Pytania z Analizy I C.

Wykład SLW
w semestrze zimowym 2004/05.

1. Zbiory, iloczyn kartezjański, relacje, odwzorowania. Relacja równoważności.
2. Aksjomatyka teorii liczb rzeczywistych. Przykłady rozumowań w których wykorzystuje się aksjomaty Archimedesa i ciągłości.
3. Kresy górne i dolne zbiorów liczb rzeczywistych. Twierdzenie o istnieniu kresów i jego zastosowania.
4. Przestrzenie metryczne. Definicja i przykłady. Przestrzenie $\mathbb{R}^N$.
5. Kule w przestrzeniach metrycznych. Pojęcie zbioru otwartego. Przykłady. Własności klasy zbiorów otwartych.
6. Zbiory domknięte. Definicja i przykłady. Własności klasy zbiorów domkniętych.
7. Granice ciągu punktów przestrzeni metrycznej. Jednoznaczność granicy. Twierdzenie o granicy ciągu punktów zbioru domkniętego.
8. Ciągi mające własność Cauchy'ego. Przestrzenie metryczne zupełne.
9. Zbiory skierowane i ciągi uogólnione. Przykłady.
10. Odcinki w przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Zbiory otwarte i domknięte w $\mathbb{R}$.
11. Twierdzenie o monotonicznych ciągach liczb rzeczywistych.
12. Twierdzenie o trzech ciągach.
13. Zupełność przestrzeni $\mathbb{R}$. Przykłady przestrzeni zupełnych.
14. Iloczyn kartezjański przestrzeni metrycznych. Otoczenia punktów w iloczynie kartezjańskim.
15. Podprzestrzenie przestrzeni metrycznych. Względność pojęć topologicznych. Ciągłość zanurzenia.
16. Ciągłość odwzorowania w punkcie. Definicja i własności charakterystyczne.
17. Odwzorowania ciągłe. Przykłady. Superpozycja odwzorowań ciągłych. Iloczyn kartezjański odwzorowań ciągłych.
18. Ciągłość działań arytmetycznych. Algebra funkcji ciągłych.
19. Podciągi i ich granice. Definicja zbioru zwartego. Iloczyn kartezjański zbiorów zwartych.
20. Własności zbiorów zwartych. Odwzorowania ciągłe i zbiory zwarte.

21. Odwzorowania jednostajnie ciągłe. Definicja i przykłady.
22. Pokrycia otwarte, a zbiory zwarte.
23. Zwartość odcinka $[a, b]$ (gdzie $a, b \in \mathbb{R}$). Zbiory zwarte w $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^N$.
24. Zbiory spójne. Zbiory spójne w $\mathbb{R}$.
25. Zbiory spójne i odwzorowania ciągłe. Własność Darboux funkcji ciągłych. Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej do różnowartościowej rzeczywistej funkcji ciągłej określonej na $]a, b[$.
26. Funkcje różniczkowalne i pochodna funkcji. Funkcje klasy $\mathcal{C}^k$ i funkcje gładkie.
27. Pochodna sumy, iloczynu i ilorazu funkcji różniczkowalnych. Pochodna wielomianu i funkcji wymiernej.
28. Pochodna superpozycji funkcji różniczkowalnych.
29. Twierdzenie Rolle'a. Wzór Lagrange'a i Cauchy'ego. Zastosowania.
30. Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej.
31. Wzór Taylora i jego postać dla przykładowych funkcji.
32. Zastosowania wzoru Taylora. Ekstrema funkcji.
33. Reguły de l'Hospitale'a. Nieoznaczoności typu $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Przykłady.
34. Zbiory i funkcje wypukłe. Własności funkcji wypukłych.
35. Sumy Riemanna. Definicja całki.
36. Całkowalność funkcji ciągłych.
37. Całka pochodnej funkcji klasy $\mathcal{C}^1$.
38. Własności całki. Twierdzenie o wartości średniej rachunku całkowego.
39. Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.
40. Całkowanie przez części i przez podstawienie. (Formy różniczkowe, narazie tylko dla chętnych).
41. Logarytm. Definicja i własności.
42. Funkcja wykładnicza i jej własności. Liczba e. Przykłady granic, które wyrażają sie przez liczbę e. Nieoznaczoności typu 1^∞, ∞^0 i 0^0.
43. Wzór i szereg Taylora dla funkcji wykładniczej.
44. Wypukłość funkcji wykładniczej i oszacowania stąd wynikające.
45. Szeregi o elementach dodatnich i kryteria zbieżności.
46. Całkowe kryterium zbieżności szeregu.
47. Szeregi o elementach zespolonych. Szeregi zbieżne bezwzględnie.
48. Działania na szeregach. Mnożenie szeregów.

49. Przechodzenie do granicy pod znakiem sumy nieskończonej. Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności majoryzowalnej.
50. Szeregi funkcyjne. Różniczkowanie szeregów.
51. Funkcja wykładnicza argumentu zespolonego. Definicja i własności.
52. Funkcje trygonometryczne. Definicja i własności. Pochodne funkcji trygonometrycznych.
53. Liczba π. Definicja. Wzór $e^{i\pi} = -1$. Obliczanie liczby π.
54. Zgodność definicji sinusa i kosinusa podanych na wykładzie z definicjami znanymi ze szkoły.
55. Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych. Wzory na pochodne.
56. Całkowanie funkcji wymiernych.
57. Całkowanie funkcji wymiernych od funkcji trygonometrycznych.
58. Całkowanie najprostszych niewymierności. Podstawienia Eulera.