

Seria zadań z Analizy III C, październik 2005

1. Obliczyć całki:

(a) $\int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$;

(b) $\int_0^{\pi/2} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$ ($|a| < 1$).

2. Zbadać, czy następujące całki są jednostajnie zbieżne w odpowiednim przedziale:

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$ ($0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$);

(b) $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-\alpha x} dx$ ($0 \leq \alpha \leq b$);

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$ ($0 \leq \alpha \leq +\infty$);

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx$ ($0 \leq p \leq 10$).

3. Wykazać wzór Frullani'ego:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0),$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą a całka $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ istnieje dla dowolnego $A \geq 0$. Stosując wzór Frullani'ego obliczyć:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

4. Obliczyć całki, uzasadniając możliwość różniczkowania względem parametru:

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$ ($\alpha > 0, \beta > 0$);

(b) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx$ ($\alpha > 0, \beta > 0$);

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx$ ($\alpha > 0, \beta > 0$);

(d) $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$ ($|\alpha| \leq 1$).

5. Obliczyć całkę Eulera–Poissona

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

opierając się na wzór

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy.$$

Korzystając z całki Eulera–Poissona, obliczyć:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx$ ($a > 0, ac - b^2 > 0$);

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$ ($\alpha > 0, \beta > 0$).