

Zadania domowe do wykładu Algebra B

Seria 1, 16.10.2003

- Przedstawić w postaci $a + bi$ podane liczby zespolone:
a) $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$; b) $(1 - i)^3$; c) $(1 + i)^5$; d) $(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$; e) $(3 + i)^3 + (3 - i)^3$; f) i^{98} ; g) i^{77} ; h) i^{-57} ; i) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; j) $\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$, $n \in \mathbf{N}$ k) $(1 + i)^{8n}$, $n \in \mathbf{Z}$; l) $(1 - i)^{4n}$, $n \in \mathbf{Z}$; ;
- Rozwiązać równania:
a) $z^2 = i$; b) $z^2 = 3 - 4i$; c) $z^2 = 5 - 12i$; d) $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$; e) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$
- Obliczyć moduły liczb:
a) $\sqrt{3} - i$; b) $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$, $\lambda \in \mathbf{R}$; c) $(1 + i)^{99}$; d) $(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{2002}$
- Rozwiązać równania:
a) $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$; b) $i(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 3$. ;
- Rozwiązać układy równań:
a)
$$\begin{cases} (1 + i)z_1 + (1 - i)z_2 = 1 + i \\ (1 - i)z_1 + (1 + i)z_2 = 1 + 3i \end{cases} \quad \begin{cases} 2z_1 - (2 + i)z_2 = -i \\ (4 - 2i)z_1 - 5z_2 = -1 - 2i \end{cases}$$
- Udowodnić równość:
 $\forall u, v \in \mathbf{C} : |u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$
Jakie jest jej geometryczne znaczenie?
- Wyrazić w postaci wielomianów od $\sin x$ i $\cos x$ funkcje:
a) $\sin 4x$; b) $\cos 4x$; c) $\sin 5x$; d) $\cos 5x$.
- Wykazać równości:

(a)

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(nx/2) \cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z};$$

(b)

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin(nx/2) \sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z};$$

(c)

$$x^{2n+1} - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi k}{2n+1} + 1 \right);$$

(d)

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi k}{2n} + 1 \right)$$