.

- (1) Jeżeli znamy wartości funkcji f na brzegu Γ obszaru U , to znamy wartości f w całym U .
- (2) Z twierdzenia o różniczkowaniu całki z parametrem funkcja zadana wzorem

$$z \mapsto \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

jest klasy C^∞ , jeżeli funkcja f jest ciągła. Zatem funkcje holomorfczne są klasy C^∞ .

- (3) Pochodna funkcji holomorfcznej jest funkcją holomorfczną.

STWIERDZENIE 18.10 (O WARTOŚCI ŚREDNIEJ). *Jeżeli $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ i $K(a; r) \subset \Omega$, to*

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(a; r)} f.$$

DOWÓD: Z twierdzenia Cauchy'ego

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi \quad \text{dla } \rho < r,$$

a stąd

$$\int_0^r \rho f(a) d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho f(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi d\rho$$

i w konsekwencji,

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(a; r)} f.$$

■

STWIERDZENIE 18.11. *Niech oznaczenia i założenia będą jak w twierdzeniu Cauchy'ego. Zachodzi związek*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (18.5)$$

DOWÓD: Z twierdzenia o różniczkowaniu całki z parametrem i ze wzoru Cauchy'ego

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

■

Następujące twierdzenie jest, w pewnym sensie, odwrotne do wniosku o niezależności od drogi całki z funkcji holomorficzej.

STWIERDZENIE 18.12 (MORERY). *Niech $f \in C(\Omega)$ i niech całka z f nie zależy od drogi. Wtedy przyporządkowanie*

$$z \mapsto F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$$

jest funkcją holomorficzną na Ω i jej pochodna jest równa funkcji f .

DOWÓD: Z definicji F mamy

$$F(z + \delta z) - F(z) = \int_z^{z+\delta z} f(\zeta) d\zeta$$

i stąd, całkując po odcinku $[z, z + \delta z]$ z parametryzacją $[0, 1] \ni t \mapsto z + t\delta z$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \delta z) - F(z)}{\delta z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{\delta z} \int_z^{z+\delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{1}{\delta z} \int_0^1 (f(z + t\delta z) - f(z)) \delta z dt \right| \leq \sup_{\zeta \in [z, z+\delta]} |f(\zeta) - f(z)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Korzystaliśmy tu ze znanego z Analizy II szacowania całki o wartościach w przestrzeni z normą (Rozdział 11). Zatem funkcja F jest holomorficzną na Ω , więc f , jako jej pochodna, też jest funkcją holomorficzną. ■

STWIERDZENIE 18.13 (NIERÓWNOŚCI CAUCHY'EGO). Niech $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ i niech $M(a, \rho)$ oznacza maksimum $|f|$ na okręgu $|z - a| = \rho$ takim, że $K(a; \rho) \subset \Omega$. Wówczas spełnione są nierówności

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \rho^n \leq M(a, \rho) \quad (18.6)$$

dla $n \geq 0$.

DOWÓD: Ze wzorów Cauchy'ego

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{S_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \\ &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\varphi}) (\rho e^{i\varphi})^{-n-1} i \rho e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi \rho^{-n} \cdot M(a, \rho). \end{aligned}$$

Jako prosty wniosek z tych nierówności, mamy ważne twierdzenie o rozwinięciu funkcji holomorficzej w szereg potęgowy.

18.3. Rozwinięcie w szereg Taylora.

TWIERDZENIE 18.14. Niech $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Niech $K(a; R) \subset \Omega$. Wówczas funkcja f może być rozłożona w szereg Taylora

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots \quad (18.7)$$

i szereg ten jest zbieżny niemal jednostajnie w kole $K(a; R)$.

DOWÓD: Niech $A \subset K(a; R)$ będzie zbiorem zwartym. Ze zwartości zbioru A wynika, że jest on zawarty w nieco mniejszym kole, tzn. istnieje $R' < R$ takie, że $A \subset K(a; R')$. Dla $|z - a| < |\zeta - a|$ mamy rozkład

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

i szereg po prawej stronie jest zbieżny niemal jednostajnie ze względu na z . Niech teraz R'' będzie takie, że $0 < R' < R'' < R$ i niech Γ będzie brzegiem koła $K(a; R'')$. Mamy zatem ze wzoru Cauchy'ego (18.5) dla $|z - a| \leq R'$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

Oszacujmy wyraz w szeregu pod całką. Mamy

$$\left| (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{R'^n}{R''^{n+1}} \cdot \frac{M(a, R'')}{2\pi},$$

zatem szereg podcałkowy jest zbieżny jednostajnie na Γ i możemy wyjść z sumowaniem przed całką. Dostajemy ze wzorów Cauchy'ego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

a z nierówności Cauchy'ego

$$\left| \frac{(z - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{(z - a)^n}{n!} \frac{n!}{(R'')^n} M(a, R'') \leq \left(\frac{R'}{R''} \right)^n M(a, R'').$$

Z przeprowadzonego powyżej oszacowania szereg (18.7) jest zbieżny jednostajnie w kole $|z - a| \leq R'$, a więc i na A . ■

Funkcję dające się przedstawić lokalnie w postaci sumy szeregu potęgowego nazywamy funkcją *analityczną*. Zatem każda funkcja holomorficzna jest analityczna.

Wnioski:

- (1) Jeżeli w punkcie a spójnego obszaru Ω dla f holomorficznego w Ω zachodzi $f^{(n)}(a) = 0$, $n = 0, 1, \dots$, to f jest równa zero na całym Ω .
- (2) Jeżeli dwie funkcje holomorficzne mają takie same pochodne wszystkich rzędów w punkcie a , to są one równe na składowej spójnej zawierającej ten punkt.

DOWÓD: Niech $A \subset \Omega$ będzie zbiorem, na którym f jest równa zero wraz ze wszystkimi pochodnymi. Z definicji jest to przecięcie zbiorów domkniętych w Ω ($f^{(n)-1}(0)$), więc jest zbiorem domkniętym w Ω . Z twierdzenia o rozwinięciu Taylora jest to zbiór otwarty, czyli jest równy Ω . ■

- (3) Niech $\Omega \ni a_n \rightarrow a \in \Omega$, $a_n \neq a$ i niech $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Jeżeli $f(a_n) = 0$ dla wszystkich n , to f jest równe zero w otoczeniu a .

DOWÓD: Wystarczy pokazać, że wszystkie pochodne funkcji f w punkcie a są równe zero. Przypuśćmy więc, że $f^{(k)}(a) \neq 0$ jest pierwszą nieznikającą pochodną. Z rozwinięcia Taylora wynika, że $f(z) = (z - a)^k g(z)$, g jest holomorficzną i $g(a_n) \rightarrow g(a) \neq 0$. Z drugiej strony, ponieważ $f(a_n) = 0$, to $g(a_n) = 0$ i $g(a_n) \rightarrow 0$. ■

- (4) Funkcja holomorficzną f jest albo tożsamościowo równa zero, albo jej miejsca zerowe są izolowane (tzn. nie mają punktu skupienia w Ω).

DOWÓD: Z poprzedniego wniosku wynika, że jeżeli zera f mają punkt skupienia w Ω , to funkcja jest równa zero. ■

I jeszcze jedna, nieoczekiwana własność funkcji holomorficznnej

STWIERDZENIE 18.15. Jeżeli f jest holomorficzną na spójnym Ω i jej moduł $|f|$ ma lokalne maksimum w $a \in \Omega$, to f jest stała na Ω .

DOWÓD: Niech koło $K(a; r) \subset \Omega$ będzie takie, że $|f(z)| \leq |f(a)|$ dla $z \in K(a; r)$. Mamy

$$0 \leq \int_{K(a; r)} (|f(a)| - |f|) = \pi r^2 |f(a)| - \int_{K(a; r)} |f|$$

Ale ze Stwierdzenia 18.10 o wartości średniej mamy też

$$\pi r^2 |f(a)| \leq \int_{K(a; r)} |f|,$$

więc

$$0 \leq \int_{K(a; r)} (|f(a)| - |f|) \leq \int_{K(a; r)} |f| - \int_{K(a; r)} |f| = 0.$$

Zatem funkcja $z \mapsto |f(a)| - |f(z)|$ jest tożsamościowo równa zero. Wynika stąd, że

$$f(z) = e^{i\varphi(z)} f(a),$$

gdzie φ jest funkcją o wartościach rzeczywistych. Ponieważ f jest holomorficzną, to

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = i f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \quad \text{i} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (18.8)$$

Funkcja φ jest rzeczywista, więc z równań Cauchy'ego–Riemanna (18.1) jej pochodna jest równa zero. Zatem φ jest funkcją stałą. Stąd f jest stała w $K(a; r)$ i w konsekwencji, w całym Ω . ■

18.3.1. Funkcje całkowite. *Funkcją całkowitą* nazywamy funkcję holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} . Funkcja całkowita ma więc rozwinięcie w szereg Taylora w całym \mathbb{C} i względem dowolnego punktu.

STWIERDZENIE 18.16 (LIOUVILLE'A). *Funkcja całkowita i ograniczona jest stała.*

DOWÓD: Jeżeli $|f(z)| < C$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$, to z nierówności Cauchy'ego

$$|f'(z)|\rho \leq M(z, \rho) < C$$

dla każdego $\rho > 0$ (funkcja całkowita!). Zatem $f'(z) = 0$ dla każdego z , czyli f jest stała. ■

Jako bezpośredni wniosek z twierdzenia Liouville'a dostajemy

TWIERDZENIE 18.17 (PODSTAWOWE TWIERDZENIE ALGEBRY). *Wielomian stopnia $n > 0$ o współczynnikach zespolonych ma n pierwiastków (liczonych z krotnościami).*

DOWÓD: Załóżmy, że wielomiam $W(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ nie ma pierwiastków. Wtedy funkcja

$$f(z) = \frac{1}{W(z)}$$

jest całkowita i ograniczona. Z twierdzenia Liouville'a wynika, że jest to funkcja stała, co jest sprzeczne z założeniem $n > 0$. Istnieje więc punkt z_0 taki, że $W(z_0) = 0$. Dzieląc W przez $z - z_0$ dostajemy wielomian stopnia $n - 1$, do którego znów stosujemy powyższą procedurę. ■

18.4. Przykłady funkcji holomorficzych. Funkcje wieloznaczne.

Najprostszym przykładem funkcji całkowitej jest funkcja wielomianowa zmiennej zespolonej. Jej odwrotność jest funkcją holomorficzną poza zerami wielomianu. Na przykład funkcja $\frac{1}{z}$ nie jest funkcją całkowitą. Jest holomorficzną poza zerem. Znana z pierwszego semestru funkcja wykładnicza

$$e^z = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

jest całkowitą funkcją holomorficzną. Podobnie funkcje trygonometryczne i hiperboliczne.

Przedłużenie analityczne. Funkcje wieloznaczne. Przypuśćmy, że mamy funkcję f_0 zdefiniowaną w otoczeniu punktu z_0 szeregiem potęgowym o promieniu

zbieżności r_0 . Weźmy teraz punkt $K(z_0; r_0) \ni z_1 \neq z_0$ i szereg Taylora funkcji f_0 w punkcie z_1 . Przez r_1 oznaczmy promień zbieżności tego szeregu. Mamy więc funkcję f_1 określoną na sumie $K(z_0; r_0) \cup K(z_1; r_1)$. Może się zdarzyć, że suma ta jest większa od koła $K(z_0; r_0)$. Mówimy wówczas, że f_1 jest *rozszerzeniem analitycznym* funkcji f_0 . Weźmy teraz z_2, z_3, \dots itd. Jest sens pytać o maksymalne rozszerzenie analityczne.

W procedurze opisanej powyżej może się jednak zdarzyć, że koła zbieżności $K(z_0; r_0)$ i $K(z_n; r_n)$ mają niepuste przecięcie, a funkcje f_0 i f_n różnią się na nim.

Przykład. Niech f_0 będzie zadane szeregiem

$$f_0(z) = 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(z-1)^2 + \dots + \left(\frac{1}{k}\right)(z-1)^k + \dots$$

gdzie

$$\binom{q}{k} = \frac{q(q-1) \cdots (q-k+1)}{k!}.$$

Promień zbieżności tego szeregu $r_0 = 1$. Łatwo rozpoznać, że $(f_0(z))^2 = z$. Przedłużając analitycznie wzdłuż okręgu jednostkowego dojdziemy znów do punktu 1, ale wartość przedłużenia będzie równa -1 .

Są trzy możliwe rozwiązania:

- (1) Przerwać proces przedłużania. W opisanym przypadku, na przykład przez wycięcie krzywej łączącej zero z nieskończonością. Na ogół wybiera się półprostą $[0, \infty[$ lub $] -\infty, 0]$.
- (2) Rozpatrywać funkcje wieloznaczne.
- (3) Przenieść funkcję na powierzchnię (rozmaitość) tak, żeby stała się jednoznaczna. Powierzchnie te nazywane są powierzchniami Riemanna.

18.4.1. Logarytm. Zajmijmy się bliżej, jako przykładem funkcji wieloznacznej, funkcją logarymiczną. Zdefiniujemy ją, przez analogię z przypadkiem rzeczywistym, wzorem

$$\log z = \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

gdzie Γ jest łukiem łączącym 1 z z . Wartość funkcji logarytm oczywiście zależy od łuku. Na przykład okrąg S^1 , zorientowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara łączy 1 ze sobą, a

$$\int_{S^1} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i.$$

Wielokrotnie obchodząc zero dostajemy możliwe wartości logarytmu:

$$\log 1 = 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

i ogólnie, całkując najpierw po odcinku osi rzeczywistej od 1 do $|z|$, a następnie po okręgu o promieniu $|z|$, dostajemy

$$\log z = \log |z| + i \arg z.$$

Ujednoznacznienie logarytm możemy wycinając z płaszczyzny zespolonej łuk łączący zero z nieskończonością. Standardem jest wycięcie półprostej $] - \infty, 0]$ i przyjęcie $\arg z = \text{Arg } z \in] - \pi, \pi[$. Taki logarytm nazywamy gałęzią główną logarytmu.

Funkcja potęgowa. Łatwy rachunek pokazuje, że $\exp(\log(z)) = z$, czyli wynik nie zależy od wyboru gałęzi logarytmu. Funkcję z^a definiujemy podobnie jak w przypadku rzeczywistym

$$z \mapsto z^a = \exp(a \log(z)). \quad (18.9)$$

Dwie wartości logarytmu dają tę samą wartość z^a wtedy i tylko wtedy, gdy ich różnica $2k\pi i$ jest wielokrotnością $\frac{1}{a}2\pi i$, czyli gdy istnieje l takie, że $ka = l$. Jest to możliwe tylko w przypadku wymiernego a . Jeżeli $a = \frac{m}{n}$, gdzie m, n są względnie pierwsze, to dostajemy warunek

$$l = k \frac{m}{n}.$$

Wnioskujemy, że k musi być wielokrotnością n i że funkcja z^a ma w tym przypadku n gałęzi.

18.5. Funkcje holomorficzne w pierścieniu. Rozwinięcie Laurenta.

Szacowanie całki.

STWIERDZENIE 18.18. Niech Γ będzie zorientowanym łukiem i niech $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Zachodzi nierówność

$$\left| \int_{\Gamma} f dz \right| \leq |\Gamma| \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|,$$

gdzie $|\Gamma|$ jest całką po Γ z gęstości ds indukowanej kanoniczną metryką na \mathbb{R}^2 .

DOWÓD: Niech $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto z(t)$ będzie parametryzacją Γ . Mamy

$$\int_{\Gamma} f dz = \int_a^b f(z(t)) \gamma'(t) dt$$

i stąd

$$\left| \int_{\Gamma} f dz \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(z(t))| \int_{[a, b]} |\gamma'(t)|,$$

ale

$$\int_{[a, b]} |\gamma'(t)| = \int_{\Gamma} ds.$$

■

Rozwinięcie Laurenta.

DEFINICJA 18.19. *Pierścieniem (otwartym) o środku w punkcie $a \in \mathbb{C}$, promieniu wewnętrznym r i promieniu zewnętrznym R nazywamy zbiór*

$$\mathcal{R}(a; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}.$$

TWIERDZENIE 18.20 (LAURENTA). *Jeżeli funkcja f jest holomorficzną w pierścieniu $\mathcal{R}(a; r, R)$, to daje się przedstawić w postaci szeregu*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - a)^n, \quad (18.10)$$

przy czym

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad (18.11)$$

gdzie $r < \rho < R$, a szereg jest zbieżny niemal jednostajnie i bezwzględnie na $\mathcal{R}(a; r, R)$.

DOWÓD: Niech $r < r' < r'' < R'' < R' < R$. Do pierścienia domkniętego $\overline{\mathcal{R}(a; r', R')}$ stosujemy wzór Cauchy'ego

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{R}(a; r', R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

gdzie $z \in \mathcal{R}(a; r', R')$. Brzeg pierścienia składa się z dwóch okręgów przeciwnie zorientowanych. Zatem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \oint_{|\zeta - a| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{|\zeta - a| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right\}.$$

Ale

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| &< 1, \quad \text{gdy } |\zeta - a| = R', \\ \left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| &< 1, \quad \text{gdy } |\zeta - a| = r'. \end{aligned}$$

Zatem w tych dwóch przypadkach mamy

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)(1 - (z - a)/(\zeta - a))} = \sum_0^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - a)(1 - (\zeta - a)/(z - a))} = - \sum_0^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}}.$$

Szacujemy dla $r'' \leq |z| \leq R''$:

$$\left| f(\zeta) \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leq M(a, R') \frac{R''^n}{R'^{n+1}}$$

$$\left| f(\zeta) \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}} \right| \leq M(a, r') \frac{r''^n}{r'^{n+1}}.$$

Wynika z tych szacowań, że w obu całkach można wyjść ze znakiem sumy przed znak całki i że otrzymane szeregi są zbieżne jednostajnie na $\mathcal{R}(a; r'', R'')$. Ponieważ każdy zbiór zwarty w $\mathcal{R}(a; r, R)$ zawarty jest w pewnym pierścieniu domkniętym, zawartym w $\mathcal{R}(a; r, R)$, to szeregi te są zbieżne niemal jednostajnie. Mamy zatem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_0^{\infty} (z - a)^n \oint_{|\zeta - a| = R'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta - \sum_0^{\infty} \frac{1}{(z - a)^{n+1}} \oint_{|\zeta - a| = r'} f(\zeta) (\zeta - a)^n d\zeta \right\}.$$

Ponieważ

$$\oint_{|\zeta - a| = R'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \oint_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

$$\oint_{|\zeta - a| = r'} f(\zeta) (\zeta - a)^n d\zeta = \oint_{|\zeta - a| = \rho} f(\zeta) (\zeta - a)^n d\zeta$$

więc, po odpowiednim przenumowaniu wyrazów w drugim szeregu, otrzymujemy tezę. ■

Rozwinięcie, o którym mówi twierdzenie, nazywa się *rozwinięciem Laurenta*. Od razu, jak i dla szeregu Taylora, dostajemy szacowanie

STWIERDZENIE 18.21. *Współczynniki w rozwinięciu Laurenta mają oszacowanie*

$$|a_n| \rho^n \leq M(a, \rho)$$

dla $r < \rho < R$.

DOWÓD: Na mocy Stwierdzenia 18.18

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right| \leq M(a, \rho) \rho^{-n}.$$

■

Zwróćmy uwagę na szczególną rolę współczynnika a_{-1} :

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta) d\zeta,$$

czyli współczynnik ten daje wartość całki z funkcji f po okręgu $|\zeta - a| = \rho$.

W przypadku rozwinięcia funkcji holomorficzej w szereg potęgowy w kole mieliśmy jego jednoznaczność: współczynniki rozwinięcia w szereg musiały być pochodnymi funkcji rozwijanej w szereg. Podobną jednoznaczność mamy dla rozwinięcia Laurenta.

TWIERDZENIE 18.22. Niech funkcja f będzie zdefiniowana w pierścieniu $\mathcal{R}(a; r, R)$ jako suma szeregu

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k (z-a)^k. \quad (18.12)$$

Wtedy funkcja f jest holomorficzna w tym pierścieniu i

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta,$$

gdzie $r < \rho < R$.

DOWÓD: Jak wiadomo szereg potęgowy jest zbieżny niemal jednostajnie. Analogiczne argumenty pokazują, że szereg Laurenta jest zbieżny niemal jednostajnie (wraz z pochodnymi) w pierścieniu zbieżności. Wynika stąd, że pochodna sumy szeregu jest sumą pochodnych. Funkcja f jest więc holomorficzna w pierścieniu $\mathcal{R}(a; r, R)$ jako suma szeregu funkcji holomorficzych i posiada zatem rozwinięcie Laurenta

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.$$

Ze względu na jednostajną zbieżność szeregu (18.12) możemy przejść z całką pod znak sumy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{b_k}{(\zeta-a)^{n+1-k}} d\zeta.$$

Ale

$$\oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{1}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = \int_0^{2\pi} i\rho^n e^{-in\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 2\pi i & n = 0 \end{cases},$$

więc

$$a_n = b_n.$$

■

Uwaga. Część szeregu Laurenta zawierająca ujemne potęgi $z - a$:

$$\sum_{-\infty}^{-1} b_k (z - a)^k$$

nazywamy *częścią główną rozwinięcia*.

18.6. Izolowane punkty osobliwe.

Załóżmy, że funkcja f jest holomorphyzna w pierścieniu $\mathcal{R}(a; 0, R)$, a w punkcie a nie jest określona. Mówimy, że a jest *izolowanym punktem osobliwym* funkcji f . Niech

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n (z - a)^n$$

będzie rozwinięciem Laurenta w pierścieniu $\mathcal{R}(a; 0, R)$. Mogą zachodzić trzy przypadki:

- (1) $b_n = 0$ dla $n < 0$. Kładąc $f(a) = b_0$ dostajemy funkcję holomorphyzną w kole $K(a; R)$. Punkt a nazywamy w tym przypadku *regularnym*, a osobliwość *usuwalną*.
- (2) Istnieje $N < 0$ takie, że $b_n = 0$ dla $n < N$ i $b_N \neq 0$. Punkt a nazywamy *biegunem rzędu N* funkcji f .
- (3) Część główna rozwinięcia zawiera nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera. Mówimy, że punkt a jest *istotnie osobliwy*.

Przykłady:

- (1) Funkcja

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

ma izolowany punkt osobliwy w zerze. Rozwinięcie Laurenta wygląda tak:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Zero jest punktem regularnym. Kładąc $f(0) = 1$ dostajemy całkowitą funkcję holomorphyzną.

- (2) Funkcja $f(z) = \frac{1}{z^k}$ ma w zerze biegun rzędu k .
- (3) Funkcja $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ ma rozwinięcie w otoczeniu zera

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k},$$

więc zero jest punktem istotnie osobliwym.

- (4) Funkcja

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

ma w punktach $a_k = \frac{1}{\pi k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ bieguny rzędu pierwszego, a więc zero jest punktem osobliwym, który nie jest izolowany.

18.7. Residuum izolowanego punktu osobliwego.

Jak już zauważyliśmy wcześniej, szczególną rolę w rozwinięciu Laurenta odgrywa współczynnik b_{-1} :

$$b_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta) d\zeta.$$

Równość ta stanowi punkt wyjścia do metody liczenia całek: zamiast liczyć całkę po prawej stronie, możemy szukać odpowiedniego współczynnika w rozwinięciu Laurenta. Usprawiedliwia to specjalną nazwę dla tego współczynnika

DEFINICJA 18.23. Jeżeli a jest izolowanym punktem osobliwym funkcji holomorficznej f , to współczynnik b_{-1} rozwinięcia Laurenta w otoczeniu a nazywamy *residuum* funkcji f w punkcie a i oznaczamy $\text{Res}_a f$.

Zajmiemy się teraz sposobem wyznaczania residuum. Zaczniemy od oczywistego, wynikającego z rozwinięcia Taylora, stwierdzenia.

STWIERDZENIE 18.24. Jeżeli funkcja f ma w a zero rzędu k , to funkcja ta daje się przedstawić w postaci

$$f(z) = (z - a)^k g(z)$$

gdzie g jest funkcją holomorficzną i $g(a) \neq 0$.

DOWÓD: W otoczeniu punktu a mamy rozwinięcie Taylora z $b_k \neq 0$

$$f(z) = \sum_k b_n (z - a)^n = (z - a)^k \sum_0^{\infty} b_{n+k} (z - a)^n.$$

Oba występujące w tej równości szeregi mają ten sam promień zbieżności, zatem w pewnym otoczeniu a można przyjąć

$$g(z) = \sum_0^{\infty} b_{n+k}(z-a)^n.$$

Oczywiście $g(a) = b_k \neq 0$. Poza tym otoczeniem $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^k}$. ■

Podobnie, korzystając z rozwinięcia Laurenta, mamy dla biegunów:

STWIERDZENIE 18.25. *Jeżeli funkcja f ma w a biegun rzędu k , to f daje się przedstawić w postaci*

$$f(z) = (z-a)^{-k}g(z)$$

gdzie g jest funkcją holomorficzną i $g(a) \neq 0$.

Wnioski.

- (1) Punkt a jest biegunem rzędu k , jeżeli $g(z) = (z-a)^k f(z)$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu a , a jest jej punktem regularnym i $\lim_{z \rightarrow a} g(z) \neq 0$.
- (2) Punkt a jest biegunem rzędu k funkcji f wtedy i tylko wtedy, kiedy jest on zerem rzędu k funkcji $\frac{1}{f}$.

Możemy teraz udowodnić wzór na residuum w biegunie.

STWIERDZENIE 18.26. *Jeżeli a jest biegunem rzędu k funkcji f , to*

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)]. \quad (18.13)$$

DOWÓD: Z poprzednich stwierdzeń funkcja $g(z) = (z-a)^k f(z)$, $z \neq a$, jest holomorficzna w otoczeniu a i regularna w a . Możemy ją rozszerzyć do funkcji holomorficznej w kole kładąc $g(a) = b_{-k}$. Funkcja g ma rozwinięcie Taylora

$$g(z) = b_{-k} + b_{-k+1}(z-a) + \cdots + b_{-1}(z-a)^{k-1} + b_0(z-a)^k + \cdots,$$

gdzie b_i są współczynnikami rozwinięcia Laurenta funkcji f . Z jednoznaczności rozwinięcia Taylora mamy

$$b_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} g(a).$$

Z ciągłości pochodnej dostajemy tezę. ■

Szczególnie prostą postać ma wzór na residuum dla biegunów pierwszego rzędu:

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z). \quad (18.14)$$

Z tych wszystkich faktów widać, że ważna jest umiejętność rozpoznawania biegunów i ich rzędów. Bardzo pouczające są poniższe charakterystyki punktów osobliwych.

STWIERDZENIE 18.27. *Punkt a jest punktem regularnym funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.*

DOWÓD: Połóżmy $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$. Wystarczy teraz pokazać, że tak rozszerzona funkcja f jest holomorficzną. Z istnienia granicy wynika, że w otoczeniu a funkcja f jest ograniczona. Niech $|f(z)| < M$ dla $z \in K(a; r)$. Z oszacowania współczynników rozwinięcia Laurenta mamy $|b_{-n}| \rho^{-n} \leq M(a, \rho) \leq M$. Przechodząc z ρ do zera dostajemy $b_{-n} = 0$, zatem szereg Laurenta nie posiada części głównej. Funkcja f jest holomorficzną. ■

STWIERDZENIE 18.28. *Punkt a jest biegunem funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$. (Mówimy też, że $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.)*

DOWÓD: Jeżeli a jest biegunem rzędu k , to $f(z) = (z - a)^{-k} g(z)$, gdzie g jest holomorficzną i $g(a) \neq 0$.

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = |g(a)| \lim_{z \rightarrow a} |(z - a)|^{-k} = \infty.$$

Niech teraz $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Zatem w otoczeniu a nie ma zer i, w konsekwencji, funkcja $g = \frac{1}{f}$ jest w tym otoczeniu holomorficzną. Ponieważ ma ona w a granicę zero, a jest dla niej punktem regularnym. Zatem g rozszerzona o $g(a) = 0$ jest funkcją holomorficzną z zerem rzędu skończonego w a . Z wniosku ze Stwierdzenia 18.24 wynika, że jej odwrotność (więc f) ma biegun tego samego rzędu. ■

STWIERDZENIE 18.29. *Punkt a jest punktem istotnie osobliwym funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje granica $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ (skończona lub nieskończona).*

DOWÓD: Stwierdzenie jest natychmiastowym wnioskiem z dwóch poprzednich. ■

Okazuje się, że w tym przypadku możemy powiedzieć znacznie więcej.

STWIERDZENIE 18.30 (WEIERSTRASS- CASORATI). *Niech $f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}(a; 0, R))$ i niech a będzie punktem istotnie osobliwym. Dla każdej liczby zespolonej c (również nieskończoności) istnieje ciąg $a_n \rightarrow a$ taki, że $f(a_n) \rightarrow c$.*

DOWÓD: Przypuśćmy, że istnieje $c \in \mathbb{C}$ odizolowane od wartości f na otoczeniu a . Oznacza to, że $z \rightarrow f(z) - c$ jest funkcją holomorficzną, oddzieloną od zera w otoczeniu a . Zatem funkcja $g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$ też jest tam holomorficzną i ograniczoną.

Analogicznie jak w dowodzie Stwierdzenia 18.28 pokazujemy, że współczynniki części głównej rozwinięcia Laurenta g są równe zeru. Zatem istnieje potęga $m \geq 0$ taka, że $g(z) = (z - a)^m h(z)$, gdzie funkcja h jest holomorficzną, nie znikającą w a . Stąd

$$f(z) = c + (z - a)^{-m} \frac{1}{h(z)}.$$

Ale $\frac{1}{h}$ jest holomorficzną w otoczeniu a (łącznie z a), czyli f jest regularna w a (przypadek $m = 0$) lub ma tam biegun rzędu m (przypadek $m > 0$).

Jeżeli z kolei wartości f wokół a są oddzielone od nieskończoności, to f jest w otoczeniu a ograniczona. Tak jak poprzednio pokazuje się, że część główna szeregu Laurenta funkcji f znika, czyli punkt a jest regularny. ■

18.8. Obliczanie całek metodą residuów.

Zajmiemy się teraz praktycznym wykorzystaniem dotychczasowych wyników do obliczania całek.

Twierdzenie 18.31 (o residuach). Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym, a $\Omega \supset P = \cup_{k=1}^n \{a_k\}$ skończonym zbiorem punktów. Niech kontur Γ będzie zorientowanym kanonicznie brzegiem obszaru zwartej $D \subset \Omega$ ($\Gamma = \partial D$) i niech $\Gamma \cap P = \emptyset$. Wtedy dla każdej funkcji $f \in \mathcal{A}(\Omega \setminus P)$ zachodzi wzór

$$\int_{\Gamma} f dz = 2\pi i \sum_{a_k \in D} \text{Res}_{a_k} f.$$

Dowód: Przyjmijmy, że $P \cap D = \{a_1, \dots, a_m\}$. Ponieważ $\partial D \cap P = \emptyset$, to istnieją dodatnie liczby rzeczywiste r_1, \dots, r_m takie, że $K(a_i; r_i) \cap \Gamma = \emptyset$. Ponadto możemy żądać, by $K(a_i; r_i) \cap K(a_j; r_j) = \emptyset$ dla $i \neq j$. Do obszaru $V = D \setminus \cup_{i=1}^m K(a_i; r_i)$ stosujemy twierdzenie Cauchy'ego i dostajemy

$$0 = \int_{\partial V} f dz = \int_{\partial D} f dz - \sum_{i=1}^m \oint_{|z-a_i|=r_i} f dz$$

(znak minus wynika z orientacji). Zatem

$$\int_{\partial D} f dz = \sum_{i=1}^m \oint_{|z-a_i|=r_i} f dz.$$

Z definicji residuum

$$\oint_{|z-a_i|=r_i} f dz = 2\pi i \text{Res}_{a_i},$$

więc

$$\int_{\Gamma} f dz = 2\pi i \sum_{a_k \in D} \text{Res}_{a_k} f. \quad \blacksquare$$

Zwróćmy tu uwagę, że szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest wzór całkowy Cauchy'ego (Twierdzenie 18.9). W wielu sytuacjach pożyteczny jest

LEMAT 18.32. Niech funkcja f ma w a biegun pierwszego rzędu. Wówczas całka z f po zorientowanym kanonicznie (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) kawałku okręgu o środku w a , promieniu ε i zawartego w sektorze o wymiarze kątowym A dąży, przy $\varepsilon \rightarrow 0$, do $Ai \operatorname{Res}_a f$.

DOWÓD: Oznaczmy przez L_ε zorientowany kanonicznie kawałek okręgu zawarty w danym sektorze. Niech w parametryzacji $z \mapsto a + \varepsilon e^{i\varphi}$ sektor ten będzie zawarty między kątami α i β . Mamy

$$\int_{L_\varepsilon} f dz = \int_\alpha^\beta i\varepsilon e^{i\varphi} f(a + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Ponieważ f ma w a biegun pierwszego rzędu, to

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{i\varphi} f(a + \varepsilon e^{i\varphi})$$

i zbieżność ta jest jednostajna ze względu na φ . Stąd

$$\int_{L_\varepsilon} f dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} i(\beta - \alpha) \operatorname{Res}_a f.$$

■

18.8.1. Typowe całki.

Całki typu $J = \int_0^{2\pi} Q(\sin x, \cos x) dx$, gdzie Q jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, ciągłą na okręgu jednostkowym.

Podstawiamy $z = \exp(ix)$ i dostajemy

$$\sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad \cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad dx = \frac{1}{iz} dz.$$

Całkowanie po odcinku $[0, 2\pi]$ przechodzi na całkę po okręgu jednostkowym:

$$J = \oint_{|z|=1} \frac{1}{zi} Q \left(\frac{z - 1/z}{2i}, \frac{z + 1/z}{2} \right) dz$$

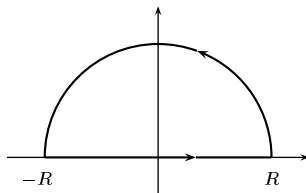
a stąd

$$J = 2\pi i \sum_{|z|<1} \operatorname{Res}_z \frac{1}{zi} Q \left(\frac{z - 1/z}{2i}, \frac{z + 1/z}{2} \right)$$

Całki typu $J = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx$, gdzie Q jest funkcją wymierną oraz

- (1) Q nie ma biegunów na osi rzeczywistej,
- (2) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zQ(z) = 0$.

Całkujemy funkcję $z \mapsto Q(z)$ po konturze Γ jak na rysunku,



przy czym R jest tak duże, by bieguny funkcji Q z górnej półpłaszczyzny (jest ich skończona liczba, bo funkcja Q jest wymierna) znalazły się wewnątrz półokręgu.

Dostajemy

$$\oint_{\Gamma} Q dz = \int_{-R}^R Q(x) dx + \int_{C_R} Q(z) dz$$

gdzie C_R jest górnym półokręgiem. Z twierdzenia o residuach

$$\oint_{\Gamma} Q dz = 2\pi i \sum_{\text{im } z > 0} \text{Res}_z Q,$$

a ponieważ

$$\left| \int_{C_R} Q dz \right| \leq M(Q; 0, R) \pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

to w granicy $R \rightarrow \infty$ dostajemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q dx = 2\pi i \sum_{\text{im } z > 0} \text{Res}_z Q.$$

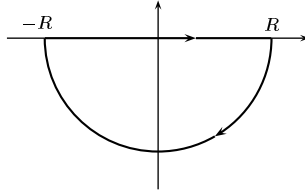
Uwagi:

- (1) Całkowanie po górnym półokręgu można zastąpić całkowaniem po dolnym półokręgu.
- (2) Metodę powyższą można zastosować do obliczenia całki z wielomianu parzystego ($Q(x) = Q(-x)$) w granicach od 0 do ∞ .

Całki typu $J = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) \exp(iax) dx$, gdzie Q jest funkcją wymierną oraz

- (1) $a \neq 0$,
- (2) Q nie ma biegunów na osi rzeczywistej,
- (3) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} Q(z) = 0$

Kontur całkowania dobieramy w zależności od znaku a . Jeżeli $a > 0$, to kontur całkowania jest jak w poprzednim przykładzie. Jeżeli $a < 0$, to kontur całkowania jest jak na rysunku



Podstawą do obliczenia powyższej całki jest

LEMAT 18.33 (JORDANA). Niech f będzie funkcją ciągłą, określoną w górnej (dolnej) półpłaszczyźnie. Jeżeli $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, to

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0$$

gdzie C_R jest górnym półokręgiem o promieniu R jeżeli $a > 0$ lub dolnym, jeżeli $a < 0$.

DOWÓD: Dla ustalenia uwagi zajmijmy się przypadkiem $a > 0$. Niech $z = Re^{i\varphi}$, wówczas

$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \sup_{0 \leq \varphi \leq \pi} |f(Re^{i\varphi})| \int_0^\pi Re^{-aR \sin(\varphi)} d\varphi.$$

Z wypukłości funkcji sinus w przedziale $[0, \pi]$ mamy $2\varphi/\pi \leq \sin(\varphi)$ dla $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, więc

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Re^{-aR \sin(\varphi)} d\varphi &= 2 \int_0^{\pi/2} Re^{-aR \sin(\varphi)} d\varphi \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} Re^{-aR \frac{2\varphi}{\pi}} d\varphi = \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR}) \leq \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

Z założenia o funkcji f dostajemy

$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{a} \sup_{0 \leq \varphi \leq \pi} |f(e^{i\varphi})| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

■

Korzystając z lematu Jordana mamy dla $a > 0$

$$\oint_{\Gamma} Q(z)e^{iaz} dz = \int_{-R}^R Q(x)e^{iax} dx + \int_{C_R} Q(z)e^{iaz} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x)e^{iax} dx.$$

Stąd

$$J = 2\pi i \sum_{\operatorname{im} z > 0} \operatorname{Res}_z(e^{iaz} Q(z)).$$

W przypadku $a < 0$ dostaniemy

$$J = -2\pi i \sum_{\operatorname{im} z < 0} \operatorname{Res}_z(e^{iaz} Q(z)).$$

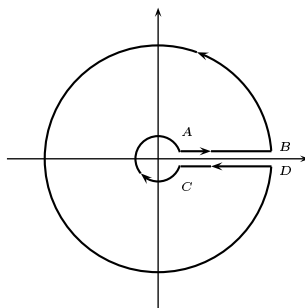
Całki typu $J = \int_0^{\infty} x^{a-1} Q(x) dx$, gdzie Q jest funkcją wymierną oraz

- (1) a jest liczbą rzeczywistą, $a \neq 0, \mp 1, \mp 2, \dots$,
- (2) Q nie ma biegunów na dodatniej półosi rzeczywistej,
- (3) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^a Q(z) = 0$,
- (4) $\lim_{z \rightarrow 0} z^a Q(z) = 0$.

Funkcja $z \rightarrow z^b$ jest zdefiniowana przez

$$z^b = e^{b \log z}.$$

Ponieważ logarytm jest funkcją niejednoznaczna, więc z^b też na ogół jest niejednoznaczna. Ujednoznacznic ją możemy wycinając (na przykład) półoś rzeczywistą i wybierając w pierwszej ćwiartce gałąź główną logarytmu. Funkcja $z^{a-1} Q(z)$ jest więc jednoznaczna wewnątrz konturu



Przyjmijmy, że punkty A, B, C, D leżą na osi rzeczywistej. Mamy zatem na odcinku AB

$$x^b = e^{b \log x}$$

a na odcinku DC

$$x^b = e^{b \log x + b2\pi i}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} z^{a-1} Q(z) dz &= \\ &= \int_{\varepsilon}^R x^{a-1} Q(x) dx + \oint_{S_R} z^{a-1} Q(z) dz - \int_{\varepsilon}^R x^{a-1} e^{(a-1)2\pi i} Q(x) dx + \oint_{S_{\varepsilon}} z^{a-1} Q(z) dz. \end{aligned}$$

Z założeń (3) i (4) wynika, że całki po okręgach dążą do zera przy $\varepsilon \rightarrow 0$ i $R \rightarrow \infty$ i w granicy dostajemy

$$(1 - e^{2\pi(a-1)i})J = 2\pi i \sum_z \operatorname{Res}_z(z^{a-1}Q).$$

Przy spełnionym warunku (1) możemy z tej równości obliczyć J .

Całki typu $J = \int_0^{\infty} Q(x) dx$, gdzie Q jest funkcją wymierną oraz

- (1) Q nie ma biegunów na dodatniej półosi rzeczywistej,
- (2) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zQ(z) = 0$,

Bierzemy kontur jak w poprzednim punkcie i całkujemy funkcję

$$z \rightarrow Q(z) \log z.$$

Z definicji logarytmu dostajemy natychmiast, że

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \log z = 0,$$

i w konsekwencji całka po małym okręgu znika w granicy $\varepsilon \rightarrow 0$. Warunek (2) oznacza, że w funkcji $Q(z) = \frac{W(z)}{V(z)}$ stopień wielomianu W jest mniejszy o co najmniej 2 od stopnia wielomianu V . Wynika stąd, że

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \log z Q(z) = 0,$$

zatem całka po dużym okręgu znika w granicy $R \rightarrow \infty$. Otrzymujemy więc

$$\int_0^{\infty} \log x Q(x) dx - \int_0^{\infty} (\log x + 2\pi i) Q(x) dx = 2\pi i \sum_z \operatorname{Res}_z(\log z Q(z))$$

i stąd

$$\int_0^{\infty} Q(x) dx = - \sum_z \operatorname{Res}_z(Q(z) \log z).$$

Całki typu $J = \int_0^\infty \log x Q(x) dx$, $J = \int_0^\infty Q(x) dx$, gdzie Q jest funkcją wymierną oraz

- (1) Q nie ma biegunów na dodatniej półosi rzeczywistej,
- (2) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zQ(z) = 0$,
- (3) $Q(x)$ jest rzeczywiste dla x rzeczywistych.

Bierzemy kontur jak w dwóch poprzednich przykładach i całkujemy funkcję

$$z \rightarrow Q(z)(\log z)^2.$$

Z definicji logarytmu

$$\lim_{z \rightarrow 0} z(\log z)^2 = 0,$$

i w konsekwencji całka po małym okręgu znika w granicy $\varepsilon \rightarrow 0$. Jak w poprzednim przykładzie zauważamy, że stopień wielomianu W jest mniejszy o co najmniej 2 od stopnia wielomianu V . Wynika stąd, że

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z(\log z)^2 Q(z) = 0,$$

i w konsekwencji całka po dużym okręgu znika w granicy $R \rightarrow \infty$. Otrzymujemy zatem

$$\int_0^\infty (\log x)^2 Q(x) dx - \int_0^\infty (\log x + 2\pi i)^2 Q(x) dx = 2\pi i \sum_z \operatorname{Res}_z (\log z)^2 Q(z).$$

Ostatecznie, porównując części urojone obu stron, dostajemy

$$\int_0^\infty \log x Q(x) dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_z \operatorname{Res}_z (Q(z)(\log z)^2).$$

Porównując części rzeczywiste dostajemy nowy wzór na całkę $\int_0^\infty Q(x) dx$

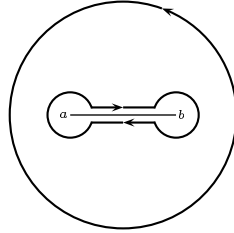
$$\int_0^\infty Q(x) dx = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_z \operatorname{Res}_z (Q(z)(\log z)^2).$$

Pamiętać tu należy o założeniu rzeczywistości funkcji Q .

Całki typu $J = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q Q(x) dx$, gdzie liczby p, q i funkcja wymierna Q spełniają następujące warunki:

- (1) $p+q$ jest liczbą całkowitą,
- (2) $a, b \in \mathbb{R}$,
- (3) Q nie ma biegunów na odcinku $[a, b]$.

Rozważamy całkę z funkcji $(z-a)^p(b-z)^qQ(z)$ po konturze Γ jak na rysunku



Pokażemy najpierw, że wewnątrz konturu funkcja $(z-a)^p(b-z)^q$ jest jednoznaczną funkcją holomorficzną. W tym celu rozpatrzmy odwzorowanie

$$z \mapsto h(z) = \frac{z-a}{b-z}. \quad (18.15)$$

h przekształca w sposób wzajemnie jednoznaczny płaszczyznę $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ w $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Odwzorowanie odwrotne jest, jak łatwo sprawdzić, zadane wzorem

$$z \mapsto h^{-1}(z) = \frac{bz+a}{z+1}. \quad (18.16)$$

Ponadto odcinek $[a, b[$ jest przekształcany na półprostą rzeczywistą $[0, \infty[$.

Przekształćmy teraz funkcję (wieloznaczną)

$$(z-a)^p(b-z)^q = \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^p (b-z)^{p+q} = (h(z))^p (b-z)^{p+q},$$

ale $p+q$ jest liczbą całkowitą, więc $(b-z)^{p+q}$ jest funkcją jednoznaczną. Wystarczy teraz pokazać, że h^p jest funkcją jednoznaczną w rozważanym obszarze.

Wycięcie z \mathbb{C} odcinka $[a, b[$ odpowiada wycięciu półprostej $[0, \infty[$ w zbiorze wartości funkcji h , a wiadomo, że na zbiorze $\mathbb{C} \setminus [0, \infty[$ funkcja logarytm może być określona jednoznacznie. Wybierzmy gałąź główną logarytmu. Jednoznaczność logarytmu oznacza jednoznaczność funkcji potęgowych, zatem na $\mathbb{C} \setminus [a, b[$ funkcja $\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^p$ jest, przez wybór logarytmu, określona jednoznacznie. W konsekwencji, funkcja $(z-a)^p(b-z)^qQ(z)$ jest określona jednoznacznie i ma w $\mathbb{C} \setminus [a, b[$ tylko bieguny i punkty regularne. Do konturu Γ możemy zastosować teraz twierdzenie o residuach i w ten sposób obliczyć całkę

$$\int_{\Gamma} (z-a)^p (b-z)^q Q(z) dz.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa dąży do zera przy $z \rightarrow a, b$, to całki po małych okręgach dążą do zera, przy promieniu dążącym do zera. Całka po górnej „kładce” dąży do J , a całka po dolnej kładce dąży do (uwaga na logarytm!) $-e^{2p\pi i} J$. Ze znajomości całki po dużym okręgu wynika więc znajomość całki J . Całkę po dużym okręgu możemy szacować (jak poprzednio), o ile podejrzewamy, że jest równa zero. Można też liczyć ją znajdując residuum w nieskończoności funkcji podcałkowej, ale o tym za chwilę.

18.9. Residuum w ∞ . Sfera Riemanna.

Spróbujmy dołączyć do naszych rozważań punkt w nieskończoności p_{∞} . Niech $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup p_{\infty}$. Bazą otoczeń punktu p_{∞} są zbiory $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{K(0; R)}$. Z tak określoną topologią zbiór $\overline{\mathbb{C}} \cup \{p_{\infty}\}$ jest homeomorficzny sferze dwuwymiarowej S^2 . Dlatego zbiór ten nazywamy *sferą Riemanna*. Wprowadźmy na sferze Riemanna dwa układy współrzędnych

$$\kappa_1: \overline{\mathbb{C}} \setminus \{p_{\infty}\} = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z$$

i

$$\kappa_2: \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}: z \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{dla } z \neq p_{\infty} \\ 0 & \text{dla } z = p_{\infty} \end{cases}.$$

Wspólną dziedziną obu układów współrzędnych jest $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $\kappa_1^{-1} \circ \kappa_2(z) = \frac{1}{z}$ jest funkcją holomorficzną, więc można mówić o funkcjach holomorficznym na sferze Riemanna oraz o odwzorowaniach holomorficznym sfery Riemanna w siebie (podobnie jak można mówić o odwzorowaniach różniczkowalnych między powierzchniami). W szczególności, jeżeli $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną, to jej ograniczenie do \mathbb{C} jest funkcją całkowitą i ograniczoną (f jest funkcją ciągłą na zbiorze zwartym $\overline{\mathbb{C}}$). Z Twierdzenia Liouville’a jest funkcją stałą. Jedynymi funkcjami holomorficznymi na sferze Riemanna są więc funkcje stałe. Podobnie, jeżeli funkcją $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ z izolowanymi punktami osobliwymi ma przedłużenie do funkcji holomorficznym $\tilde{f}: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, to punkty osobliwe funkcji f są biegunami.

Nieskończoność jest, z definicji, punktem osobliwym każdej funkcji holomorficznym (funkcja holomorficzna nie jest określona w nieskończoności). Przypuśćmy, że jest to izolowany punkt osobliwy. Klasyfikujemy jak w przypadku innych punktów osobliwych:

- (1) p_{∞} jest regularnym punktem osobliwym funkcji f jeżeli istnieje granica $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$,
- (2) p_{∞} jest biegunem, jeżeli $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$,
- (3) p_{∞} jest punktem istotnie osobliwym w pozostałych przypadkach.

Będziemy pisać zamiennie p_{∞} i ∞ .

DEFINICJA 18.34. *Residuum w ∞ funkcji f (jeżeli jest izolowanym punktem osobliwym) nazywamy całkę*

$$\operatorname{Res}_\infty = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f dz. \quad (18.17)$$

dla dostatecznie dużego R .

Zwróćmy uwagę na kierunek całkowania!

Dla uzyskania efektywnych wzorów dokonajmy transformacji $\varphi: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$:

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z = \infty \\ \frac{1}{z} & \text{dla } z \neq 0, \infty \\ \infty & \text{dla } z = 0 \end{cases}$$

i rozpatrzmy funkcję $g = f \circ \varphi$. Zero jest izolowanym punktem osobliwym funkcji g , ma zatem rozwinięcie Laurenta

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Stąd *rozwinięcie wokół nieskończoności* funkcji f

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}.$$

Mamy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1/R} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Dokonując zamiany zmiennych $z \rightarrow \frac{1}{z}$ dostajemy

$$a_n = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) \frac{z^{n+1}}{z^2} dz$$

(kierunek całkowania!) i ostatecznie,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) z^{n-1} dz.$$

Mamy stąd wzór na residuum w nieskończoności

$$\operatorname{Res}_\infty f = -a_1.$$

18.10. Funkcje meromorficzne.

Z poprzednich części wykładu widać szczególną rolę biegunów w teorii funkcji holomorficznych. Usprawiedliwia to wprowadzenia osobnego terminu dla funkcji, której jedynymi punktami osobliwymi są bieguny.

DEFINICJA 18.35. *Funkcją meromorficzną* w obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$ nazywamy funkcję, której jedynymi punktami osobliwymi w Ω są bieguny.

Zbiór funkcji meromorficznych w Ω oznaczamy $\mathcal{M}(\Omega)$.

Uwaga. Funkcję meromorficzną możemy traktować jako odwzorowanie (funkcję) holomorficzne o wartościach w sferze Riemanna.

STWIERDZENIE 18.36. *Zbiór $\mathcal{M}(\Omega)$ jest przestrzenią wektorową, a ponadto*

- (1) *Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$, to $f \cdot g \in \mathcal{M}(\Omega)$.*
- (2) *Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ i g nie jest funkcją zerową na składowych spójnych Ω , to $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(\Omega)$.*

Przykład: Funkcja wymierna jest funkcją meromorficzną na całym \mathbb{C} .

Ze stwierdzenia tego wynika, że zbiór $\mathcal{M}(\Omega)$ z działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem w przypadku spójnego Ω !

STWIERDZENIE 18.37. *Jeżeli $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, to $f' \in \mathcal{M}(\Omega)$. Jeżeli f ma w $a \in \Omega$ zero rzędu k , to f' ma tam zero rzędu $k - 1$. Jeżeli f ma w a biegun rzędu k , to f' ma w a biegun rzędu $k + 1$.*

DOWÓD: Jeżeli f ma w a zero rzędu k , to $f(z) = (z - a)^k g(z)$, gdzie g jest meromorficzna, regularna w a i $g(a) \neq 0$. stąd

$$f'(z) = (z - a)^{k-1} (kg(z) + (z - a)g'(z)).$$

Ponieważ $(kg(z) + (z - a)g'(z))|_{z=a} \neq 0$, więc f' ma w a zero rzędu $k - 1$.

Jeżeli f ma w a biegun rzędu k , to $f(z) = (z - a)^{-k} g(z)$, gdzie g jest jak poprzednio. Stąd

$$f'(z) = (z - a)^{-k-1} (-kg(z) + (z - a)g'(z)).$$

■

Z tego stwierdzenia wynika prosty wniosek.

Wniosek. Niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Jeżeli f ma w $a \in \Omega$ zero rzędu k , to f'/f ma tam biegun pierwszego rzędu z residuum k . Jeżeli f ma w a biegun rzędu k , to f'/f ma w a biegun rzędu pierwszego z residuum $-k$.

DOWÓD: Jeżeli dla pewnego całkowitego k mamy $f(z) = (z - a)^k g(z)$, gdzie g jest holomorficzna w otoczeniu a i $g(a) \neq 0$, to

$$\frac{f'}{f}(z) = k \frac{1}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Drugi składnik jest funkcją holomorficzną w otoczeniu a , więc pierwszy składnik stanowi część główną rozwinięcia Laurenta wokół a . Punkt ten jest zatem biegunem rzędu pierwszego dla $k \neq 0$ i $\text{Res}_a \frac{f'}{f} = k$.

■

Korzystając z twierdzenia o residuach dla funkcji f'/f dostajemy

Twierdzenie 18.38 (WZÓR NA LICZBĘ ZER I BIEGUNÓW). Niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ będzie różna od funkcji zerowej i niech Ω będzie obszarem spójnym. Jeżeli $D \subset \Omega$ jest zwartym obszarem z brzegiem takim, że ∂D nie zawiera zer ani biegunów funkcji f , to

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'}{f} dz = N_z - N_p,$$

gdzie N_z jest sumą krotności zer funkcji f leżących w D , a N_p sumą rzędów biegunów funkcji f leżących w D .

I jeszcze dwa wnioski ze wzoru na liczbę zer i biegunów.

Twierdzenie 18.39 (ROUCHÉ). Niech Ω i D będą jak w poprzednim twierdzeniu, a f, g niech będą funkcjami holomorficznymi na Ω takimi, że

- (1) $f(z) \neq 0$ dla $z \in \partial D$,
- (2) $|g(z)| < |f(z)|$ dla $z \in \partial D$.

Wtedy funkcja $f + g$ ma w D tyle zer (liczonych z krotnościami), ile ma ich funkcja f .

Dowód: Niech $0 \leq a \leq 1$. Rozważmy całkę z parametrem

$$N(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f' + ag'}{f + ag} dz.$$

Z (2) wynika, że całka ta jest dobrze określona. Z twierdzeń o całce z parametrem mamy, że funkcja N jest ciągła. Ale z twierdzenia o liczbie zer i biegunów przyjmuje one wartości całkowite, więc jest stała. Ponieważ funkcja $f + ag$ nie ma biegunów, więc $N(0)$ jest liczbą zer funkcji f , a $N(1)$ liczbą zer funkcji $f + g$. ■

Wniosek 18.40 (PODSTAWOWE TWIERDZENIE ALGEBRY). Wielomian n -tego stopnia

$$W(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

ma w \mathbb{C} n pierwiastków (z krotnościami).

Dowód: Niech

$$f(z) = a_n z^n, \quad g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Jeżeli weźmiemy dostatecznie duże R , to

$$|a_n z^n| > \left| \sum_0^{n-1} a_k z^k \right| \quad \text{dla } |z| = R.$$

Z twierdzenia Rouché wielomian $W = f + g$ ma w kole $K(0; R)$ tyle samo pierwiastków (liczonych z krotnościami) co f , więc n . ■

Rozdział 19. TEORIA DYSTRYBUCJI. TRANSFORMACJA FOURIERA

19.1. Przestrzeń funkcji próbnych.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwartym obszarem. Funkcjami próbnymi na Ω nazywać będziemy funkcje gładkie o wartościach zespolonych i o nośniku zwartym, zawartym w Ω . Przestrzeń wektorową takich funkcji oznaczamy $C_0^\infty(\Omega; \mathbb{C})$. Wprowadzimy teraz (zamiast topologii) pojęcie zbieżności funkcji próbnych.

DEFINICJA 19.1. Powiemy, że ciąg (φ_n) funkcji próbnych jest zbieżny do funkcji próbnej φ , jeżeli

- (1) istnieje zbiór zwarty $K \subset \Omega$ taki, że nośnik φ_n jest zawarty w K dla wszystkich n ,
- (2) funkcje φ_n oraz ich pochodne cząstkowe wszystkich rzędów są zbieżne jednostajnie do φ (i jej pochodnych).

Przestrzeń funkcji próbnych z tak określoną zbieżnością oznaczamy $\mathcal{D}(\Omega)$. W sposób oczywisty wprowadzamy pojęcie ciągu Cauchy'ego funkcji próbnych: wystarczy zamienić warunek (2) w definicji zbieżności na warunek, że pochodne cząstkowe tworzą ciągi Cauchy'ego w normie jednostajnej. Z zupełności przestrzeni funkcji różniczkowalnych na zbiorze zwartym względem metryki jednostajnej wynika, że każdy ciąg Cauchy'ego w $\mathcal{D}(\Omega)$ jest zbieżny.

Niech $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie wielowskaźnikiem, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jego długością nazywamy liczbę $|\alpha| = \sum \alpha_i$. Dla ustalonego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ i dla liczby $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ wprowadzimy półnormę $\|\cdot\|_{K,l}$ na przestrzeni funkcji gładkich

$$\|\varphi\|_{K,l} = \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_K |D^\alpha \varphi(x)|, \quad D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n} \quad (19.1)$$

Pojęcie zbieżności w $\mathcal{D}(\Omega)$ można sformułować tak: ciąg (φ_n) jest zbieżny do zera w $\mathcal{D}(\Omega)$, jeżeli dla pewnego zwartego $K \subset \Omega$ mamy $\text{supp } \varphi_n \subset K$ i dla każdego l

$$\|\varphi_n\|_{K,l} \rightarrow 0.$$

Ciąg jest zbieżny do φ , jeżeli ciąg $(\varphi_n - \varphi)$ jest zbieżny do zera.

Jeżeli mamy dwa obszary $\Omega' \subset \Omega$, to mamy też ciągłe włożenie

$$\mathcal{D}(\Omega') \subset \mathcal{D}(\Omega),$$

polegające na rozszerzeniu funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ zerem:

$$\varphi(x) = 0, \quad \text{dla } x \in \Omega \setminus \Omega'.$$

Uwaga: Istnienie funkcji gładkich o zwartym nośniku było omawiane przy okazji całkowania form (różniczkowalny rozkład jedności).

19.2. Dystrybucje. Podstawowe własności.

DEFINICJA 19.2. *Dystrybucją* na Ω nazywamy odwzorowanie \mathbb{C} -liniowe i ciągłe z $\mathcal{D}(\Omega)$ w liczbach zespolonych \mathbb{C} , tzn. dla ciągu funkcji próbnych φ_n , zbieżnego w przestrzeni $\mathcal{D}(\Omega)$ do zera, ciąg wartości jest też zbieżny do zera.

Dystrybucje tworzą przestrzeń wektorową oznaczaną $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Z definicji wynika, że dystrybucja jest wyznaczona jednoznacznie przez swoje wartości na funkcjach o wartościach rzeczywistych.

Przykłady:

- (1) Niech $a \in \Omega$. Odwzorowanie

$$\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \varphi(a) \in \mathbb{C}$$

jest dystrybucją oznaczaną δ_a (delta Diraca). Podobnie, dystrybucją jest odwzorowanie (dla ustalonego $e \in \mathbb{R}^n$)

$$\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \nabla_e \varphi(a) \in \mathbb{C}.$$

- (2) Niech n będzie gęstością skalarną na Ω . Odwzorowanie

$$\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_{\Omega} \varphi n$$

jest dystrybucją oznaczaną T_n .

- (3) W \mathbb{R}^n mamy kanoniczny iloczyn skalarny, więc i kanoniczną gęstość $n = d^n x$. Funkcja f , lokalnie całkowna na Ω , wyznacza dystrybucję

$$T_f = T_f n$$

Taką dystrybucję nazywamy *regularną*.

- (4) Zbiór mierzalny $D \subset \Omega$ też zadaje dystrybucję

$$\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_D \varphi,$$

oznaczaną T_D . Oczywiście jest, że $T_D = T_{\chi_D}$, gdzie χ_D jest funkcją charakterystyczną zbioru D .

Warunek ciągłości w definicji dystrybucji można sformułować tak:

STWIERDZENIE 19.3. Funkcjonał liniowy T na $\mathcal{D}(\Omega)$ jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zwartego $K \subset \Omega$ istnieje l i liczba $c(K)$ takie, że dla funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, spełniającej warunek $\text{supp } \varphi \subset K$ mamy

$$|T(\varphi)| \leq c(K) \|\varphi\|_{K,l}. \quad (19.2)$$

DOWÓD: Oczywiście, że warunek (19.2) jest wystarczający. Pokażemy jego konieczność. Przypuśćmy bowiem, że oszacowanie (19.2) nie zachodzi. Oznacza to, że, przy pewnym K , dla każdego k istnieje funkcja $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\text{supp } \varphi_k \subset K$ i taka, że $T(\varphi_k) = 1$ i $\|\varphi_k\|_{K,k} \leq \frac{1}{k}$. Z definicji półnorm widać, że $k \geq l$ implikuje $\|\varphi_k\|_{K,k} \geq \|\varphi_k\|_{K,l}$. Zatem dla $k \geq l$ mamy

$$\|\varphi_k\|_{K,l} \leq \|\varphi_k\|_{K,k} \leq \frac{1}{k}$$

i stąd

$$\|\varphi_k\|_{K,l} \rightarrow 0$$

dla każdego l . Ciąg φ_k jest zbieżny do zera w $\mathcal{D}(\Omega)$, więc funkcyjonał T nie jest ciągły. Sprzeczność. ■

Jeżeli l można wybrać wspólne dla wszystkich K , to mówimy, że dystrybucja jest rzędu skończonego. Najmniejsze takie l nazywamy *rzędem dystrybucji*. Dystrybucje rzędu zerowego nazywamy *miarami Radona*. Przykładem jest delta Diraca. Łatwo sprawdzić, że dystrybucja na \mathbb{R}

$$T(\varphi) = \sum_0^{\infty} \delta_k(D^k(\varphi)) = \sum_0^{\infty} D^k \varphi(k)$$

jest rzędu nieskończonego.

19.2.1. Własność lokalności dystrybucji.

DEFINICJA 19.4. Mówimy, że dystrybucja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ jest równa zeru na otwartym zbiorze $O \subset \Omega$, jeżeli $T(\varphi) = 0$ dla $\varphi \in \mathcal{D}(O) \subset \mathcal{D}(\Omega)$.

Jeżeli różnica dwóch dystrybucji jest równa zeru na O , to mówimy, że są one równe na O .

TWIERDZENIE 19.5 (ZASADA SKLEJANIA DYSTRYBUCJI). Niech $\Omega = \bigcup_{i \in I} O_i$ będzie pokryciem zbiorami otwartymi. Niech $(T_i \in \mathcal{D}'(O_i))$ będzie rodziną dystrybucji taką, że $T_i = T_j$ na $O_i \cap O_j$ dla każdej pary $i, j \in I$. Wówczas istnieje dokładnie jedna dystrybucja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ taka, że $T = T_i$ na O_i .

DOWÓD: Niech $(\psi_i)_{i \in I}$ będzie rozkładem jedności stowarzyszonym z pokryciem (O_i) . Zdefiniujemy T wzorem

$$T(\varphi) = \sum_i T_i(\psi_i \varphi).$$

Wzór ten określa odwzorowanie liniowe i ciągłe (na zbiorze zwartym suma staje się skończoną, a ze zbieżności (φ_n) wynika zbieżność $(\psi_i \varphi_n)$ na $\mathcal{D}(\Omega)$, więc dystrybucję. Jeżeli $\varphi \in \mathcal{D}(O_i)$, to $\psi_j \varphi \in \mathcal{D}(O_i \cap O_j)$ i stąd

$$T(\varphi) = \sum_j T_j(\psi_j \varphi) = \sum_j T_i(\psi_j \varphi) = T_i\left(\sum_j \psi_j \varphi\right) = T_i(\varphi).$$

Wykażemy teraz jednoznaczność: Jeżeli $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i dla każdego $i \in I$ oraz każdej funkcji próbnej $\varphi \in \mathcal{D}(O_i)$ mamy $T(\varphi) = 0$, to biorąc dowolne $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mamy

$$T(\varphi) = T\left(\sum_i \psi_i \varphi\right) = \sum_i T(\psi_i \varphi) = 0.$$

Wyjście z sumą przed znak dystrybucji było możliwe, bo nośnik φ jest zwarty i w konsekwencji tylko skończona liczba funkcji $\psi_i \varphi$ jest różna od zera (wynika to z lokalnej skończoności rozkładu jedności). ■

Twierdzenie powyższe mówi, że dystrybucja jest określona przez swoje lokalne zachowanie.

Możemy teraz zdefiniować *nośnik dystrybucji*.

DEFINICJA 19.6. Nośnikiem dystrybucji T nazywamy najmniejszy domknięty (w Ω) zbiór, poza którym T jest równe zeru. Nośnik oznaczamy \underline{T} lub $\text{supp } T$.

19.2.2. Dystrybucje o zwartym nośniku. Oczywiście, że zbiór dystrybucji o zwartym nośniku jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathcal{D}'(\Omega)$. Przestrzeń tą scharakteryzujemy w nieco odmienny sposób. Oznaczmy najpierw przez $\mathcal{E}(\Omega)$ przestrzeń $C^\infty(\Omega; \mathbb{C})$, ze zbieżnością niemal jednostajną funkcji wraz ze wszystkimi pochodnymi. Oczywiście $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ i włożenie jest ciągłe (tzn. ciąg funkcji próbnych, zbieżny w $\mathcal{D}(\Omega)$ jest również zbieżny w $\mathcal{E}(\Omega)$). Zatem funkcjonał liniowy i ciągły na $\mathcal{E}(\Omega)$, obcięty do $\mathcal{D}(\Omega)$, jest dystrybucją. Mamy więc odwzorowanie liniowe

$$\nu: \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Należy tu zwrócić uwagę na to, że mamy do czynienia z przestrzeniami wymiaru nieskończonego i intuicje wyniesione z kursu algebry mogą być zawodne. W szczególności, odwzorowanie dualne do iniekcji nie musi być surjekcją. Jeżeli obraz włożenia liniowego i ciągłego jest gęsty, to odwzorowanie dualne też jest włożeniem i jego obraz jest zbiorem gęstym. Tak jest w naszym przypadku, o czym w poniższym stwierdzeniu.

STWIERDZENIE 19.7. *Dystrybucja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ma zwarty nośnik wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcjonałem ciągłym na $\mathcal{E}(\Omega)$, tzn. $T = \nu(L)$ dla pewnego $L \in \mathcal{E}'(\Omega)$. L jest wyznaczony jednoznacznie (ν jest injekcją).*

DOWÓD: Niech T będzie dystrybucją o zwartym nośniku i niech $\underline{T} = K$. Z twierdzenia o różniczkowalnym rozkładzie jedności istnieje funkcja $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, równa jeden w pewnym otoczeniu K . Z definicji nośnika dystrybucji wynika, że $T(\varphi) = T(\psi\varphi)$ dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Określmy teraz funkcjonał L na $\mathcal{E}(\Omega)$ wzorem

$$L(\varphi) = T(\psi\varphi).$$

Oczywistym jest, że funkcjonał ten jest ciągły, nie zależy od wyboru ψ i obcięty do $\mathcal{D}(\Omega)$ jest dystrybucją T .

Z drugiej strony, niech $L \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Pokażemy, że odpowiadająca mu dystrybucja $\nu(L) = T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ma zwarty nośnik. Przypuśćmy bowiem, że nośnik T nie jest zwarty. Istnieje zatem ciąg (x_n) , $x_n \in \underline{T}$ nie posiadający punktu skupienia w Ω (to znaczy, w każdym zbiorze zwartym mamy tylko skończoną liczbę wyrazów ciągu). Możemy przyjąć, że w ciągu nie ma dwóch takich samych punktów. Istnieje zatem ciąg kul $K(x_n; r_n)$ w Ω , parami rozłącznych ($K(x_i; r_i) \cap K(x_j; r_j) = \emptyset$ dla $i \neq j$) i takich, że $r_n \rightarrow 0$. Ponieważ $x_n \in \underline{T}$, więc istnieją funkcje $\varphi_n \in \mathcal{D}(K(x_n; r_n))$ takie, że $T(\varphi_n) = 1$. Niech $K \subset \Omega$ będzie zbiorem zwartym. Ponieważ ciąg (x_n) nie ma punktu skupienia, tylko skończona liczba jego wyrazów może należeć do K . Ponieważ $r_n \rightarrow 0$, tylko skończona liczba kul ma niepuste przecięcie z K . Zatem każdy zbiór zwarty, zawarty w Ω , ma niepuste przecięcie z co najwyżej skończoną liczbą kul, więc ciąg (φ_n) jest zbieżny do zera w $\mathcal{E}(\Omega)$ a stąd $T(\varphi_n) \rightarrow 0$. Sprzeczność.

Pozostaje wykazać, że opisane wyżej odwzorowanie

$$\nu: \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega): L \mapsto T = \nu(L)$$

jest włożeniem. W tym celu wybierzmy ciąg (K_n) zbiorów zwartych, wyczerpujących Ω , tzn. $\Omega = \cup_n K_n$ i $K_n \subset K_{n+1}$. Wybierzmy $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ równe jedności na K_n . Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ ciąg $\psi_n\varphi$ jest zbieżny w $\mathcal{E}(\Omega)$ do φ . Jeżeli zatem $T = 0$, to $T(\psi_n\varphi) = 0$ i w konsekwencji $L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\psi_n\varphi) = 0$. ■

W dalszym ciągu nie będziemy rozróżniać między $T = \nu(L)$ i L .

Dowodząc powyższe stwierdzenie wykazaliśmy, że naturalne włożenie $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ jest ciągłe i gęste (obraz jest gęsty). Z tego wynika, że dla dystrybucji o zwartym nośniku ma sens liczba $T(\varphi)$ dla każdej funkcji gładkiej. Powstaje naturalne pytanie: jaki warunek powinna spełniać para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, żeby można było sensownie mówić o liczbie $T(\varphi)$?

Niech

$$\underline{T} \cap \varphi = K \tag{19.3}$$

będzie zbiorem zwartym. Istnieje funkcja $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ taka, że $f(x) = 1$ dla $x \in K$. Oczywiście, że $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ i liczba $T(f\varphi)$ nie zależy od wyboru f . Możemy zatem położyć

$$T(\varphi) = T(f\varphi).$$

Warunek (19.3) jest więc wystarczający do określenia wartości dystrybucji na funkcji.

Ze Stwierdzenia 19.3 dostajemy, jako natychmiastowy wniosek, że dystrybucje o zwartym nośniku są rzędu skończonego.

19.3. Działania na dystrybucjach.

Operacje liniowe na dystrybucjach definiujemy na ogół jako dualne do liniowych i ciągłych operacji wykonywanych na funkcjach próbnych. Jeżeli mamy na przykład operację liniową i ciągłą

$$A: \mathcal{D}(\Omega') \rightarrow \mathcal{D}(\Omega),$$

to dualne odwzorowanie

$$A^*: \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega'): T \mapsto T \circ A$$

jest ciągłą operacją na dystrybucjach. Podobnie możemy zaczynać od operacji liniowej i ciągłej $A: \mathcal{D}(\Omega') \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ itp.

Na dystrybucje patrzy się często jak na uogólnione funkcje, naturalnym więc jest rozszerzanie na dystrybucje operacji znanych dla funkcji. Metoda jest prosta: wiemy, jak ma wyglądać działanie A^* na dystrybucje postaci T_f i poszukujemy A .

W tym miejscu należy zauważyć, że dodawania dystrybucji i mnożenia przez liczbę są zgodne z odpowiednimi operacjami na funkcjach:

$$T_{af+bg} = aT_f + bT_g.$$

Teraz dwa, mniej oczywiste przykłady.

Mnożenie dystrybucji przez funkcję. Niech $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i $f \in C^\infty(\Omega; \mathbb{C})$. Dystrybucję fT definiujemy wzorem

$$fT(\varphi) = T(f\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Oczywistym jest, że $fT_g = T_{fg}$.

Uwaga: Nie można określić mnożenia dystrybucji tak, aby działanie to było łączne.

Różniczkowanie dystrybucji. Rozważmy najpierw przypadek $\Omega = \mathbb{R}^1$ i $T = T_{f'}$. Mamy dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$:

$$T_{f'}(\varphi) = \int f'\varphi = (f\varphi)|_{-\infty}^{\infty} - \int f\varphi' = -T_f(\varphi').$$

Stąd definicja

DEFINICJA 19.8. Pochodną $\frac{\partial}{\partial x^i} T$ dystrybucji $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ nazywamy dystrybucję z $\mathcal{D}'(\Omega)$ zdefiniowaną wzorem

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T(\varphi) = -T\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi\right).$$

Definicja powyższa jest poprawna, bo zbieżność w $\mathcal{D}(\Omega)$ ciągu (φ_n) pociąga za sobą zbieżność w $\mathcal{D}(\Omega)$ ciągu $(\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi_n)$.

A teraz przykład innego rodzaju.

Przesunięcie dystrybucji Niech $\Omega = \mathbb{R}^n$ i niech $h \in \mathbb{R}^n$. Odwzorowanie

$$\tau_h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definiujemy wzorem

$$\tau_h(x) = h + x.$$

Odwzorowanie to indukuje znane odwzorowanie τ_h^* na funkcjach próbnych:

$$\tau_h^*: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n): \varphi \mapsto \varphi \circ \tau_h.$$

DEFINICJA 19.9. *Przesunięciem* $\tau_h T$ dystrybucji $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ nazywamy dystrybucję

$$\tau_h T(\varphi) = T(\tau_h^* \varphi).$$

Zobaczmy, jak wygląda ta operacja na dystrybucjach postaci T_f :

$$\tau_h T_f(\varphi) = \int f \tau_h^* \varphi = \int f(\varphi \circ \tau_h) = \int (f \circ \tau_{-h}) \varphi$$

(z twierdzenia o zamianie zmiennych). Stąd przesunięcie $\tau_h f$ funkcji f definiujemy wzorem

$$\tau_h f(x) = f(\tau_{-h} x) = f(x - h).$$

19.4. Przykłady.

(1) Funkcja Heaviside'a θ na \mathbb{R}^1 jest zdefiniowana wzorem

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

Jest ona lokalnie całkowna, więc określa dystrybucję T_θ . Obliczmy jej pochodną

$$T'_\theta(\varphi) = - \int \theta \cdot \varphi' = - \int_0^\infty \varphi' = \varphi(0) = \delta_0(\varphi),$$

czyli

$$T'_\theta = \delta_0.$$

Piszemy też $\theta' = \delta_0$.

(2) Niech $f(x) = |x|$.

$$T'_f(\varphi) = - \int |x|\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^0 x\varphi'(x)dx - \int_0^{\infty} x\varphi'(x)dx = - \int_{-\infty}^0 \varphi + \int_0^{\infty} \varphi.$$

Stąd $T'_f = T_{\text{sgn}}$, $f'(x) = \text{sgn}(x)$.

(3) Niech $f(x) = \log(|x|)$

$$\begin{aligned} T'_f(\varphi) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\varphi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \log(x)\varphi'(x)dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \log(\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)dx + \log(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)dx \right). \end{aligned}$$

Ale

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))) = 0,$$

więc

$$T'_{\log|x|}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)dx \right) = \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx$$

(wartość główna całki). Piszemy:

$$(\log|x|)' = \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Uwaga: Wartość główną całki $\text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx$ możemy zapisać też inaczej. Jeżeli nośnik φ zawarty jest w przedziale $] -R, R[$, to

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \text{vp} \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx = \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx.$$

Możemy wrócić do problemu istnienia łącznego mnożenia w przestrzeni dystrybucji. Gdyby istniało takie mnożenie, spełniające dodatkowo warunek $fT = T_f \cdot T$ dla funkcji gładkiej f , to powinniśmy mieć

$$\delta_0 \cdot (T_x \cdot \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) = (\delta_0 \cdot T_x) \cdot \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right),$$

oraz

$$\delta_0 \cdot T_x = x\delta_0 = 0 \quad \text{i} \quad T_x \cdot \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = x\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1,$$

a stąd $\delta_0 = 0$. Sprzeczność.

(4) Laplasjan w trzech wymiarach.

Niech $\Omega = \mathbb{R}^3$ z kanonicznym iloczynem skalarnym i niech Δ będzie laplasjanem ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$). Funkcja

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}$$

jest lokalnie całkowalna, więc wyznacza dystrybucję. Obliczmy $\Delta \frac{1}{r}$. Mamy dla $r \neq 0$

$$\Delta \frac{1}{r} = 0,$$

zatem nośnik dystrybucji

$$\Delta \frac{1}{r}$$

jest jednopunktowy. Niech teraz $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Z wzorów Greena, Twierdzenie 17.6,

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{r}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r \geq \varepsilon} \frac{1}{r} \Delta \varphi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{r \geq \varepsilon} \varphi \Delta \frac{1}{r} - \int_{r=\varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \int_{r=\varepsilon} \varphi \frac{1}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (19.4)$$

gdzie

$$\frac{d\varphi}{dn} = (\mathbf{n} | \text{grad } \varphi), \quad \mathbf{n}(x, y, z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right).$$

Pierwszy składnik w (19.4) jest ograniczony przez

$$c \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} = c4\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad c = \sup_x \|\varphi'(x)\|,$$

a drugi składnik

$$\int_{r=\varepsilon} \varphi \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{r=\varepsilon} \varphi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi\varphi(0).$$

Mamy więc

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta_0.$$

19.5. Zbieżność ciągu dystrybucji.

Wprowadzimy teraz pojęcie zbieżności ciągu dystrybucji.

DEFINICJA 19.10. Ciąg dystrybucji (T_n) jest zbieżny do T w $\mathcal{D}'(\Omega)$ ($\mathcal{E}'(\Omega)$), jeżeli dla każdej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ($\mathcal{E}(\Omega)$) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi).$$

Taką zbieżność nazywamy *punktową* lub *słabą*. Analogicznie wprowadzamy pojęcie ciągu Cauchy'ego: ciąg T_n jest ciągiem Cauchy'ego, jeżeli dla każdej funkcji próbnej φ ciąg $T_n(\varphi)$ jest ciągiem Cauchy'ego w \mathbb{C} . Bez dowodu przyjmijmy fakt, że przestrzenie $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$ są zupełne, tzn. każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

STWIERDZENIE 19.11. Niech f będzie funkcją całkowalną (w sensie Lebesgue'a) na \mathbb{R}^n i taką, że $\int f = 1$. Niech

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Wtedy $g_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \delta_0$ w sensie słabej zbieżności w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

DOWÓD: Dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$T_{g_\varepsilon}(\varphi) = \int g_\varepsilon \varphi = \frac{1}{\varepsilon^n} \int f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d^n x = \int f(y) \varphi(\varepsilon y) d^n y.$$

Ale dla każdego $y \in \mathbb{R}^n$ mamy $\varphi(\varepsilon y) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \varphi(0)$. Ponieważ zaś

$$\|f(y)\varphi(\varepsilon y)\| \leq \|f(y)\| \sup_x \|\varphi(x)\|,$$

to z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej wynika, że

$$T_{g_\varepsilon}(\varphi) = \int f(y)\varphi(\varepsilon y) d^n y \rightarrow \int f(y)\varphi(0) d^n y = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

■

Standardowy przykład rodziny przybliżającej deltę Diraca dostaniemy biorąc $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$. Mamy tu

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \exp\left(-\pi \left\|\frac{x}{\varepsilon}\right\|^2\right).$$

Wzory Sochockiego.¹ Funkcja $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x + i\varepsilon}$ jest funkcją lokalnie całkowną na \mathbb{R}^1 , więc zadaje dystrybucję T_ε . Obliczymy granicę T_ε przy $\varepsilon \rightarrow 0$. Niech $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. Istnieje $R > 0$ takie, że $\varphi(x) = 0$ dla $|x| > R$. Mamy więc dla $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx \\ &= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \\ &= -2i\varphi(0)\varepsilon \frac{1}{|\varepsilon|} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{R}{|\varepsilon|} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-R}^R \frac{x^2 - i\varepsilon x}{x^2 + \varepsilon^2} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \end{aligned}$$

Funkcja $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(0)$ jest postaci $x\psi(x)$, gdzie ψ jest funkcją gładką, a $\frac{x^2 - i\varepsilon x}{x^2 + \varepsilon^2}$ jest funkcją ograniczoną, więc możemy przejść do granicy pod znakiem całki (twierdzenie o zbieżności majoryzowanej) i dostajemy

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx &= -2i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\ &= -i\pi\varphi(0) + \operatorname{vp} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Dostaliśmy wzór na granicę $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon$ od strony dodatnich ε . Granicę tę oznacza się $\frac{1}{x + i0}$. Mamy więc

$$\frac{1}{x + i0} = -i\pi\delta_0 + \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (19.5)$$

i podobnie,

$$\frac{1}{x - i0} = i\pi\delta_0 + \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right). \quad (19.6)$$

Wzory (19.5) i (19.6) są nazywane *wzorami Sochockiego*. Odgrywają one istotną rolę w teoriach kwantowych.

19.6. Splot dystrybucji. Regularyzacja dystrybucji.

19.6.1. Splot funkcji. Niech f, g będą funkcjami na \mathbb{R}^n .

DEFINICJA 19.12. *Splotem* funkcji f i g nazywamy funkcję na \mathbb{R}^n zdefiniowaną wzorem całkowym

$$h(x) = \int f(y)g(x - y)d^n y, \quad (19.7)$$

przy założeniu, że całka po prawej stronie istnieje.

¹ Julian Sochocki (1842–1927), polski matematyk działający w Petersburgu, uczeń Pafnucego Czebyszewa. Omawiane wzory pochodzą z pracy opublikowanej w 1873.

Splot funkcji f i g oznaczamy $f*g$. Zamieniając miejscami f i g i dokonując zamiany zmiennych w formule (19.7) mamy

$$g*f(x) = \int g(y)f(x-y)d^n y = \int g(x-y)f(y)d^n y = f*g(x).$$

Zatem splot funkcji jest przemienny. Analogicznie pokazuje się jego łączność. Ponadto splot jest liniowy ze względu na oba czynniki.

19.6.2. Iloczyn tensorowy dystrybucji. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$. Jeżeli f jest funkcją na Ω i g funkcją na Ω' , to iloczynem tensorowym $f \otimes g$ tych funkcji nazywamy funkcję na $\Omega \times \Omega'$

$$f \otimes g(x, y) = f(x) \cdot g(y).$$

Niech teraz $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times \Omega')$, wówczas na mocy twierdzenia Fubniego,

$$T_{f \otimes g}(\varphi) = \int_{\Omega \times \Omega'} f \otimes g \varphi = \int_{\Omega} f(x) \left(\int_{\Omega'} g(y) \varphi(x, y) d^m y \right) d^n x = T_f(T_g(\varphi)).$$

Uzasadnia to następującą definicję.

DEFINICJA 19.13. *Iloczynem tensorowym* dystrybucji $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i $S \in \mathcal{D}'(\Omega')$ nazywamy funkcjonal $T \otimes S$ na $\mathcal{D}(\Omega \times \Omega')$ zadany wzorem

$$T \otimes S(\varphi) = T(S(\varphi)). \quad (19.8)$$

Pokażemy, że wzór ten określa dystrybucję z $\mathcal{D}'(\Omega \times \Omega')$. Najpierw trzeba pokazać, że funkcja

$$\Omega \ni x \mapsto S(\varphi(x, \cdot))$$

należy do $\mathcal{D}(\Omega)$. Ze wzoru na resztę (np. w postaci Lagrange'a) dla funkcji jednej zmiennej dostajemy, że rodzina funkcji (parametrem jest t)

$$y \mapsto \frac{1}{t}(\varphi(x + te_i, y) - \varphi(x, y))$$

zbiega do $\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi(x, \cdot)$ w przestrzeni $\mathcal{D}(\Omega')$, możemy więc przejść do granicy pod znakiem dystrybucji. Jeżeli zatem zdefiniujemy

$$\psi(x) = S(\varphi(x, \cdot)),$$

to

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \psi(x) = S\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi(x, \cdot)\right).$$

Analogicznie mamy dla pochodnych wszystkich rzędów. Jest też oczywiste, że nośnik ψ jest zwarty (jest zawarty w rzucie nośnika φ na Ω , a ten jest zwarty jako obraz ciągły zbioru zwartego). Oznaczmy $\psi = \tilde{S}(\varphi)$. Pokazaliśmy, że mamy dobrze zdefiniowane odwzorowanie liniowe

$$\tilde{S}: \mathcal{D}(\Omega \times \Omega') \rightarrow \mathcal{D}(\Omega).$$

Pokażemy teraz, że jest ono ciągłe (wystarczy ciągłość w zerze). Niech $\varphi_n \rightarrow 0$ w $\mathcal{D}(\Omega \times \Omega')$. Nośniki φ_n są zawarte w jednym zbiorze zwartym, więc nośniki odpowiednich $\tilde{S}(\varphi_n)$ są zawarte w jego rzucie. Przypuśćmy teraz, że ciąg $\tilde{S}(\varphi_n)$ nie jest zbieżny jednostajnie do zera. Oznacza to, że istnieje $\varepsilon > 0$ i ciąg x_n taki, że $\psi_n(x_n) \geq \varepsilon$. Ale ciąg φ_n jest zbieżny jednostajnie ze swoimi pochodnymi, więc ciąg

$$\tilde{\varphi}_n(\cdot) = \varphi_n(x_n, \cdot)$$

jest zbieżny (do zera) w $\mathcal{D}(\Omega')$ i $S(\tilde{\varphi}_n) = \tilde{S}(\varphi_n)(x_n) \rightarrow 0$. Sprzeczność. Analogicznie pokazujemy jednostajną zbieżność wszystkich pochodnych.

Pokazaliśmy więc, że wzór (19.8) ma sens dla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times \Omega')$ i definiuje funkcjonal liniowy i ciągły jako złożenie odwzorowań liniowych i ciągłych $T \circ \tilde{S}$, więc dystrybucję.

Wykażemy teraz podstawowe własności iloczynu tensorowego. Do tego potrzebne nam będzie

STWIERDZENIE 19.14. *Iloczyn tensorowy funkcji próbnych $\varphi \otimes \phi$, gdzie $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$, rozpinają zbiór gęsty w $\mathcal{D}(\Omega \times \Omega')$.*

Bez dowodu.

STWIERDZENIE 19.15. *Iloczyn tensorowy ma własność Fubinię:*

$$T \otimes S(\varphi) = T(S(\varphi)) = S(T(\varphi)). \quad (19.9)$$

DOWÓD: Jak poprzednio możemy pokazać, że wzór

$$\varphi \mapsto S(T(\varphi))$$

definiuje dystrybucję. Dla iloczynu tensorowego funkcji próbnych $\varphi \otimes \phi$ mamy

$$T \otimes S(\varphi \otimes \phi) = T(\varphi \cdot S(\phi)) = T(\varphi) \cdot S(\phi) = S(T(\varphi \otimes \phi)).$$

Mamy zatem równość dla kombinacji liniowych iloczynów tensorowych funkcji próbnych. Ponieważ te tworzą zbiór gęsty w przestrzeni funkcji próbnych, mamy równość dla wszystkich funkcji próbnych. ■

Ponadto:

- (1) Iloczyn tensorowy jest odwzorowaniem biliniowym

$$\otimes : \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega') \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega').$$

- (2) Iloczyn tensorowy jest łączny.
 (3) Iloczyn tensorowy jest ciągły ze względu na każdy z czynników. Wynika to natychmiast z własności Fubiniego.
 (4) $\text{supp}(T \otimes S) = \underline{T} \times \underline{S}$.

Dowód: Niech $(x, y) \in \underline{T} \times \underline{S}$. Każde otoczenie tego punktu zawiera otoczenie postaci $O \times O'$. $x \in O$, $y \in O'$, więc istnieją $\varphi \in \mathcal{D}(O)$ oraz $\phi \in \mathcal{D}(O')$ takie, że $T(\varphi) \neq 0$, $S(\phi) \neq 0$. W konsekwencji $T \otimes S(\varphi \otimes \phi) \neq 0$ i

$$\text{supp}(T \otimes S) \supset \underline{T} \times \underline{S}$$

Niech teraz $(x, y) \notin \underline{T} \times \underline{S}$, więc $x \notin \underline{T}$ lub $y \notin \underline{S}$. Istnieją otoczenia O, O' punktów x, y takie, że na O zeruje się T lub na O' zeruje się S . Jeżeli zatem $\varphi \in \mathcal{D}(O \times O')$, to

$$T \otimes S(\varphi) = T(S(\varphi)) = 0$$

i

$$\text{supp}(T \otimes S) \subset \underline{T} \times \underline{S}.$$

- (5) Niech dystrybucja T będzie zadana obszarem $D \subset \Omega$, $T = T_D$, a dystrybucja S obszarem $D' \subset \Omega'$, $S = T_{D'}$. Z twierdzenia Fubiniego dla całek wielokrotnych mamy oczywistą równość

$$T_D \otimes T_{D'} = T_{D \times D'}. \quad (19.10)$$

Jesteśmy teraz przygotowani do definicji splotu dystrybucji.

19.6.3. Splot dystrybucji. Regularyzacja dystrybucji. Niech $\Omega = \mathbb{R}^n$. Dla funkcji f, g mamy

$$\begin{aligned} \int f * g(x) \varphi(x) d^n x &= \int \left(\int f(y) g(x - y) d^n y \right) \varphi(x) d^n x = \\ &= \iint f(x) g(y) \varphi(x + y) d^n x d^n y = \iint (f \otimes g) \cdot t^* \varphi, \end{aligned}$$

gdzie

$$t: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x, y) \mapsto x + y.$$

Poniższe stwierdzenie pozwala zdefiniować splot dystrybucji.

STWIERDZENIE 19.16. Niech $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Istnieje dystrybucja $T*S$ na \mathbb{R}^n zadana wzorem

$$T*S(\varphi) = T \otimes S(t^*\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (19.11)$$

Ponadto

$$T*S = S*T. \quad (19.12)$$

DOWÓD: Pokażemy najpierw, że funkcjonal $T*S$ jest dobrze określony. Jeżeli funkcja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, to funkcja $t^*\varphi$ ma nośnik równy $\{(x, y) : x + y \in \text{supp } \varphi\}$. Wynika stąd, że $t^*\varphi$ nie ma zwartego nośnika. Ponieważ jednak nośnik $T \otimes S$ jest zawarty w $\mathbb{R}^n \times \text{supp } S$, to jego przecięcie z $\text{supp } \varphi$ jest zwarte. Warunek (19.3) jest spełniony, więc liczba $T \otimes S(t^*\varphi)$ jest dobrze określona. Równie prosto wykazujemy ciągłość. Przemienność jest oczywista. ■

Dystrybucję $T*S$ nazywamy *splotem* dystrybucji T i S .

STWIERDZENIE 19.17. Niech S, T będą jak wyżej. Wówczas

$$\text{supp } T*S \subset \text{supp } T + \text{supp } S. \quad (19.13)$$

DOWÓD: Zbiór $\text{supp } T + \text{supp } S$ jest domknięty jako suma algebraiczna zbioru zwartego i zbioru domkniętego. Niech $x \notin \text{supp } T + \text{supp } S$. Istnieje więc otoczenie $O \ni x$ takie, że $O \cap (\text{supp } T + \text{supp } S) = \emptyset$. Stąd $t^{-1}(O) \cap \underline{T} \times \underline{S} = \emptyset$ i dla $\varphi \in \mathcal{D}(O)$ mamy

$$T*S(\varphi) = T \otimes S(t^*\varphi) = 0.$$

Zatem $x \notin \text{supp } T*S$. ■

19.6.4. Własności splotu.

- (1) Splot jest liniowy ze względu na każdy z argumentów.
- (2) $T_f * T_g = T_f * T_g$.
- (3) Ze Stwierdzenia 19.17 splot $R*S$ dystrybucji o zwartych nośnikach ma też zwarte nośniki. Ma więc sens wyrażenie $(R*S)*T$. Zachodzi równość (łączność splotu) wynikająca natychmiast z łączności iloczynu tensorowego dystrybucji

$$(R*S)*T = R*(S*T).$$

- (4) $\delta_h * T = \tau_h T$

DOWÓD:

$$(\delta_h * T)(\varphi) = \delta_h \otimes T(t^*\varphi) = T(\varphi(\cdot + h)) = T(\tau_h^* \varphi) = \tau_h T(\varphi). \quad \blacksquare$$

(5) Z poprzedniej własności wynika, że δ_0 jest jednością w splocie:

$$\delta_0 * T = T.$$

(6) $\tau_h(T * S) = (\tau_h T) * S = T * (\tau_h S)$.

DOWÓD: Z drugiego punktu i z łączności splotu

$$\tau_h(T * S) = \delta_h * (T * S) = (\delta_h * T) * S.$$

Druga równość wynika z przemienności splotu. ■

(7) Zachodzi związek

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(T * S) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} T\right) * S.$$

DOWÓD: Z definicji pochodnej dystrybucji

$$\begin{aligned} T * \left(\frac{\partial}{\partial x^i} S\right)(\varphi) &= T \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y^i} S\right)(t^* \varphi) = T \left(\frac{\partial}{\partial y^i} S(\varphi)\right) = -T \left(S\left(\frac{\partial}{\partial y^i} t^* \varphi\right)\right) = \\ &= -T \left(S\left(t^* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi\right)\right)\right) = -T \otimes S \left(t^* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi\right)\right) = -T * S \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}(T * S)(\varphi). \end{aligned}$$

(8) W szczególności

$$\frac{\partial}{\partial x^i} S = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \delta_0\right) * S.$$

Podobnie mamy dla wyższych pochodnych: różniczkowanie możemy zastąpić splotem z pochodną delty Diraca.

DOWÓD:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T = \frac{\partial}{\partial x^i} (\delta_0 * T) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \delta_0\right) * T.$$

19.6.5. Regularyzacja dystrybucji. Używając splotu pokażemy, że $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ jest gęste w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ponieważ zbiór $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ jest gęsty w $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, to wystarczy pokazać, że $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ jest gęste w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Niech teraz funkcja $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie taka, że $\int f = 1$. Ze Stwierdzenia 19.11 wiemy, że ciąg funkcji $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ jest zbieżny do delty Diraca. Z drugiej strony, iloczyn tensorowy jest ciągły ze względu na każdy z czynników i w konsekwencji, splot też jest ciągły ze względu na każdy z czynników. Ponieważ δ_0 jest jednością splotową, to dostajemy

$$g_\varepsilon * T \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T.$$

Przez splot $f * T$ funkcji i dystrybucji rozumiemy tu dystrybucję $T_f * T$. Wystarczy teraz wykazać

STWIERDZENIE 19.18. Dla $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ i $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$f * T \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Funkcja $f * T$ dana jest wzorem

$$(f * T)(x) = T(\tau_x \check{f}), \quad (19.14)$$

gdzie $\check{f}(x) = f(-x)$.

DOWÓD: Pokażemy najpierw, że $f * T$ jest funkcją. Z definicji splotu

$$f * T(\varphi) = T(T_f(t^* \varphi)),$$

ale

$$T_f(t^* \varphi)(x) = \int f(y) \varphi(x + y) d^n y = \int f(-y - x) \varphi(-y) d^n y = T_\varphi(t^* \check{f}),$$

gdzie $\check{f}(x) = f(-x)$ i podobnie $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Mamy więc

$$f * T(\varphi) = T(T_\varphi(t^* \check{f})) = T_\varphi(T(t^* \check{f})) = \int \check{\varphi}(x) T(\tau_x^* \check{f}) d^n x = \int \varphi(x) T(\tau_{-x}^* \check{f}) d^n x.$$

To dowodzi, że $f * T$ jest funkcją zadaną wzorem

$$f * T(x) = T(\tau_{-x}^* \check{f}) = T(\tau_x \check{f}) = \tau_{-x} T(\check{f}).$$

Jej gładkość pokazuje się tak, jak gładkość $S(\varphi)$ w dowodzie poprawności definicji iloczynu tensorowego. ■

Niech teraz Ω będzie dowolnym obszarem. Tak, jak pokazywaliśmy gęstość $\mathcal{D}(\Omega)$ w $\mathcal{E}(\Omega)$, możemy pokazać, że $\mathcal{E}'(\Omega)$ jest gęsty w $\mathcal{D}'(\Omega)$. Z kolei przestrzeń $\mathcal{E}'(\Omega)$ można traktować jak podprzestrzeń $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Jeżeli zaś $\text{supp } T \subset \Omega$, to dla dostatecznie małych ε również $\text{supp } g_\varepsilon * T \subset \Omega$ (Stwierdzenie 19.17). Stąd zbiór $\mathcal{D}(\Omega)$ jest gęsty w $\mathcal{E}'(\Omega)$ i w konsekwencji, w $\mathcal{D}'(\Omega)$.

19.7. Obraz prosty i odwrotny dystrybucji.

Niech $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ będzie gładkim odwzorowaniem obszarów, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$. Z odwzorowaniem takim można wiązać dwie operacje na dystrybucjach. Pierwsza z nich jest dualna do transportu Φ^* funkcji próbnych, więc przenosi dystrybucje na Ω do dystrybucji na Ω' . Stąd nazwa: obraz prosty dystrybucji. Druga jest uogólnieniem transportu funkcji (wynika z myślenia o dystrybucji jako uogólnieniu funkcji): dystrybucja T_f zadana funkcją f na Ω' przekształcana jest w dystrybucję zadaną funkcją $f \circ \Phi$ na Ω . Stąd nazwa: obraz odwrotny dystrybucji.

19.7.1. Obraz prosty dystrybucji. Mając funkcję $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ możemy ją przenieść do funkcji $\Phi^*\varphi = \varphi \circ \Phi$. W wyniku dostajemy funkcję gładką, ale niekoniecznie o nośniku zwartym. Oczywiście jest, że odwzorowanie

$$\Phi^*: \mathcal{D}(\Omega') \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$$

jest ciągłe, więc jeżeli $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, to

$$\Phi_*T = T \circ \Phi^*$$

jest dystrybucją na Ω' , nazywaną *obrazem prostym* dystrybucji T . W szczególnych przypadkach można transportować dowolną dystrybucję.

DEFINICJA 19.19. Odwzorowanie $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ nazywamy *właściwym*, gdy przeciwobraz każdego zbioru zwartego w Ω' jest zwarty.

Nośnik $\Phi^*\varphi$ jest równy $\Phi^{-1}(\text{nośnik } \varphi)$. Jeżeli więc $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ i odwzorowanie Φ jest właściwe, to $\Phi^*\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wzór

$$\varphi \mapsto T \circ \Phi^*(\varphi)$$

zadaje dystrybucję na Ω' dla każdego $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Przykładem odwzorowania właściwego jest dyfeomorfizm.

Przykłady:

- (1) Niech $T = T_f$, gdzie f jest funkcją na Ω .
Mamy dla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$

$$\Phi_*T_f(\varphi) = T_f(\varphi \circ \Phi) = \int_{\Omega'} f(x)\varphi(\Phi(x))d^m x.$$

Jeżeli Φ jest dyfeomorfizmem obszarów Ω i Ω' (stąd $n = m$), to z twierdzenia o zamianie zmiennych mamy

$$\Phi_*T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f \circ \Phi^{-1} \left| \det \Phi^{-1}' \right| \varphi,$$

a stąd $\Phi_*T_f = T_g$, gdzie

$$g = f \circ \Phi^{-1} \cdot \left| \det \Phi^{-1}' \right|. \quad (19.15)$$

- (2) Niech $T = \delta_a$.

Mamy

$$\Phi_*\delta_a(\varphi) = \delta_a(\varphi \circ \Phi) = \varphi(\Phi(a)) = \delta_{\Phi(a)}(\varphi),$$

zatem

$$\Phi_*\delta_a = \delta_{\Phi(a)}. \quad (19.16)$$

19.7.2. Obraz odwrotny dystrybucji. Jak już mówiliśmy, druga konstrukcja polega na rozszerzeniu do dystrybucji transportu Φ^* funkcji, ma więc dystrybucji na Ω' przyporządkować dystrybucję na Ω . Nie dla każdego odwzorowania da się taką konstrukcję przeprowadzić. Niezbyt wyrafinowane argumenty pokazują, że warunkiem koniecznym jest, by odwzorowanie Φ było otwarte, tzn. by zbiór otwarty przeprowadzało na zbiór otwarty. Takimi odwzorowaniami są na przykład rzuty na podprzestrzeń i, oczywiście, dyfeomorfizmy. Z twierdzenia o funkcji uwiklanej wynika, że gdy w każdym punkcie $x \in \Omega$ pochodna $\Phi'(x)$ jest surjekcją, to odwzorowanie Φ jest otwarte. Istotnie, lokalnie poziomica takiego odwzorowania jest powierzchnią. Można tak dobrać lokalny układ współrzędnych w Ω , żeby Φ było rzutowaniem na podprzestrzeń. Lokalnie odwzorowanie jest otwarte, więc też i globalnie.

Przyjrzyjmy się najpierw przypadkowi dyfeomorfizmu $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$. Mamy mieć $\Phi^*T_f = T_{f \circ \Phi}$, czyli

$$\Phi^*T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f \circ \Phi \cdot \varphi = \int_{\Omega'} f |\det \Phi'| \cdot \varphi \circ \Phi^{-1} = T_f(|\det \Phi'| \cdot \varphi \circ \Phi^{-1}).$$

Przyporządkowanie $\varphi \mapsto |\det \Phi'| \cdot \varphi \circ \Phi^{-1}$ jest ciągłym odwzorowaniem z $\mathcal{D}(\Omega)$ do $\mathcal{D}(\Omega')$, możemy więc zdefiniować $\Phi^*: \mathcal{D}'(\Omega') \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ wzorem

$$\Phi^*T(\varphi) = T(|\det \Phi'| \cdot \varphi \circ \Phi^{-1}). \quad (19.17)$$

Zajmijmy się teraz rzutowaniem. Niech $\Omega = \Omega' \times I$, gdzie I jest przedziałem w \mathbb{R}^{n-m} i niech $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ będzie kanonicznym rzutowaniem. Mamy z twierdzenia Fubiniego

$$\Phi^*T_f = \int_{\Omega' \times I} f \circ \Phi \cdot \varphi = \int_{\Omega} f(x) \left(\int_I \varphi(x, y) d^{n-m}y \right) d^m x = \int_{\Omega} f \otimes 1 \cdot \varphi = T_{f \otimes 1}(\varphi).$$

Stąd definicja

$$\Phi^*T = T \otimes T_1. \quad (19.18)$$

Możemy teraz zająć się przypadkiem ogólnym.

TWIERDZENIE 19.20. Niech $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ ma w każdym punkcie pochodną surjektyną. Wówczas istnieje dokładnie jedno ciągłe odwzorowanie

$$\Phi^*: \mathcal{D}'(\Omega') \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

takie, że dla funkcji

$$\Phi^*T_f = T_{\Phi^*f}, \quad \Phi^*f = f \circ \Phi.$$

Dystrybucję Φ^*T nazywamy *obrazem odwrotnym* lub *podniesieniem* dystrybucji $T \in \mathcal{D}'(\Omega')$.

DOWÓD: Z warunku ciągłości i z twierdzenia o regularyzacji dystrybucji wynika jednoznaczność. Pozostaje do wykazania istnienie. Z zasady sklejanja dystrybucji wystarczy wykazać lokalne istnienie szukanej dystrybucji. Niech $x_0 \in \Omega$. Wybieramy odwzorowanie

$$\tilde{\Phi}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$$

takie, że w x_0 pochodna odwzorowania

$$\Psi = (\Phi, \tilde{\Phi}): \Omega \rightarrow \Omega' \times \mathbb{R}^{n-m}$$

jest izomorfizmem. Z twierdzenia o lokalnej odwracalności wynika, że Ψ jest dyfeomorfizmem otoczenia $O \ni x_0$ na otoczenie $\Psi(x_0)$. Możemy przyjąć, że $\Psi(O) = O' \times I$. Rozłożyliśmy zatem lokalnie Φ na dyfeomorfizm Ψ i rzutowanie $O' \times I \rightarrow O'$, więc przypadki już wcześniej rozpatrywane. Niech $T \in \mathcal{D}'(\Omega')$ i niech $\varphi \in \mathcal{D}(O)$. Dystrybucję Φ^*T , zlokalizowaną do O definiujemy, zgodnie z (19.17) i (19.18) wzorem

$$\Phi^*T(\varphi) = (T \otimes 1) \left(\varphi \circ \Psi^{-1} \cdot \left| \det \Psi^{-1'} \right| \right)$$

lub równoważnie,

$$\Phi^*T = \Psi_*^{-1} \left(\left| \det \Psi^{-1'} \right| (T \otimes 1) \right). \quad (19.19)$$

Oczywiste, że wzór ten zadaje ciągle odwzorowanie $\mathcal{D}'(\Omega') \rightarrow \mathcal{D}'(O)$. Ponadto, jeżeli $T = T_f$, to oczywiście

$$\Phi^*T_f = T_{f \circ \Phi}.$$

Z zasady sklejanja lokalne wzory definiują dystrybucję Φ^*T na Ω , która dla $T = T_f$ jest równa $T_{f \circ \Phi}$. ■

Przykłady

- (1) Niech odwzorowanie $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ będzie takie, że w każdym punkcie jego pochodna jest izomorfizmem, spełnia zatem założenia Twierdzenia 19.20. Ponieważ Φ jest lokalnie odwracalne, to przeciwobraz punktu jest co najwyżej przeliczalny. Weźmy teraz $T = \delta_a$, $a \in \Omega'$. Ze wzoru (19.19) dostajemy

$$\Phi^*\delta_a = \sum_{\Phi(x)=a} \frac{\delta_x}{|\det \Phi'(x)|}.$$

- (2) Warunek surjektywności pochodnej odwzorowania Φ można ominąć, jeżeli interesuje nas Φ^*T tylko dla pewnych dystrybucji. Wystarczy założenie surjektywności w punktach, które są odwzorowywane w nośniki transportowanych dystrybucji. Jako przykład weźmy $\Omega = \Omega' = \mathbb{R}$, $T = \delta_0$ i $\Phi(x) = x^2 - a^2$ dla pewnego $a > 0$. Ponieważ pochodna Φ jest zdegenerowana tylko w zerze,

a $\Phi(0) = -a^2$, możemy zastosować wyprowadzone powyżej wzory i dostajemy

$$\Phi^* \delta_0 = \frac{1}{2a} [\delta_{-a} + \delta_a].$$

(3) Ω i Ω' jak w poprzednim przykładzie, a $\Phi = \sin$.

$$\sin^* \delta_0 = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{k\pi}.$$

W tym, jak i w pierwszym przykładzie, sumowanie szeregu dystrybucji jest w sensie przestrzeni $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

19.8. Transformata Fouriera funkcji.

Niech f będzie funkcją o wartościach zespolonych, całkowaną (w sensie Lebesgue'a) na \mathbb{R}^n . Transformata Fouriera funkcji f nazywamy funkcję $\mathcal{F}(f)$ na \mathbb{R}^n zdefiniowaną wzorem

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-2\pi i x \cdot \xi) d^n x.$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej wynika, że tak uzyskana funkcja jest ciągła i ograniczona, ale na ogół nie całkowna. Funkcję $\mathcal{F}(f)$ oznaczamy będziemy również \widehat{f} . Gdy $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, to, całkując przez części, dostajemy

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} f\right)(\xi) = \int \exp(-2\pi i x \cdot \xi) \frac{\partial}{\partial x^j} f(x) d^n x = (2\pi i) \xi_j \mathcal{F}(f)(\xi), \quad (19.20)$$

zaś różniczkując pod znakiem całki dostajemy

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathcal{F}(f) = (-2\pi i) \mathcal{F}(x^j f). \quad (19.21)$$

Wzory te podpowiadają nam, jak wybrać przestrzeń funkcji różniczkowalnych, by transformacja Fouriera z niej nie wyprowadzała.

DEFINICJA 19.21. *Przestrzeń Schwartza* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nazywamy przestrzeń wektorową funkcji f o wartościach zespolonych, gładkich na \mathbb{R}^n i takich, że dla wszystkich wielowskaźników $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ zachodzi

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \sup_x |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty,$$

gdzie $x^\beta = (x^1)^{\beta_1} \dots (x^n)^{\beta_n}$ i $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n}$.

Zbieżność w przestrzeni $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest zbieżnością równocześnie względem każdej z pólnorm $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$. Mamy oczywiście

STWIERDZENIE 19.22. *Funkcje z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ są całkowalne w sensie Lebesgue'a.*

DOWÓD: Wystarczy zauważyć, że funkcja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest mierzalna (bo ciągła) i $|f(x)| \leq c \cdot (1 + \|x\|^2)^{-n}$, a majoranta jest funkcją całkowalną. ■

Bezpośrednio z definicji przestrzeni $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wynika, że jeżeli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to również funkcja $D^\beta x^\alpha f$ należy do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Możemy teraz sformułować

STWIERDZENIE 19.23. *Transformacja Fouriera odwzorowuje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ w sposób ciągły.*

DOWÓD: Zauważmy najpierw, że wzory (19.20), (19.21) są spełnione dla funkcji z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Otrzymujemy z nich

$$\xi^\beta D^\alpha \widehat{f}(\xi) = \xi^\beta (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha f)}(\xi) = \frac{(-2\pi i)^{|\alpha|}}{(2\pi i)^{|\beta|}} \widehat{D^\beta x^\alpha f}(\xi) \quad (19.22)$$

($|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$). Prawa strona ma sens, bo funkcja $D^\beta x^\alpha f$ należy do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Jej transformata Fouriera jest funkcją ograniczoną i ciągłą, zatem lewa strona w równościach (19.22) jest też funkcją ciągłą i ograniczoną i w konsekwencji, $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Zauważmy, że istnieją stałe $c(\alpha, \beta)$ takie, że dla każdej funkcji f

$$\sup_x ((1 + \|x\|^2)^n |D^\beta x^\alpha f(x)|) \leq c(\alpha, \beta) \sum_{|\alpha'| \leq |\beta|} \sum_{|\beta'| \leq |\alpha| + 2n} \|f\|_{\alpha', \beta'}.$$

Mamy stąd

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{\alpha, \beta} &= \sup_\xi |\xi^\beta D^\alpha \widehat{f}(\xi)| = (2\pi)^{|\alpha| - |\beta|} \sup_\xi \left| \widehat{D^\beta x^\alpha f}(\xi) \right| \leq \\ &\leq (2\pi)^{|\alpha| - |\beta|} \int |D^\beta (x^\alpha f(x))| d^n x \\ &= (2\pi)^{|\alpha| - |\beta|} \int (1 + \|x\|^2)^n |D^\beta (x^\alpha f(x))| (1 + \|x\|^2)^{-n} d^n x \\ &\leq (2\pi)^{|\alpha| - |\beta|} \sup_x ((1 + \|x\|^2)^n |D^\beta (x^\alpha f)|) \int (1 + \|x\|^2)^{-n} d^n x \\ &\leq (2\pi)^{|\alpha| - |\beta|} c(\alpha, \beta) \sum_{|\alpha'| \leq |\beta|} \sum_{|\beta'| \leq |\alpha| + 2n} \|f\|_{\alpha', \beta'} \int (1 + \|x\|^2)^{-n} d^n x, \end{aligned}$$

zatem dla dowolnych α, β istnieje stała $C(\alpha, \beta)$ taka, że

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{\alpha, \beta} \leq C(\alpha, \beta) \sum_{|\alpha'| \leq |\alpha|} \sum_{|\beta'| \leq |\alpha| + 2n} \|f\|_{\alpha', \beta'}.$$

Oznacza to, że $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest odwzorowaniem ciągłym. \blacksquare

Bardzo ważny przykład. Obliczmy transformację Fouriera funkcji f na \mathbb{R}^1 , gdzie

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x + \frac{i\pi}{a}\xi)^2} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2} dx = e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x + \frac{i\pi}{a}\xi)^2} dx. \end{aligned}$$

Z twierdzenia o residuach mamy, całkując po prostokącie o wierzchołkach w punktach $-R$, R , $R + i\frac{\pi}{a}\xi$, $-R + i\frac{\pi}{a}\xi$,

$$0 = \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx + \int_R^{R+i\frac{\pi}{a}\xi} e^{-az^2} dz + \int_{R+i\frac{\pi}{a}\xi}^{-R+i\frac{\pi}{a}\xi} e^{-az^2} dz + \int_{-R+i\frac{\pi}{a}\xi}^{-R} e^{-az^2} dz.$$

Ale

$$\left| \int_R^{R+i\frac{\pi}{a}\xi} e^{-az^2} dz \right| \leq \frac{\pi}{a} \xi e^{-a(R^2 - \frac{\pi^2}{a^2}\xi^2)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

i analogicznie

$$\left| \int_{-R+i\frac{\pi}{a}\xi}^{-R} e^{-az^2} dz \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x + i\frac{\pi}{a}\xi)^2} dx.$$

Mamy stąd

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}.$$

Biorąc $a = \pi$ dostajemy $\mathcal{F}(f) = f$.

Podobnie mamy w przypadku n -wymiarowym.

STWIERDZENIE 19.24. Niech funkcja f na \mathbb{R}^n będzie zadana wzorem

$$f(x) = e^{-\pi \|x\|^2}.$$

Wtedy $\widehat{f} = f$.

Zbierzmy teraz podstawowe własności transformacji Fouriera na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ w jedno twierdzenie.

TWIERDZENIE 19.25. Niech f i g będą funkcjami z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wtedy

(1)

$$\mathcal{F}(g \cdot \widehat{f})(x) = \int \widehat{g}(x+y)f(y)d^n y,$$

(2)

$$\int g \cdot \widehat{f} = \int \widehat{g} \cdot f,$$

(3)

$$\widehat{\widehat{f}} = \check{f},$$

(4)

$$f(x) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d^n \xi,$$

(5)

$$\check{\check{f}} = \widehat{f},$$

(6)

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

DOWÓD:

(1) Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g \cdot \widehat{f})(x) &= \int g(\xi) \exp(-2\pi i x \cdot \xi) \left(\int f(y) \exp(-2\pi i y \cdot \xi) d^n y \right) d^n \xi = \\ &= \int f(y) \left(\int g(\xi) \exp(-2\pi i(x+y) \cdot \xi) d^n \xi \right) d^n y = \int f(y) \widehat{g}(x+y) d^n y. \end{aligned}$$

(2) Z definicji \mathcal{F} mamy

$$\widehat{\varphi}(0) = \int \varphi(x) \exp(-2\pi i x \cdot 0) d^n x = \int \varphi(x) d^n x.$$

Stąd

$$\int g \cdot \widehat{f} = \mathcal{F}(g \cdot \widehat{f})(0) = \int \widehat{g}(y+0)f(y)d^n y = \int \widehat{g} \cdot f.$$

(3) Niech $g_\varepsilon(\xi) = \exp(-\pi\varepsilon^2\|\xi\|^2)$. Mamy oczywistą nierówność

$$\left| g_\varepsilon(\xi) \widehat{f}(\xi) \exp(-2\pi i x \cdot \xi) \right| \leq \left| \widehat{f}(\xi) \right|$$

oraz zbieżność punktową

$$g_\varepsilon(\xi)\widehat{f}(\xi)\exp(-2\pi i x \cdot \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{f}(\xi)\exp(-2\pi i x \cdot \xi).$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej wynika, że

$$\mathcal{F}(g_\varepsilon\widehat{f})(x) = \int g_\varepsilon(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i x \cdot \xi}d^n\xi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int \widehat{f}(\xi)\exp(-2\pi i x \cdot \xi)d^n\xi = \widehat{\widehat{f}}(x).$$

Ale

$$\begin{aligned}\widehat{g}_\varepsilon(x) &= \int g_1(\varepsilon\xi)\exp(-2\pi i x \cdot \xi)d^n\xi = \frac{1}{\varepsilon^n} \int g_1(\eta)\exp(-2\pi i x \cdot \frac{\eta}{\varepsilon})d^n\eta \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\widehat{g}_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon^n}g_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

bo $\widehat{g}_1 = g_1$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{f}}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}(g_\varepsilon\widehat{f})(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \widehat{g}_\varepsilon(x+y)f(y)d^n y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \widehat{g}_\varepsilon(y)f(y-x)d^n y = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \int g_1\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)f(y-x)d^n y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int g_1(y)f(\varepsilon y-x)d^n y.\end{aligned}$$

Ponieważ mamy nierówność

$$|g_1(y) \cdot f(\varepsilon y - x)| \leq |g_1(y)| \sup_x |f(x)|$$

oraz zbieżność punktową

$$g_1(y)f(\varepsilon y - x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g_1(y)f(-x),$$

to z twierdzenia Lebesgue'a

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = \int g_1(y)f(-x)d^n y = f(-x) \int e^{-\pi\|y\|^2}d^n y = f(-x).$$

(4) Wynika natychmiast z poprzedniego.

(5) Też wynika natychmiast z punktu trzeciego.

(6) Dla każdego $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ również $\check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, zatem $\check{\check{f}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ale $f = \mathcal{F}\left(\check{\check{f}}\right)$, czyli $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

■

WNIOSEK 19.26. Niech f i g będą funkcjami z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wtedy

$$(1) \quad \widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g},$$

$$(2) \quad \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

DOWÓD: Zauważmy najpierw, że dla funkcji z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ całki definiujące splot są dobrze określone i $f * g$ jest funkcją całkowaną, więc wyrażenia występujące po obu stronach równości mają sens.

(1) Z punktu pierwszego Twierdzenia 19.25, podstawiając \check{f} zamiast f , mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g \cdot f)(x) &= \int \widehat{g}(x+y) \check{f}(y) d^n y = \int \widehat{g}(x+y) \widehat{f}(-y) d^n y \\ &= \int \widehat{g}(x-y) \widehat{f}(y) d^n y = (\widehat{f} * \widehat{g})(x). \end{aligned}$$

(2) Teraz zamiast g podstawiamy \widehat{g} i dostajemy

$$\mathcal{F}(\widehat{g} \cdot f)(x) = \int \widehat{g}(x+y) f(y) d^n y = \int g(-x-y) f(y) d^n y = (g * f)(-x) = \widehat{\widehat{g * f}}(x).$$

Transformacja Fouriera jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznaczny, zatem

$$\mathcal{F}(g * f) = \widehat{g} \cdot \widehat{f}.$$

■

19.9. Transformata Fouriera dystrybucji.

Wiemy, że $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ i włożenia są ciągłe. Pokażemy, że obrazy tych włożeń są gęste. Ponieważ zbiór $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest gęsty w $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, wystarczy pokazać

STWIERDZENIE 19.27. Zbiór $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest gęsty w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

DOWÓD: Niech funkcja $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie taka, że $g(x) = 1$ dla $\|x\| \leq 1$. Zdefiniujmy $g_\varepsilon(x) = g(\varepsilon x)$ dla $0 < \varepsilon < 1$. Mamy oczywiście $D^\alpha g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{|\alpha|} D^\alpha g(\varepsilon x)$ i w konsekwencji,

$$\sup_{x, \varepsilon} |D^\alpha g_\varepsilon(x)| \leq \sup_x |D^\alpha g(x)|. \quad (19.23)$$

Ustalmy wielomiany α, β . Funkcja $(g_\varepsilon - 1) \cdot f$ należy do \mathcal{S} , więc funkcja $\|x\|^2 x^\beta D^\alpha((g_\varepsilon - 1) \cdot f)$ jest ograniczona. Z (19.23) mamy ponadto, że to ograniczenie

jest jednostajnie ze względu na ε . Wynika stąd, że dla każdego $\mu > 0$ istnieje r takie, że dla $\|x\| > r$ i dla wszystkich ε mamy $|x^\beta D^\alpha((g_\varepsilon - 1)f)| \leq \mu$. Z drugiej strony, jeżeli $\varepsilon < \frac{1}{r}$, to $g_\varepsilon(x) = 1$ dla $\|x\| \leq r$. Stąd dla $\varepsilon < \frac{1}{r}$

$$\|g_\varepsilon \cdot f - f\|_{\alpha, \beta} = \sup_{\|x\| > r} |x^\beta D^\alpha((g_\varepsilon - 1)f)| \leq \mu.$$

Pokazuje to, że funkcje $f \cdot g_\varepsilon$ dążą do f (w \mathcal{S}) przy $\varepsilon \rightarrow 0$. \blacksquare

Z gęstości omawianych włożeń wynika, że odwzorowania dualne do nich są też gęstymi włozeniami. Mamy zatem

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

przy czym włozenia są ciągłe i gęste.

DEFINICJA 19.28. Dystrybucje z przestrzeni $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nazywamy *dystrybucjami temperowanymi*.

Niech teraz $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i niech f będzie funkcją całkowalną na \mathbb{R}^n . Mamy z twierdzenia Fubinięgo

$$\begin{aligned} T_{\widehat{f}}(\varphi) &= \int \varphi(\xi) \left(\int f(x) \exp(-2\pi i x \cdot \xi) d^n x \right) d^n \xi = \\ &= \int f(x) \left(\int \varphi(\xi) \exp(-2\pi i x \cdot \xi) d^n \xi \right) d^n x = \int f \widehat{\varphi} = T_f(\widehat{\varphi}). \end{aligned}$$

Stąd definicja *transformaty Fouriera dla dystrybucji temperowanych* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (19.24)$$

Ponieważ transformata Fouriera jest ciągłą bijekcją $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to jest również ciągłą bijekcją przestrzeni dystrybucji temperowanych

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Jeżeli T ma zwarty nośnik, to

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi}) = (T \otimes T_\varphi)(e^{-2\pi i x \cdot \xi}).$$

Analogicznie jak w części 19.6.2. pokazujemy, że funkcja $\xi \rightarrow T(e^{-2\pi i x \cdot \xi})$ jest gładka. Mamy zatem

$$\widehat{T}(\varphi) = \int T(e^{-2\pi i x \cdot \xi}) \varphi(\xi) d^n \xi$$

i w konsekwencji, \widehat{T} jest funkcją gładką daną wzorem

$$\widehat{T}(\xi) = T(e^{-2\pi i x \cdot \xi}).$$

TWIERDZENIE 19.29. *Transformata Fouriera na przestrzeni dystrybucji temperowanych ma następujące własności:*

- (1) $\widehat{\widehat{T}} = \check{T}$, gdzie $\check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi})$.
- (2) $\mathcal{F}(D^\alpha T) = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}(T)$
- (3) $\mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha T) = D^\alpha \mathcal{F}(T)$
- (4) $\mathcal{F}(\tau_h T) = e^{-2\pi i \xi \cdot h} \mathcal{F}(T)$
- (5) $\mathcal{F}(e^{2\pi i x \cdot h} T) = \tau_h \widehat{T}$
- (6) Jeżeli $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, to $\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S) \cdot \mathcal{F}(T)$.

DOWÓD: Własności (1)–(3) wynikają natychmiast ze znanych już własności transformaty Fouriera funkcji.

(4) Mamy

$$\mathcal{F}(\tau_h T)(\varphi) = \tau_h T(\widehat{\varphi}) = T(\tau_h^* \widehat{\varphi}),$$

ale

$$\tau_h^* \widehat{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(x + h) = \int e^{-2\pi i(x+h) \cdot \xi} \varphi(\xi) d^n \xi = \mathcal{F}(e^{-2\pi i h \cdot \xi} \varphi)(x)$$

i stąd

$$\mathcal{F}(\tau_h T)(\varphi) = \mathcal{F}(T)(e^{-2\pi i h \cdot \xi} \varphi) = (e^{-2\pi i h \cdot \xi} \widehat{T})(\varphi).$$

(5) Wynika z poprzedniego i z pierwszego:

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i x \cdot h} T) = \mathcal{F}(e^{2\pi i x \cdot h} \widehat{\widehat{T}}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\tau_{-h} \widehat{T})) = \mathcal{F}(\mathcal{F}((\tau_h T)^\vee)) = \tau_h \widehat{T}.$$

(6) Mamy

$$\mathcal{F}(S * T)(\varphi) = (S * T)(\widehat{\varphi}) = (S \otimes T)(t^* \widehat{\varphi}).$$

ale

$$t^* \widehat{\varphi}(\xi, \eta) = \widehat{\varphi}(\xi + \eta) = \mathcal{F}(e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi)(\eta)$$

(transformata Fouriera ze względu na zmienną x) i stąd oraz z własności Fubinięgo (19.9)

$$\begin{aligned} (S \otimes T)(t^* \widehat{\varphi}) &= S(T(\mathcal{F}(e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi))) = S(\widehat{T}(e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi)) = \\ &= \widehat{T}(S(e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi)) = \widehat{T}(S(e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi)) = \widehat{T}(\widehat{S} \cdot \varphi) = (\widehat{S} \cdot \widehat{T})(\varphi), \end{aligned}$$

bo \widehat{S} jest funkcją gładką i $\widehat{S}(x) = S(e^{-2\pi i x \cdot \xi})$. ■

Przykłady:

(1) Niech $T = \delta_0$. Z definicji transformaty Fouriera

$$\widehat{\delta_0}(\varphi) = \widehat{\varphi}(0) = \int \varphi = T_1(\varphi).$$

Ponadto, ponieważ $\check{\delta}_0 = \delta_0$ dostajemy $\mathcal{F}(T_1) = \delta_0$. Mamy zatem

$$\widehat{\delta_0} = 1 \quad \widehat{1} = \delta_0.$$

(2) $T = T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$, gdzie

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{dla } x > 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Oznaczmy

$$f_R(x) = \begin{cases} f(x) & |x| < R \\ 0 & |x| > R \end{cases}$$

Mamy $T_{f_R} \rightarrow T_f$ w sensie \mathcal{S}' , zatem $\mathcal{F}(T_{f_R}) \xrightarrow{\mathcal{S}'} \mathcal{F}(T_f)$. f_R jest funkcją całkowalną, więc $\mathcal{F}(T_{f_R})$ jest funkcją daną wzorem

$$\widehat{f}_R(\xi) = - \int_{-R}^0 \exp(-2\pi i x \cdot \xi) dx + \int_0^R \exp(-2\pi i x \cdot \xi) dx = \frac{1}{\pi i \xi} (1 - \cos(2\pi R \xi)).$$

Stąd

$$\widehat{f}_R = \frac{1}{\pi i} \operatorname{vp} \left(\frac{1}{\xi} \right) - \frac{1}{\pi i} \operatorname{vp} \left(\frac{\cos(2\pi R \xi)}{\xi} \right).$$

Obie dystrybucje są z $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i dla $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \operatorname{vp} \left(\frac{\cos(2\pi R \xi)}{\xi} \right) (\varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos(2\pi R \xi)}{\xi} \varphi(\xi) d\xi + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos(2\pi R \xi)}{\xi} \varphi(\xi) d\xi \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \cos(2\pi R \xi) \frac{\varphi(\xi) - \varphi(-\xi)}{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi R \xi) g(\xi), \end{aligned}$$

gdzie

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\xi} (\varphi(\xi) - \varphi(-\xi)) & \text{dla } \xi \neq 0 \\ \varphi'(0) & \text{dla } \xi = 0. \end{cases}$$

Funkcja g jest różniczkowalna (l'Hospital) i jej pochodna jest całkowalna, więc funkcja $\xi \mapsto \widehat{g}'(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{g}(\xi)$ jest ograniczona. Stąd $\widehat{g}(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0$.

Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi R\xi) g(\xi) d\xi = \frac{1}{2}(\widehat{g}(R) + \widehat{g}(-R)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Oznacza to, że

$$\text{vp} \left(\frac{\cos(2\pi R\xi)}{\xi} \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

w przestrzeni \mathcal{S}' . Mamy więc

$$\mathcal{F}(\text{sgn}) = \frac{1}{\pi i} \text{vp} \left(\frac{1}{\xi} \right). \quad (19.25)$$

Natychmiast dostajemy stąd

$$\mathcal{F}(\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)) = -\pi i \text{sgn}. \quad (19.26)$$

(3) Obliczmy transformatę Fouriera funkcji Heaviside'a

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

W tym celu zauważmy, że $\theta(x) = \frac{1}{2}(\text{sgn}(x) + 1)$. Z poprzednich przykładów dostajemy

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2\pi i} \text{vp} \left(\frac{1}{\xi} \right). \quad (19.27)$$

(4) Niech χ_R oznacza funkcję charakterystyczną przedziału $[-R, R]$. Oczywiście, że $\chi_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1$ stąd $\mathcal{F}(\chi_R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \delta_0$. Ale $\widehat{\chi}_R$ jest funkcją gładką i

$$\widehat{\chi}_R(\xi) = \int_{-R}^R e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{\sin(2\pi R\xi)}{\pi\xi}.$$

Dostaliśmy w ten sposób nową regularyzację delty Diraca.

(5) Funkcja

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$$

jest lokalnie całkowalna i ma granicę w nieskończoności, więc jest dystrybucją temperowaną. Jej transformatę Fouriera obliczymy bezpośrednio, licząc całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(x\xi + y\eta)} \frac{1}{x + iy} dx dy$$

z wykorzystaniem Lematu Jordana. Dostajemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} \frac{1}{x + iy} dx = \begin{cases} 2\pi i e^{-2\pi i(-iy\xi)} & \text{dla } \xi < 0, y < 0 \\ -2\pi i e^{-2\pi i(-iy\xi)} & \text{dla } \xi > 0, y > 0 \\ 0 & \text{dla } \xi y < 0 \end{cases}$$

i następnie

$$2\pi i \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi i y \eta} e^{-2\pi y \xi} dy = \frac{-2\pi i}{2\pi(\xi + i\eta)} = \frac{-i}{(\xi + i\eta)} \quad \text{dla } \xi < 0,$$

oraz

$$-2\pi i \int_0^{-\infty} e^{-2\pi i y \eta} e^{-2\pi y \xi} dy = \frac{-2\pi i}{2\pi(\xi + i\eta)} = \frac{-i}{(\xi + i\eta)} \quad \text{dla } \xi < 0.$$

Ostatecznie,

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{i(\xi + i\eta)}. \quad (19.28)$$

19.10. Równania dystrybucyjne.

Dla ustalenia uwagi zajmować będziemy się przypadkiem $n = 1$.

Jak nam już wiadomo równanie $f' = 0$ ma tylko jedno (niezależne) rozwiązanie – funkcję stałą. Powstaje pytanie:

czy dopuszczenie do konkurencji dystrybucji powiększy zbiór rozwiązań?

Niech $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ i niech $T' = 0$. Z definicji pochodnej dystrybucji mamy dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$0 = T'(\varphi) = T(\varphi'),$$

czyli T zeruje się na pochodnych funkcji próbnych. Niech teraz $\int \varphi = 0$. Stąd funkcja

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy$$

ma zwarty nośnik i $\psi' = \varphi$. I na odwrót, jeżeli $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ i $\varphi = \psi'$, to $\int \varphi = 0$. Jeżeli zatem $\int \varphi = 0$, to $T(\varphi) = 0$. Wybierzmy funkcję próbną φ_0 taką, że $\int \varphi_0 = 1$. Dla dowolnej funkcji próbnej φ możemy zapisać

$$\varphi = (\varphi - c\varphi_0) + c\varphi_0.$$

Jeżeli wybierzemy $c = \int \varphi$, to całka z wyrażenia w nawiasie jest równa zero. Stąd

$$T(\varphi) = T(c\varphi_0) = cT(\varphi_0) = \int T(\varphi_0) \cdot \varphi,$$

czyli T jest funkcją stałą równą $T(\varphi_0)$.

Dopuszczenie do konkurencji znacznie szerszej klasy obiektów nie zwiększa rodziny rozwiązań równania $T' = 0$.

To samo równanie rozwiążmy inną metodą. Zakładając, że $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$, równanie $T' = 0$ możemy zapisać równoważnie $\xi\hat{T} = 0$. Stąd $\hat{T}(\varphi) = 0$ dla funkcji próbnych postaci $\varphi(\xi) = \xi\psi(\xi)$ i wniosek, że nośnik \hat{T} jest jednopunktowy (zero). Dowolną funkcję próbną φ zapisujemy jako sumę $\varphi(\xi) = (\varphi(\xi) - \varphi(0)) + \varphi(0)$. Pierwszy składnik można zapisać w postaci $\xi\psi(\xi)$, więc

$$\hat{T}(\varphi) = \varphi(0)\hat{T}(1),$$

co ma sens, bo nośnik \hat{T} jest jednopunktowy. Stąd $\hat{T} = \hat{T}(1)\delta_0$ i T jest funkcją stałą równą $\hat{T}(1)$. Dostaliśmy ten sam wynik, co poprzednio. Istotna różnica polega na tym, że za pierwszym razem dopuściliśmy do konkurencji dystrybucje z $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, a za drugim razem z $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$. Bywa, że jest to różnica istotna.

Niech $W(\lambda)$ będzie wielomianem. $W(D)$ jest operatorem różniczkowym o stałych współczynnikach. Rozważmy równanie

$$W(D)f(x) = b(x). \quad (19.29)$$

Rozwiązania tego równania możemy znaleźć znając rozwiązania (dystrybucyjne) równania

$$W(D)T = \delta_0. \quad (19.30)$$

Istotnie, jeżeli T spełnia to równanie, to $T*b$ spełnia (19.29):

$$W(D)(T*b) = (W(D)T)*b = \delta_0*b = b.$$

T nazywamy *rozwiązaniem podstawowym* operatora różniczkowego $W(D)$. Szukanie rozwiązań podstawowych przeprowadza się na ogół w obrazie fourierowskim: Transformacja Fouriera równania (19.30) daje równanie

$$W(2\pi i\xi)\hat{T} = 1.$$

A więc \hat{T} dostajemy „dzieląc” jedność przez funkcję wielomianową $W(2\pi i\xi)$. Dzielenie to jest niejednoznaczne.

Przykłady:

(1) Rozpatrzmy przypadek $W(x) = x$, tzn. równanie

$$f' = b.$$

Rozwiązanie fundamentalne T spełnia równanie

$$T' = \delta_0.$$

Równanie to rozwiążemy przechodząc do równania na transformaty Fouriera:

$$2\pi i\xi \widehat{T} = 1$$

Wynika stąd, że na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mamy $\widehat{T} = \frac{1}{2\pi i\xi}$. Trywialnie sprawdza się, że $\text{vp}\left(\frac{1}{2\pi i\xi}\right)$ jest rozwiązaniem na całym \mathbb{R} . Pozostałe rozwiązania dostaniemy dodając do $\text{vp}\left(\frac{1}{2\pi i\xi}\right)$ rozwiązanie równania jednorodnego

$$2\pi i\xi \widehat{T} = 0$$

lub równoważnie,

$$T' = 0.$$

Ostatecznie mamy

$$\widehat{T} = \text{vp}\left(\frac{1}{2\pi i\xi}\right) + c\delta_0$$

i z wzoru (19.27),

$$T = \frac{1}{2}\text{sgn} + c.$$

Wybierając $c = \frac{1}{2}$ dostajemy

$$f(x) = (b*T)(x) = \int_0^\infty b(x-y)dy = \int_{-\infty}^x b(y)dy.$$

Wybierając $c = -\frac{1}{2}$ mamy

$$f(x) = \int_{-\infty}^0 b(x-y)dy = -\int_x^\infty b(y)dy.$$

(2) Rozwiązanie fundamentalne operatora Cauchy'ego–Riemanna

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Sprawdzimy, że $\frac{1}{\pi z}$ jest rozwiązaniem fundamentalnym:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\pi z} (\varphi) = - \int \frac{1}{\pi z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi dx dy = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |z|} \frac{1}{\pi z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi dx \wedge dy$$

(obszar zorientowany kanonicznie), ale

$$\frac{1}{\pi z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi dx \wedge dy = \frac{1}{\pi z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi \frac{1}{2i} d\bar{z} \wedge dz = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{z} \varphi \right) d\bar{z} \wedge dz = \frac{1}{2\pi i} d \left(\frac{1}{\pi z} \varphi dz \right),$$

więc

$$\begin{aligned} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |z|} \frac{1}{\pi z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi dx \wedge dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{i}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{\varphi}{z} dz - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{\varphi}{z} dz \\ &= - \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \varphi(z) \frac{1}{z} dz = - \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} i \varphi(\varepsilon e^{i\theta}) d\theta = \varphi(0). \end{aligned}$$

Spróbujmy teraz znaleźć rozwiązanie fundamentalne operatora Cauchy'ego–Riemanna metodą transformacji Fouriera. Mamy do rozwiązania równanie

$$\pi i (\xi + i\eta) \widehat{T} = 1,$$

skąd widać, że jednym z rozwiązań jest funkcja $\frac{1}{\pi i (\xi + i\eta)}$ i korzystając z

(19.28) dostajemy $\frac{1}{\pi z}$ jako rozwiązanie fundamentalne operatora Cauchy'ego–Riemanna.

19.11. Dystrybucje okresowe na \mathbb{R}^1 . Szeregi Fouriera.

DEFINICJA 19.30. Dystrybucję $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ nazywamy *okresową o okresie* $h \in \mathbb{R}$, jeżeli $\tau_h T = T$.

W dalszym ciągu zajmować się będziemy, by nie rozpraszać uwagi, dystrybucjami o okresie 1. Oczywiście jest, że dystrybucja okresowa należy do $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$. Korzystając z punktu (4) Twierdzenia 19.29 możemy sformułować warunek okresowości dystrybucji w języku transformat Fouriera.

STWIERDZENIE 19.31. *Dystrybucja T jest okresowa o okresie 1 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\widehat{T} = e^{-2\pi i\xi} \widehat{T}. \quad (19.31)$$

Przyjrzyjmy się teraz warunkowi (19.31). Wynika z niego, że dla każdej funkcji próbnej φ

$$\widehat{T}(\varphi - e^{-2\pi i\xi} \varphi) = 0.$$

Jeżeli funkcja próbna φ jest taka, że $\text{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, to

$$\psi = (1 - e^{-2\pi i\xi})^{-1} \varphi \in \mathcal{S}, \quad \varphi = \psi - e^{-2\pi i\xi} \psi.$$

Mamy zatem dla takiej funkcji

$$\widehat{T}(\varphi) = \widehat{T}(\psi - e^{-2\pi i\xi} \psi) = 0.$$

Wynika stąd, że $\text{supp} \widehat{T} \subset \mathbb{Z}$.

Niech $k \in \mathbb{Z}$. Rozważmy dystrybucję \widehat{T} obcięta do $]k-1, k+1[$. Ustalmy funkcję $\varphi_0 \in \mathcal{D}(]k-1, k+1[)$ taką, że $\varphi_0(k) = 1$. Każdą funkcję $\varphi \in \mathcal{D}(]k-1, k+1[)$ możemy przedstawić w postaci sumy

$$\varphi = (\varphi - \varphi(k)\varphi_0) + \varphi(k)\varphi_0.$$

Pierwszy składnik w tej sumie zeruje się w k i, co łatwo sprawdzić, funkcja

$$\chi(\xi) = \begin{cases} (1 - e^{-2\pi i\xi})^{-1} (\varphi(\xi) - \varphi(k)\varphi_0(\xi)) & \text{dla } \xi \neq k \\ \frac{1}{2\pi i} (\varphi'(k) - \varphi(k)\varphi_0'(k)) & \text{dla } \xi = k \end{cases}$$

jest funkcją z $\mathcal{D}(]k-1, k+1[)$. Mamy zatem

$$\varphi(\xi) - \varphi(k)\varphi_0(\xi) = \chi(\xi) - e^{-2\pi i\xi} \chi(\xi)$$

i stąd

$$\widehat{T}(\varphi) = \widehat{T}(\varphi - \varphi(k)\varphi_0) + \varphi(k)\widehat{T}(\varphi_0) = \varphi(k)\widehat{T}(\varphi_0) = c_k \delta_k(\varphi),$$

gdzie $c_k = \widehat{T}(\varphi_0)$. Ostatecznie

$$\widehat{T} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_k,$$

zaś dla odwrotnej transformaty Fouriera mamy

$$T = \sum c_k \widehat{\delta}_k = \sum_k c_k \widehat{\tau_{-k} \delta_0} = \sum_k c_k e^{2\pi i k x}.$$

Wyrażenie po prawej stronie nazywa się *szeregiem Fouriera* dystrybucji okresowej. Sumowanie szeregu jest oczywiście w przestrzeni dystrybucji. Jako przykład weźmy dystrybucję $T = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_k$. Jest to dystrybucją okresową, więc $\widehat{T} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \delta_k$. Ale oprócz okresowości T mamy, że $e^{-2\pi ik} T = T$ i w konsekwencji, $\tau_k \widehat{T} = \widehat{T}$. Stąd wszystkie c_k są równe. Mamy więc $\widehat{T} = cT$. Aby wyznaczyć c obliczmy T na $h(x) = e^{-\pi x^2}$:

$$0 \neq T(h) = T(\widehat{h}) = \widehat{T}(h) = cT(h),$$

i stąd $c = 1$, czyli $\widehat{T} = T$.

Niech teraz $\varphi \in \mathcal{S}$. Mamy

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) = T(\varphi) = \widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(k).$$

Wykazaliśmy więc następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 19.32 (WZÓR SUMACYJNY POISSON'A). *Dla każdej funkcji φ z przestrzeni $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zachodzi równość*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(k). \quad (19.32)$$

19.12. Dodatkowe informacje o transformacji Fouriera.

Lemat Riemanna–Lebesgue'a. Wiemy, że transformata Fouriera funkcji całkowalnej jest ciągła i ograniczona. Co więcej,

STWIERDZENIE 19.33 (LEMAT RIEMANNA–LEBESGUE'A). *Dla funkcji f całkowalnej w sensie Lebesgue'a mamy*

$$\widehat{f}(\xi) \xrightarrow{\|\xi\| \rightarrow \infty} 0.$$

DOWÓD: Wiadomo z analizy, że każdą funkcję całkowalną można przybliżyć (względem normy całkowej) funkcjami z $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Niech więc funkcje $f_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ będą takie, że

$$\int |f - f_m| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Mamy zatem

$$\left| \widehat{f}(\xi) - \widehat{f}_m(\xi) \right| \leq \int |e^{-2\pi i x \cdot \xi}| |f(x) - f_m(x)| d^n x = \int |f - f_m| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem ciąg (\widehat{f}_m) jest zbieżny jednostajnie do \widehat{f} . Dla każdego ε istnieje n_ε takie, że $|\widehat{f}_{n_\varepsilon}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| < \varepsilon/2$. Ale $\widehat{f}_{n_\varepsilon} \in \mathcal{S}$, więc istnieje r_ε takie, że $|\widehat{f}_{n_\varepsilon}(\xi)| < \varepsilon/2$ dla $\|\xi\| > r_\varepsilon$. Stąd $|\widehat{f}(\xi)| < \varepsilon$ dla takich ξ . ■

Transformacja Fouriera na $L^2(\mathbb{R}^n)$. W przestrzeni funkcji o wartościach zespolonych, mierzalnych w sensie Lebesgue'a na \mathbb{R}^n i których kwadrat modułu jest całkowny na \mathbb{R}^n , wprowadzamy relację równoważności. Dwie funkcje są równoważne, jeżeli różnią się na zbiorze miary zero. Przestrzeń klas równoważności jest przestrzenią wektorową, oznaczaną $L^2(\mathbb{R}^n)$. Przestrzeń ta, z iloczynem skalarnym

$$(f|g) = \int f\bar{g}$$

jest przestrzenią Hilberta. W szczególności funkcje z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wyznaczają jednoznacznie elementy z $L^2(\mathbb{R}^n)$. Jeżeli $f, g \in \mathcal{S}$, to mamy równości

$$\widehat{\bar{g}} = \check{\widehat{g}}, \quad \text{oraz} \quad \widehat{\widehat{g}} = \check{\check{\widehat{g}}} = \bar{g},$$

a stąd i z Twierdzenia 19.25

$$(\widehat{f}|\widehat{g}) = \int \widehat{f} \cdot \check{\widehat{g}} = \int f \cdot \widehat{\bar{g}} = \int f \cdot \bar{g} = (f|g).$$

Jesteśmy więc o krok od następującego twierdzenia:

Twierdzenie 19.34 (Plancherela). *Transformacja Fouriera jest izometryczna na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i daje się rozszerzyć do operatora unitarnego w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Rozszerzenie to jest niezależne od rozszerzenia transformacji Fouriera na dystrybucje. Ponieważ elementy z L^2 są dystrybucjami temperowanymi, więc trzeba sprawdzić, że oba rozszerzenia dają ten sam wynik. Jest to prosty fakt, jego dowód wymaga jednak elementarnej wiedzy o przestrzeniach Hilberta.

! TO BY BYŁO NA TYLE.