

ANALIZA I “C”

Lista nr 1 (zbiory & indukcja)

1. Znaleźć ogólne rozwiązanie równania różniczkowego:
 $y'' + y = e^{-x} - 2 \sin x$.

2. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{\sin x}$$

Wskazówka: Sprowadzić równanie drugiego rzędu do układu równań pierwszego rzędu i rozwiązać.

3. Znaleźć ogólne rozwiązania równań różniczkowych: a) $y' + 2y = 4x$; b) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$; c) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; d) $(1 - x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

Uwaga. W tym zadaniu i poniższych, $y' = \frac{dy}{dx}$.

4. Znaleźć ogólne rozwiązania równań różniczkowych: a) $xyy' = 1 - x^2$; b) $yy' = \frac{1-2x}{y}$; c) $xy' + y = y^2$.

5. Znaleźć rozwiązania równań różniczkowych, spełniające dany warunek początkowy: a) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$; b) $y' \sin x = y \ln y$, $y(\frac{\pi}{2}) = e$.

6. Znaleźć rozwiązanie układu równań:

$$\dot{x} = y + z$$

$$\dot{y} = z + x$$

$$\dot{z} = x + y$$

z warunkami początkowymi: $x(0) = -1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

7. 2p. Podać ogólne rozwiązanie równania

$$x'' - x' - 2x = \sin ht + t.$$

8. 4p. Podać układ fundamentalny (rozwiązanie ogólne) układu równań:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= x + 3y - z \\ \dot{z} &= -x + 2y + 3z\end{aligned}$$

9. Pokazać, że funkcja

$$u(x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}},$$

spełnia *równanie różniczkowe Bessela*:

$$xu'' + u' + xu = 0$$

10. Znaleźć rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y + 7z \\ \dot{y} &= 2x + 2z \\ \dot{z} &= 7x + 2y\end{aligned}$$

z warunkiem początkowym: $x(0) = 0, y(0) = 5, z(0) = 2$

11. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f(x)$ na \mathbf{R} , spełniające warunek:

$$\int_0^x (x-t-1)f(t)dt = 2x$$

Wskazówka. Sprowadzić zagadnienie do równania różniczkowego.