ANALIZA III "C"
17.01.2006

1. Znaleźć transformaty Fouriera następujących funkcji w $\mathbb{R}$:

   (a) $f(x) = \chi_{[a,b]}$; tu χ_A – *funkcja charakterystyczna* zbioru A, tzn. $\chi_A(x) = 1$, gdy $x \in A$ oraz $\chi_A(x) = 0$, gdy $x \notin A$.

   (b) $f(x) = \chi_{[-a,a]}$;

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$;

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + a^2)^3}$;

   (e) $f(x) = 1 - x^2$ dla $|x| < 1$, $f(x) = 0$ dla $|x| \geqslant 1$;

   (f) $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$;

   (g) $f(x) = \dfrac{1}{\cosh ax}$;

   (h) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 + a^2)^2}$;

   (i) $f(x) = x^3 e^{-ax^2}$, $a > 0$;

   (j) $f(x) = \dfrac{x}{\sinh ax}$;

   (k) $f(x) = \theta(x) e^{-ax}$, $a > 0$.

2. Niech P – wielomian rzeczywisty stopnia $2m$, nie posiadający pierwiastków rzeczywistych.

   (a) Pokazać że przekształcenie Fouriera funkcji $f(x) = 1/P(x)$ jest funkcją różniczkowalną nieskończenie wiele razy z wyjątkiem $k = 0$.

   (b) Pokazać, że $\hat{f}(k)$ posiada w punkcie $k = 0$ pochodne jednostronne wszystkich rzędów.

   (c) Jaki jest rząd gładkości $\hat{f}(k)$ (tzn. liczba pochodnych ciągłych)?

   Wsk. a), b). Skorzystać z wyniku zad. 1 c) i rozkładu $f(x)$ na ułamki proste.

3. Niech $f \in L^1(\mathbb{R})$ – funkcja wymierna. Pokazać, że dla pewnych stałych $c > 0$, $\epsilon > 0$ zachodzi oszacowanie: $|\hat{f}(k)| \leqslant c e^{-\epsilon k}$, $k \in \mathbb{R}$.

4. Znaleźć sploty $f_1 * f_2$ następujących par funkcji w $\mathbb{R}$:

   (a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2 + b^2}$;

   (b) $f_1(x) = e^{-x^2/2a}$, $f_2(x) = e^{-x^2/2b}$.

5. Znaleźć transformaty Fouriera następujących funkcji w $\mathbb{R}^3$. Poniżej: $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{r^2 + a^2}$;

(b) $f(x) = e^{-ar^2}$, $a > 0$;

(c) $f(x) = e^{-(x,Ax)}$. Tu A jest dodatnio określoną macierzą symetryczną, $(\cdot|\cdot)$ – standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$.

6. Wykorzystując wzór sumacyjny Poissona, znaleźć następujące sumy szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+a)(n+b)}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

7. Znaleźć rozwiązanie równania Poissona w $\mathbb{R}^3$:

$$\Delta\psi(x) = \rho(x),$$

gdzie: Δ – laplasjan, $\rho(x)$ jest funkcją całkowalną.

Wsk. Obliczyć transformatę Fouriera obu stron i obliczyć $\hat{\psi}(k)$. Następnie zastosować odwrotną transformatę Fouriera do $\hat{\psi}(k)$, aby dostać funkcję $\psi(k)$.

Interpretacja fizyczna. Równanie Poissona daje potencjał elektrostatyczny $\psi(x)$ przy zadanym rozkładzie ładunku $\rho(x)$.

8. Niech $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Znaleźć rozwiązanie $\psi(x,t)$ równania przewodnictwa cieplnego w $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

z warunkiem początkowym $\psi(0,x) = \psi_0(x)$. Podać jawną postać rozwiązania dla $\psi_0(x) = e^{-ax^2}$.

9. Zrobić to samo co w powyższym zadaniu dla jednowymiarowego *równania Schrödingera*:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$