28 lutego 2005

Zadania z Analizy „C”, seria nr ?.

Zadanie 1: Zbadaj zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(x+a_1)(2x+a_2)\cdot\ldots\cdot(nx+a_n)}$, gdzie $x > 0$ i $0 < a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathbb{R}$.

Wskazówka: kryterium Raabego. Uwaga, w przypadku (*b*) nie można określić zbieżności dla pewnej wartości x bez dodatkowych informacji o ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zadanie 2: Udowodnij następujące twierdzenie:

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie nierosnącym ciągiem liczb dodatnich i niech* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Oznaczmy* $v_k = u_{k+1} - u_k$ *i* $b_k = v_k a_{u_k}$. *Załóżmy, że ciąg* $\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *jest ograniczony. Wtedy*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty\right) \iff \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty\right)$$

To kryterium zbieżności nazywamy kondensacyjnym lub zagęszczeniowym.

Zadanie 3: Zbadaj w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$ zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[\log n]^p}$,

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\log n]^p}$,

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)[\log(\log n)]^p}$,

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log(\log n))[\log(\log(\log n))]^p}$,

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\log(\log n)]^p}$.

Wskazówka: kryterium całkowe lub zagęszczeniowe.

Zadanie 4: Udowodnij twierdzenie:

Niech f *będzie funkcją różniczkowalną na* $[0,1]$ *(w końcach przedziału bierzemy pochodne jednostronne). Załóżmy, że istnieje* $f''(0)$. *Wówczas*

$$\left(\text{Szereg } \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ jest zbieżny}\right) \Longleftrightarrow \left(f(0)=f'(0)=0\right)$$

Zadanie 5: Wykaż zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\log\frac{2n+1}{2n-1}-1\right).$$

Korzystając ze wzoru $n! = a\sqrt{n}\frac{n^n}{e^n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, gdzie $a = \text{const}$, a $\theta_n \in]0,1[$ wykaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\log\frac{2n+1}{2n-1}-1\right) = \frac{1}{2}(1-\log 2).$$

Zadanie 6: Udowodnij, że

(*a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$,

(*b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n} = \frac{3}{2}$.

Zadanie 7: Korzystając z twierdzenia Cauchy'ego o iloczynie szeregów zbienych bezwzględnie wykaż, że dla dowolnej zespolonej liczby q takiej, że $|q| < 1$ mamy

(*a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$,

(*b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^n = \frac{q+q^2}{(1-q)^3}$.

Zadanie 8: Zbadaj w zależności od $x \in \mathbb{R}$ zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

gdzie a_n jest ciągiem liczb dodatnich monotonicznie zbieżnym do 0. *Wskazówka:* kryterium Dirichleta.

Zadanie 9: Niech $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem. Przypuśćmy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^x}$$

jest zbieżny dla pewnego $x > 0$. Wykaż, że dla dowolnego $y > x$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^y}$$

jest zbieżny. *Wskazówka:* kryterium Abela.

Zadanie 10: Oblicz promień zbieżności szeregów potęgowych:

(*a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n,$

(*b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n.$

(*c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n,$

(*d*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n,$

(*e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}}\right)^n x^n,$

(*f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2},$

(*g*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^{n!},$

(*h*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n.$

Zbadaj zbieżność powyższych szeregów w punktach $\pm R$, gdzie R jest promieniem zbieżności (nie dotyczy przypadku $R = \infty$).

<u>Zadanie 11:</u> Uzasadnij wzór

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

<u>Zadanie 12:</u> Udowodnij, że dla $q \in \mathbb{C}$ takich, że $|q| < 1$ mamy

$$\frac{1}{(1-q)^2} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots .$$

Wyprowadź stąd wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$