ANALIZA II "C"
Lista nr 1 (całki – ciekawostki), 24.02.2005

1. Obliczyć całki:
   a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$ *Wsk.* I. podstawienie Eulera;
   b) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$ *Wsk.* III. podstawienie Eulera.

2. Obliczyć całkę:
   $I_r = \int\limits_0^\pi \log(1-2r\cos x + r^2)dx$, $|r| \neq 1$. *Wsk.* Obliczyć całkę *z definicji*, dzieląc przedział całkowania na n równych części, skorzystać z wzoru: $z^{2n} - 1 = (z^2-1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2z\cos\frac{k\pi}{n} + z^2\right)$ dla $z \in \mathbf{C}$ (jeśli ktoś nie zna to proszę tę tożsamość pokazać) i przejść z n do nieskończoności. *Odp.* $I_r = 0$ dla $|r| < 1$, $I_r = 2\pi\log|r|$ dla $|r| > 1$.

3. Obliczyć całkę:
   $I = \int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$. *Wsk.* Podstawić $x = \pi - t$ i porównać wyrażenia przed podstawieniem i po. *Odp.* $I = \frac{\pi^2}{4}$.

4. Obliczyć całkę:
   $J = \int\limits_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$. *Wsk.* Podstawić $x = \mathrm{tg}\phi$ i skorzystać z tożsamości: $1 + \mathrm{tg}\phi = \frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\phi)}{\cos\phi}$ (jeśli ktoś nie zna to proszę tę tożsamość pokazać) i wykazać, że dwie z otrzymanych całek się kasują. *Odp.* $J = \frac{1}{8}\pi\log 2$.

5. Pokazać, że: $J_{2n} \equiv \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n}x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$,
   $J_{2n+1} \equiv \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}x\,dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. *Wsk.* Wyprowadzić wzór rekurencyjny na J_k, stosując całkowanie przez części.

6. Używając obliczonych wyżej wartości całek, wykazać *wzór Wallisa* (pierwszy historycznie wzór na liczbę π:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

Wsk. Z oczywistych nierówności: $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ (dla $0 < x < \pi/2$) otrzymać po scałkowaniu: $J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1}$, skąd pokazać nierówność:

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{1}{2n+1}\right]^2 < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}.$$

Obliczyć różnicę wyrazów skrajnych i pokazać, że dąży ona do zera w granicy, i skorzystać z tw. o 3. ciągach.

7. $*$ *Całka eliptyczna zupełna pierwszego rodzaju* $K(k)$ – jedna z całek nie sprowadzających się do funkcji elementarnych – jest określona dla $|k| < 1$ jako

$$K(k) := \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}.$$

Pokazać tożsamość: $K(k) = (1+k_1)K(k_1)$, gdzie $k_1 := \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}$ (tożsamość ta nazywana jest *przekształceniem Landena* i ma duże znaczenie w teorii całek eliptycznych). *Wsk.* Fichtenholz: *Rachunek różniczkowy i całkowy* t. 2, rozdz. IX, cz. 316.