

Zadania z Analizy „C”, seria nr 2.

Zadanie 1: Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad \mathbb{R} (lub \mathbb{C}). Powiemy, że p -forma $\alpha \in \Lambda^p(V^*)$ jest *prosta*, jeśli istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in V^*$ takie, że $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$.

- (a) Udowodnij, że jeśli $\alpha \in \Lambda^p(V^*)$ jest prosta i $\beta \in V^*$ spełnia $\beta \wedge \alpha = 0$, to istnieje $\alpha' \in \Lambda^{p-1}(V^*)$ taka, że $\alpha = \alpha' \wedge \beta$.
- (b) Wykaż, że jeśli $n = \dim V$, to każda $(n-1)$ -forma jest prosta.
- (c) Udowodnij, że 2-forma ω jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega \wedge \omega = 0$.

Uwaga: Ostatni punkt wynika łatwo z faktu, że dla każdej 2-formy ω istnieją liniowo niezależne $\theta_1, \dots, \theta_{2r} \in V^*$ takie, że $\omega = \theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4 + \dots + \theta_{2r-1} \wedge \theta_{2r}$.

Zadanie 2: Oblicz pochodną zewnętrzną następujących form różniczkowych na \mathbb{R}^3 :

- (a) $\omega(x, y, z) = \frac{1}{1+x^2} dy + \sqrt{1+e^{xy}} dx$;
- (b) $\omega(x, y, z) = \sin(xy) dy \wedge dz + e^{x^2-y^2-z^2} dx \wedge dz$.

Zadanie 3: Sprawdzić, że $\omega \in \Omega^2(\mathcal{O})$ jest zamknięta i znaleźć $\eta \in \Omega^1(\mathcal{O})$ taką, że $\omega = d\eta$.

- (a) $\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\}$,
 $\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$;
- (b) $\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0, z > 0\}$,
 $\omega = \frac{f(xz, yz)}{\sqrt{x^2+y^2}} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx - z dx \wedge dy)$, (f – ustalony element $C^\infty(\mathbb{R}^2)$);
- (c) $\mathcal{O} = \mathbb{R}^3$,
 $\omega = \frac{\partial a}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge dx - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) dx \wedge dy$ (a, b – ustalone elementy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$).

Zadanie 4: Znajdź $\Phi^*\omega$, jeśli

- (a) $\Phi : \mathbb{R} \ni x \mapsto (x, x^3, \cos x) \in \mathbb{R}^3$,
 $\omega(y_1, y_2, y_3) = y_1 \exp(-y_2 - y_3) dy_1 \wedge dy_3$;
- (b) $\Phi : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (1, 2^{x_1 x_2}, x_1 x_2) \in \mathbb{R}^3$,
 $\omega(y_1, y_2, y_3) = y_2 dy_2 \wedge dy_3 + dy_1 \wedge dy_3$;
- (c) $\Phi : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + 2 \in \mathbb{R}$,
 $\omega(y) = (1 + y^2) dy$;
- (d) $\Phi : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto Ax + x_0 \in \mathbb{R}^N$ (A – macierz nieosobliwa, x_0 – ustalony punkt \mathbb{R}^N),
 $\omega(x) = f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ ($k \leq N$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$, $i_r \neq i_s$ dla $r \neq s$).

Zadanie 5: Ustalmy $N \in \mathbb{R}$. W zbiorze $\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}$ wprowadźmy relację równoważności: $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $t \in \mathbb{R}$ takie, że $x = ty$. Niech $\mathbb{RP}(N)$ będzie zbiorem klas abstrakcji tej relacji, a $\pi : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{RP}(N)$ kanonicznym odwzorowaniem $x \mapsto [x]$. Na $\mathbb{RP}(N)$ zadajemy topologię tak: $\mathcal{U} \subset \mathbb{RP}(N)$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ jest otwarty w \mathbb{R}^{N+1} . Wykaż, że $\mathbb{RP}(N)$ jest zwartą rozmiotocia (najlepiej konstruując atlas klasy C^∞).