ANALIZA III "C"
Lista nr 3, 28.10.2005

1. Wyrazić we współrzędnych cylindrycznych (ρ, θ, φ) i sferycznych (r, θ, φ) następujące formy różniczkowe na $\mathbb{R}^3$:

$$a)\ \sigma_1 := x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x; \quad b)\ \sigma_2 := \frac{1}{\rho}(xz\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}y - \rho^2\,\mathrm{d}z);$$

$$c)\ \omega_1 := \frac{1}{r^3}(x\,\mathrm{d}y\bigwedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\bigwedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\bigwedge\mathrm{d}y); \quad d)\ \omega_2 := \frac{1}{z}(x\,\mathrm{d}y\bigwedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\bigwedge\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}x\bigwedge\mathrm{d}y).$$

2. Obliczyć $\varphi^\star\omega$, jeśli $\varphi : \mathbb{R}^4_+ \to \mathbb{R}^3_+$, $\varphi(p,q,r,s) := (pq, qr, rs)$ oraz $\omega := x\,\mathrm{d}y\bigwedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\bigwedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\bigwedge\mathrm{d}y$.

3. Sprawdzić, że dana 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathcal{O})$ jest zamknięta i znaleźć 0-formę pierwotną (tzn. funkcję f taką, że $\omega = \mathrm{d}f$).

$$a)\ \mathcal{O} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\},\ \omega = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2x^2 - xy + y^2};$$

$$b)\ \mathcal{O} = \mathbb{R}^2,\ \omega = \frac{\mathrm{d}x + \cos^2 x\mathrm{d}y}{1 + y\sin 2x + y^2\cos^2 x};$$

$$c)\ \mathcal{O} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z > 0\},\ \omega = \frac{yz\mathrm{d}x - x\log x(z\mathrm{d}y + 2y\mathrm{d}z)}{xy^2z^3};$$

$$d)\ \mathcal{O} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \neq (0,0,0)\},\ \omega = \frac{(x^2+y^2)\mathrm{d}z - z(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

4. Sprawdzić, że dana 2-forma $\omega \in \Omega^2(\mathcal{O})$ jest zamknięta i znaleźć 1-formę pierwotną (tzn. formę $\eta \in \Omega^1(\mathcal{O})$ taką, że $\omega = \mathrm{d}\eta$).

$$a)\ \omega := \frac{\partial a}{\partial z}\mathrm{d}y\bigwedge\mathrm{d}z + \frac{\partial b}{\partial x}\mathrm{d}z\bigwedge\mathrm{d}x - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\bigwedge\mathrm{d}y$$

tu a, b – funkcje gładkie;

$$b)\ \omega := \frac{1}{r^3}(x\,\mathrm{d}y\bigwedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\bigwedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\bigwedge\mathrm{d}y), \quad \mathcal{O} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\};$$

$$c)\ \omega := \frac{1}{xy^2z}(zt\mathrm{d}x\bigwedge\mathrm{d}y + tx\mathrm{d}y\bigwedge\mathrm{d}z + xy\mathrm{d}z\bigwedge\mathrm{d}t + yz\mathrm{d}t\bigwedge\mathrm{d}x),\ \mathcal{O} = \mathbb{R}^4_+.$$