

Zadania z Analizy „C”, seria nr 6.

Zwartość

Zadanie 1: Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Udowodnij, że X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej rodziny $(F_\iota)_{\iota \in \mathcal{I}}$ domkniętych podzbiorów X takich, że dla dowolnego skończonego $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}$ mamy

$$\bigcap_{\iota \in \mathcal{F}} F_\iota \neq \emptyset$$

(taką rodzinę nazywamy *scetrowaną*), zachodzi $\bigcap_{\iota \in \mathcal{I}} F_\iota \neq \emptyset$.

Zadanie 2: Niech A i B będą podzbiórami przestrzeni \mathbb{R}^N . Definiujemy jako zbiór sum elementów z A i B , tj. $A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$.

- (a) jeśli A i B są zwarte, to $A + B$ jest zwarty;
- (b) jeśli A jest zwarty, a B domknięty, to $A + B$ jest domknięty.

Podaj przykład domkniętych A i B takich, że $A + B$ nie jest domknięty.

Spójność

Zadanie 3: Niech X będzie przestrzenią metryczną.

- (a) Niech A i B będą spójnymi podzbiórami przestrzeni X takimi, że $A \cap B \neq \emptyset$. Wykaż, że $A \cup B$ jest spójny.
- (b) Jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in X$ istnieje spójny podzbiór $A_{x,y} \subset X$ taki, że $x, y \in A_{x,y}$, to X jest spójna.
- (c) Jeśli X jest spójna i Y jest przestrzenią metryczną spójną, to $X \times Y$ jest spójna.

Zadanie 4: Niech X będzie podzbiorem płaszczyzny \mathbb{R}^2 złożonym ze wszystkich punktów, których obie współrzędne są liczbami niewymiernymi. Z metryką odziedziczoną z \mathbb{R}^2 , zbiór X jest przestrzenią metryczną. Wykaż, że X jest przestrzenią spójną.

Zadanie 5: Niech X będzie przestrzenią metryczną.

- (a) Niech A i B będą spójnymi podzbiórami X . Wykaż, że $A \cap B$ jest zbiorem spójnym.

- (b) Podaj przykład ciągu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spójnych podzbiorów X takiego, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ nie jest spójny.
- (c) Podaj przykład ciągu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takiego jak wyżej, który ponadto spełnia $A_{n+1} \subset A_n$ dla wszystkich n .

O.D.Z.S.

Zadanie 6: Zbadaj otwartość, domkniętość, zwartość i spójność podzbioru A w przestrzeni X , jeśli

- (a) $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;
- (b) $X = \mathbb{R}^3$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$;
- (c) $X = \mathbb{R}^3$, $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 0\}$;
- (d) $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : 6x^{10} - 5x^8 + 4x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 1 \leq 0\}$;
- (e) $X = \mathbb{T} = \{e^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi[\}$, $A = \{e^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi[\cap \mathbb{Q} \}$;
- (f) $X = C([0, 1])$ z metryką

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|,$$

$A = \{f \in C([0, 1]) : d(f, 0) \leq 1\}$ (0 oznacza funkcję stałą równą zero). Wskazówka: przy badaniu zwartości rozważ ciąg $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów A zdefiniowany jako:

$$r_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x < 2^{-n}, \\ 2^n x - 1 & \text{dla } 2^{-n} \leq x \leq 2^{-n+1}, \\ 1 & \text{dla } x > 2^{-n+1}. \end{cases}$$

Ciągłość

Zadanie 7: Zbadaj (w zależności od parametrów) ciągłość odwzorowania f

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$,
- (b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ a & \text{dla } x = 0, \end{cases}$

$$(c) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} & \text{dla } y \neq 0, \\ 0 & \text{dla } y = 0, \end{cases}$$

$$(d) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{ax + by}{cx + dy} & \text{dla } cx + dy \neq 0, \\ 0 & \text{dla } cx + dy = 0, \end{cases}$$

$$(e) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x + y} & \text{dla } x \neq -y, \\ 0 & \text{dla } x = -y, \end{cases}$$

$$(f) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } x = y = 0, \end{cases}$$

$$(g) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2 + (x - y)^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } x = y = 0, \end{cases}$$

$$(h) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{1 + z^2}, \frac{x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) & \text{dla } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ (0, 0) & \text{dla } x = y = z = 0. \end{cases}$$

Zadanie 8: Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wykaż, że jeśli dla dowolnego otwartego $U \subset \mathbb{R}$ zbiór $f(U)$ jest domknięty, to f jest funkcją stałą.

Zadanie 9: Zbadaj jednostajną ciągłość funkcji

$$(a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ — ustalone}),$$

$$(b) f:]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[, f(x) = x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ — ustalone}),$$

$$(c) f:]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[, f(x) = \sqrt{x}.$$

Zadanie 10: Udowodnij, że układ równań

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3} \cos y + \frac{1}{3}x \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.