1. Znaleźć punkty krytyczne, zbadać czy funkcja ma w tych punktach ekstremum i jakiego typu:

   (a) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{50}{y} \quad (x > 0, y > 0)$;

   (b) $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a > 0, b > 0)$;

   (c) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$;

   (d) $xy^2z^3(a - z - 2y - 3z) \quad (a > 0)$;

   (e) $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n} \quad (x_i > 0, i = 1, \ldots, n)$.

2. Znaleźć punkty krytyczne funkcji uwikłanej $z(x, y)$ zadanej przez następujące równania, zbadać czy ma ona w tych punktach ekstremum i jakiego typu:

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$;

   (b) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$;

   (c) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

3. Zbadać ekstrema warunkowe funkcji $u$:

   (a) $u = x - 2y + 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

   (b) $u = x^2 + y^2 + z^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0)$;

   (c) $u = xy^2z^3, x + 2y + 3z = a \quad (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0)$;

   (d) $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0 \quad (a > b > c > 0, \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$;

   (e) $u = \sum_{i,j}^n a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji}), \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.

4. Wykazać nierówność Höldera

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i \leqslant (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^n x_i^q)^{1/q} \ (a_i \geqslant 0, x_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

   *Wskazówka:* Szukać ekstremum funkcji $u(x) = (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^n x_i^q)^{1/q}$ przy warunku $\sum_{i=1}^n a_ix_i = A$.