ANALIZA II “C”
Lista nr 2 (szeregi – cz. 1)

1. (Przypomnienie) Dla jakich wartości $s \in \mathbf{R}$ zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$? Odpowiedź uzasadnić.

2. Pokazać, że: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha+1}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} = \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$. (w b), c) zakładamy, że $\alpha \neq -1, -2, \ldots$).

3. Wykazać następującą wersję kryterium porównawczego: Niech $\{a_n\}, \{b_n\}$ – ciągi o wyrazach dodatnich, dążące do 0. Jeżeli istnieje granica
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$$
i $0 < K < \infty$, to szeregi: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

4. Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne czy rozbieżne. (*Wsk.* W większości przykładów poniżej powinna wystarczyć jakaś wersja kryterium porównawczego, z uwzględnieniem kryteriów d’Alemberta lub Cauchy’ego); w porywach może być potrzebne kryt. Dirichleta lub Raabego:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$, $a \in \mathbf{R}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$, $x \in \mathbf{R}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; g) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{x}{n})$, $x \in \mathbf{R}$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n})$, $x \in \mathbf{R}$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n+\sin n}{\sqrt{n^3+e^{-n}+5}}$; j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s}$, $a, b > 0, s \in \mathbf{R}$; k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{}n\sqrt[n]{n}$; l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$; m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbf{R}$; n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$, $x, s \in \mathbf{R}$; o) $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n$, $x \in \mathbf{R}$ (tu $\tau(n)$ jest liczbą dzielników liczby n); p) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n$; r) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}}$; s) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+1}$; t) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{3}-2)^n$; u) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n^2\pi}{n+1}$; v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n-\cos n}$; w) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.