

Zadania z Analizy III-C, seria 4, listopad 2005r.

1. Wykazać, że następujące przestrzenie są rozmaitościami:

- (a) sfera $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$;
- (b) przestrzeń rzutowa $\mathbb{R}P^n$, czyli przestrzeń wszystkich podprzestrzeni 1-wymiarowych w \mathbb{R}^{n+1} wyposażona w topologię, w której zbiory otwarte są obrazami zbiorów otwartych za pomocą rzutu $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ odnoszącego punktowi na sferze podprzestrzeń, przechodzącą przez ten punkt;
- (c) torus 2-wymiarowy $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (grupę ilorazową $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ wyposażamy w topologię, w której zbiory otwarte są obrazami zbiorów otwartych w \mathbb{R}^2 za pomocą rzutu $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$).

Wykazać gładkość odwzorowań p i P .

2. Udowodnić, że na sferze nie istnieje atlasu, składającego się z jednej mapy.

3. Pokazać, iż rzut stereograficzny sfery na płaszczyznę styczną z punktu przeciwległego punktowi styczności (bieguna), jest dyfeomorfizmem wszędzie z wyjątkiem bieguna.

4. Niech $B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < a\}$ kula otwarta o promieniu a w \mathbb{R}^n . Wykazać, że odwzorowanie $f(x) = ax/\sqrt{a^2 - \|x\|^2}$ jest dyfeomorfizmem kuli B na \mathbb{R}^n .

5. Podać przykład gładkiej bijekcji pomiędzy rozmaitościami, nie będącej dyfeomorfizmem.

6. Niech torus $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ utworzony jest obrotem okręgu dookoła osi (włożenie standardowe). Wykazać, że współrzędne x, y, z są gładkimi funkcjami na torusie.

7. Zbadać, czy orientowalne są rozmaitości:

- (a) S^n ;
- (b) $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$;
- (c) $\mathbb{R}P^n$.

8. Z jaką rozmaitością homeomorficzny jest zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 (prostych afinicznych, czyli nie koniecznie przechodzących przez zero).

9. Sprawdzić Twierdzenie Stokesa:

- (a) $\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^2), \omega = x + y, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$;
- (b) $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2), \omega = 2xdy + dx, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 3| \leq 3, |y| \leq 2, x^2 + 4y^2 \geq 4\}$;
- (c) $\omega \in \Omega^0(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}), \omega = \ln(x + y + z), M = \Gamma, \Gamma := [1, 2] \ni t \rightarrow (t + 1, t^4, 4t) \in \mathbb{R}^3$;
- (d) $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3), \omega = x^2dy + y^2dx, M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

10. Obliczyć $\int_S \omega$:

- (a) $\omega(x, y, z) = zdx \wedge dy + \frac{1}{2}zx^2dy \wedge dz + xyzdx \wedge dz, S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

- (b) $\omega(x, y, z) = z^2 \left(\frac{dy \wedge dz}{\sqrt{(y-4)^2 + z^2}} + \frac{dz \wedge dx}{\sqrt{(x-4)^2 + z^2}} \right)$ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 9\}$;
- (c) $\omega(x, y, z) = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$; orientację na S zadajemy przez wektor normalny $\vec{n} = \frac{1}{r} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial z})$;
- (d) $\omega(x, y, z) = z dx \wedge dy + \frac{1}{2} z x^2 dy \wedge dz + x y z dx \wedge dz$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \in \{1, 9\}, z \geq -\frac{1}{2}\}$; $\vec{n} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z})$.