

PRZYKŁADOWE ZADANIA EGZAMINACYJNE DLA KANDYDATÓW NA STUDIA INDYWIDUALNE

Mechanika

Zadanie

Cząstka porusza się w polu siły centralnej o energii potencjalnej

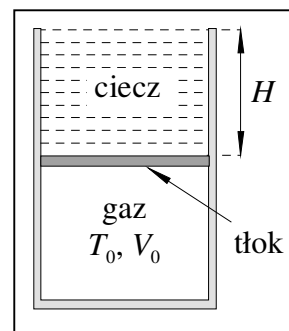
$$V(r) = \alpha r^\beta, \text{ gdzie } \alpha\beta > 0, \beta > -2.$$

- Wykazać, że częstość małych drgań radialnych ω wokół stabilnej orbity kołowej o środku w centrum siły określona jest wzorem $\omega = \sqrt{\beta + 2} \Omega$, gdzie Ω jest częstością kątową dla orbity kołowej.
- Naszycować kształt orbity z małymi drganiami radialnymi dla $\beta = -1, 2$ i skomentować wyniki.
- Dla jakich wartości β orbity z małymi drganiami radialnymi będą zamknięte? Naszycować kształt takich orbit dla $\beta = -\frac{7}{4}, 7$.

Termodynamika

Zadanie 1

Izolowany termicznie od otoczenia 1 mol gazu doskonałego o objętości V_0 i temperaturze T_0 znajduje się pod tłokiem w cylindrycznym naczyniu o polu podstawy S , jak na rysunku. Obszar nad tłokiem wypełniony jest cieczą o gęstości ρ , przy czym wysokość słupa cieczy wynosi H i naczynie wypełnione jest po brzeg – przy podniesieniu tłoka do góry nadmiar cieczy się ulewa. Przyjmując, że przyspieszenie ziemskie wynosi g , tłok nie przewodzi ciepła, a dla uproszczenia założyć, że tłok może poruszać się bez tarcia, jest nieważki i ma zaniedbywalną grubość. W pewnym momencie gaz zamknięty pod tłokiem zaczęto ogrzewać.



- Podać równanie przemiany gazu w zmiennych (V, p) , (V, T) oraz (p, T) .
- Wyznaczyć ciepło przemiany gazu i naszycować jego przebieg w funkcji temperatury. W wyniku ogrzewania tłok przesunął się do góry o odcinek x .
- Wyznaczyć pracę L , jaką wykonał gaz.
- Wyznaczyć zmianę ΔU energii wewnętrznej gazu.
- Wyznaczyć ilość ciepła Q , którą dostarczono.
- Do jakiej temperatury T należy podgrzać gaz pod tłokiem, aby tłok przesunął się do góry o odcinek $x = H$?

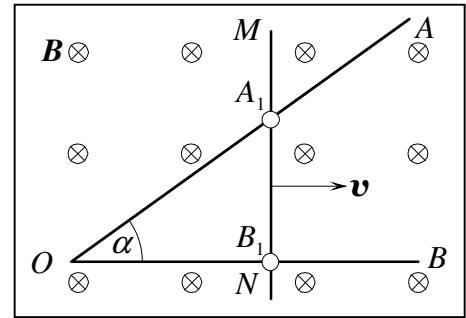
Zadanie 2

Wyobraź sobie pewną objętość powietrza przy powierzchni ziemi, która ogrzana przez ziemię, unosi się do góry. Z reguły obszar, z którego powietrze unosi się do góry jest na tyle rozległy, że wymiana ciepła między unoszącym się powietrzem a otoczeniem, z uwagi na niewielką wartość przewodnictwa cieplnego powietrza, dotyczy jedynie zewnętrznych obszarów masy powietrza. Oznacza to, że godnym rozpatrzenia modelem przemiany gazowej, której podlega powietrze w trakcie unoszenia się jest przemiana adiabatyczna. Wyznaczyć gradient temperatury powietrza w atmosferze. Potraktować powietrze jako gaz doskonały o masie cząsteczkowej $\mu = 29$ g/mol, a ponieważ powietrze składa się w głównej mierze z azotu i tlenu, które występują w postaci dwuatomowej, więc wykładnik adiabaty $\gamma = 1,4$. Przyjmując, też że przyspieszenie ziemskie $g = 9,8$ m/s² jest stałe na całej wysokości atmosfery, natomiast uniwersalna stała gazowa R wynosi 8,3 J/(mol·K).

Elektryczność i magnetyzm

Zadanie 1

W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B umieszczono drut AOB zgięty pod kątem α , po którym ślizga się ze stałą prędkością v prosty odcinek drutu MN prostopadły do ramienia OB kąta α . Wektor indukcji magnetycznej jest prostopadły do płaszczyzny drutów. Wszystkie druty mają oporność ρ na jednostkę długości. Znaleźć siłę elektromotoryczną E indukowaną w obwodzie A_1OB_1 oraz natężenie I prądu w tym obwodzie.



Zadanie 2

Wyobraź sobie, że elektron to sztywna kulka o masie m , ładunku $-e$ i promieniu R , wirująca z częstością kątową ω wokół jednej ze średnic. Gęstość ρ_e ładunku elektronu jest w każdym punkcie proporcjonalna do jego gęstości ρ_m masy.

- Wyznaczyć stosunek magnetycznego momentu dipolowego do momentu pędu elektronu.
- Jeśli przyjmiemy, że elektron ma promień $R = 2,83$ fm, zwany klasycznym, masę $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, jednorodny rozkład ładunku i masy, to z jaką prędkością liniową muszą poruszać się punkty na równiku elektronu, aby jego własny moment pędu był równy $\hbar/2$? Przyjąć, że ruch kulki jest nierelatywistyczny.

Optyka

Zadanie 1

Na płaskiej powierzchni grubej, szklanej płyty płasko-równoległej o współczynniku załamania $n = 1,5$ utworzono siatkę dyfrakcyjną, w której odległość d między równoodległymi szczelinami wynosi 10^{-6} m. Od strony powietrza na siatkę pada prostopadłe wiązka światła z lampy rtęciowej, która emituje fale o długościach $\lambda_1 = 691$ nm oraz $\lambda_2 = 698$ nm w powietrzu.

- Ile kierunków propagacji określających maksima główne wytworzy w szkłe każda z fal?
- Ile prążków dyfrakcyjnych odpowiadających maksimum głównym będzie można zobaczyć na drugiej ścianie płyty płasko-równoległej odgrywającej rolę ekranu, jeśli wiązka ma szerokość $D = 0,08$ mm, a prążki można rozdzielić, gdy spełniają one kryterium Rayleigha?
- Czy obserwacja dyfrakcji w szkłe, a nie w powietrzu, ułatwia czy też może utrudnia rozdzielenie linii rtęci?

Przyjąć, że współczynnik załamania powietrza jest równy jedności.

Zadanie 2

Monochromatyczna, płaska fala świetlna o długości fali $\lambda = 500$ nm pada prostopadłe na wycięty w nieskończonej przesłonie kołowy otwór o promieniu $R = 1$ mm. Wyznaczyć na osi otworu położenie ostatniego (najbardziej odległego od otworu) maksimum dyfrakcyjnego.

Wskazówka: założyć, że odległość poszukiwanego punktu od otworu jest znacznie większa od promienia R .

Mechanika kwantowa

Zadanie 1

Operator radialnego pędu \hat{p}_r cząstki w reprezentacji położeniowej określony jest wzorem

$$\frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r.$$

- Wykazać, że \hat{p}_r jest operatorem hermitowskim.

- b) Obliczyć komutator $[\hat{r}, \hat{p}_r]$ i wypisać zasadę nieoznaczoności dla wielkości odpowiadających tym operatorom.
- c) Znaleźć wartości własne i funkcje własne operatora \hat{p}_r .
- d) Obliczyć wartość oczekiwaną (średnią) pędu radialnego w stanie podstawowym atomu wodoru, gdy $\psi = Ae^{-\frac{r}{a}}$.

Zadanie 2

Atom wodoru znajduje się w stanie opisanym funkcją falową $\psi = A(x + y + z)e^{-\frac{r}{2a}}$, gdzie $a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$ jest promieniem Bohra atomu, natomiast e i μ są odpowiednio ładunkiem i masą zredukowaną elektronu.

- a) Obliczyć stałą normalizacyjną A .
- b) Jaką energię ma atom w tym stanie? (Wykorzystać równanie Schrödingera bez czasu).
- c) Jakie wartości liczb kwantowych l i m oraz z jakimi prawdopodobieństwami otrzymamy przy pomiarze kwadratu orbitalnego momentu pędu L^2 i jego rzutu L_z ? Obliczyć wartości średnie $\langle L_z \rangle$ i $\langle L_z^2 \rangle$.
- d) Obliczyć najbardziej prawdopodobną oraz średnią wartość odległości elektronu od jądra.

Wskazówka:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, \quad Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}, \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{n!}{\gamma^{n+1}}.$$