Zadania z Algebry I B

09.11.03

1. Rozwiązać równania posługując się metodą Cardana:

   $(a)\, z^3 - 6z + 4 = 0$; $(b)\, z^3 - 6z^2 - 4 = 0$; $(c)\, z^3 - 3z + 1 = 0$;
   $(d)\, z^3 + (3+3i)z + 2 + i = 0$; $(e)\, z^3 - 9z + 9 = 0$; $(f)\, z^3 = 3\sqrt[3]{2}z + 2 = 0$;
   $(g)\, z^3 + 6iz + 4 + 4i = 0$; $(h)\, z^3 + 6(1-2i)z = 2 + 3i$;
   $(i)\, z^3 - 15z - 4$; $(j)\, z^3 - 3\sqrt[3]{2}z + 2 = 0$

2. Rozwiązać równania, traktując $a, b, \varphi \in \mathbb{R}$ jako dane parametry:

$$(a) \quad z^3 - 3a^2z - a^3\left(b + \frac{1}{b}\right) = 0; \; (b) \quad z^3 - 3a^2z - 2a^3\cos\varphi = 0;$$
$$(c) \quad z^3 + 3a^2z - a^3\left(b - \frac{1}{b}\right) = 0; \; (d) \quad z^3 - 3abz - ab(a+b) = 0;$$

3. Znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania równań: (a) $z^4 - 30z^3 + 289 = 0$, (b) $(z^4\bar{z}^2 - 1)^3 = 1$.

4. Znaleźć (albo pokazać, że nie istnieją) wielomiany $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$, takie, że $a(x)u(x) + b(x)v(x) = 1$ jeśli:

   (1) $a(x) = 5x^4 - 12x^3 - 41$, $b(x) = x^3 - 5x - 7$;
   (2) $a(x) = x^4 - 7x^2$, $b(x) = x^3 - 5x^2 + 18$,
   (3) $a(x) = x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 27$, $b(x) = x^4 - 5x^2 + 2x + 3$,
   (4) $a(x) = x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $b(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$

5. Dowieść, że jeśli liczba $a \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$, to $a^2 - 2$ też jest pierwiastkiem $W(x)$.

6. Rozłożyć na czynniki 1 stopnia następujący wielomian trzech zmiennych: $W(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$.

7. Zauważając, że $W(z)$ jest sumą kwadratów dwóch innych wielomianów znaleźć rozkład $W(z)$ na czynniki oraz pierwiastki równania $W(z) = 0$:

   (a) $W(z) = z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100$; (b) $W(z) = z^4 + 2z^2 - 24z + 72$;
   (c) $W(z) = z^4 - 16z^3 + 64z^2 + 900$.

   Rozłożyć $W(z)$ na iloczyn dwóch wielomianów stopnia 2 o wsp. rzeczywistych.

8. Sprawdzić, że zbiór G wraz z danym działaniem tworzy grupę, wskazać jej element neutralny oraz znaleźć jawny wzór na odwrotność elementu grupy:

   (a) $G := \mathbb{Z}$ z działaniem $m \odot n := m + (-1)^m n$,
   (b) $G :=$ wszystkie funkcje postaci $f(x) := ax + b, a > 0, b \in \mathbb{R}$, ze składaniem odwzorowań,
   (c) $G := [0, a[, a \in \mathbb{R}^+$ z działaniem $x \underset{a}{+} y := \begin{cases} x + y & \text{gdy } x + y < a; \\ x + y - a & \text{gdy } x + y \geqslant a. \end{cases}$