

**Zadania z Analizy II C. Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych. Marzec 2005.**

1. Zbadać różniczkowalność funkcji

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \|x\| := \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

2. Sprawdzić, że funkcja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  ma wszystkie pochodne kierunkowe w  $(0, 0)$ , lecz nie jest tam różniczkowalna.

3. Niech  $f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Pokazać, że  $f$  posiada pochodne cząstkowe, nieciągłe w  $(0, 0)$ , ale jest tam różniczkowalna.

4. Pokazać, że dla funkcji  $f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  mamy  $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial f(0,0)}{\partial y \partial x}$ . Sprawdzić nieciągłość mieszanych pochodnych w  $(0, 0)$ .

5. Udowodnić różniczkowalność następujących odwzorowań:

(a)  $C([0, 1]) \ni f \mapsto \int_0^1 f^n(t) dt \in \mathbb{R}$ ;

(b)  $C([0, 1]) \ni f \mapsto g \in C([0, 1]), g(t) := \int_0^1 f^3(tx) dx$ .

6. Znaleźć pochodne cząstkowe rzędu 1 i 2 superpozycji funkcji:

(a)  $f(x^2 + y^2 + z^2)$ ;

(b)  $f(x, \frac{x}{y})$ ;

(c)  $f(x, xy, xyz)$ .

7. Obliczyć macierz Jacobi'ego superpozycji  $T \circ S$  dwóch odwzorowań i sprawdzić, że  $(T \circ S)_{ij} = \sum_k T_{ik} S_{kj}$ , jeśli:

(a)  $S : \mathbb{R} \ni x \mapsto (x, \ln(1 + x^4)) \in \mathbb{R}^2$   
 $T : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (\sin x, e^{x+y}, 1) \in \mathbb{R}^3$ ;

(b)  $S : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (xy, x + y, \sin \pi y) \in \mathbb{R}^3$   
 $T : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -y) \in \mathbb{R}^2$ .

8. Wykazać, że funkcja  $u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  ( $a$  i  $b$  - stałe) spełnia równanie Laplace'a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

9. Niech  $u = f(r)$ , gdzie  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  i  $f$  jest funkcją klasy  $C^2$ . Pokazać, że  $\Delta u = F(r)$ , gdzie  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ , i znaleźć funkcję  $F$ .

10. Wprowadzając nowe zmienne  $\xi$  i  $\eta$  rozwiązać równanie:

(a)  $z_x = z_y$ , jeśli  $\xi = x + y, \eta = x - y$ ;

- (b)  $yz_x - xz_y = 0$ , jeśli  $\xi = x, \eta = x^2 + y^2$ ;
- (c)  $az_x + bz_y = 1$  ( $a \neq 0$ ), jeśli  $\xi = x, \eta = y - bz$ ;
- (d)  $xz_x + yz_y = z$ , jeśli  $\xi = x, \eta = y/x$ ;
- (e)  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ , jeśli  $\xi = x - at, \eta = x + at$ .

11. Zapisać następujące wyrażenia we współrzędnych biegunowych  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ :

- (a)  $w = (u_x)^2 + (u_y)^2$ ;
- (b)  $w = u_{xx} + u_{yy}$ .

12. Pokazać, że postać równania Laplace'a  $\Delta z \equiv z_{xx} + z_{yy} = 0$  nie zmienia się przy dowolnej zamianie zmiennych  $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ , spełniającej warunki

$$\varphi_u = \psi_v, \varphi_v = -\psi_u.$$

13. Zapisać trójwymiarowy operator Laplace'a  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$  we współrzędnych sferycznych  $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ .