

TEORIA RYZYKA RYNKOWEGO.  
TEORIA ZDARZEŃ EKSTREMALNYCH  
Szkic

**Ryszard Kutner**

*Zakład Dydaktyki Fizyki, Instytut Fizyki Doświadczalnej  
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski*

Warszawa, grudzień 2009

Niniejszy materiał ani w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych bez zgody autora.

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Współczesna teoria oceny ryzyka rynkowego</b>	<b>5</b>
1.1	Tradycyjna analiza poziomu ryzyka . . . . .	6
1.2	Nowoczesne podejście do ryzyka . . . . .	8
1.2.1	Zasadnicze pytania . . . . .	9
1.2.2	Charakterystyczne przykłady . . . . .	10
1.3	Krótkie podsumowanie . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Teoria zdarzeń ekstremalnych</b>	<b>19</b>
2.1	Statistics of extremes . . . . .	19
2.1.1	General derivation . . . . .	19
2.1.2	The Gumbel distribution versus the Fréchet one . . . . .	21
2.1.3	Pictorial analysis of rank ordering . . . . .	24
2.1.4	Rank ordering of random variables. General approach . . . . .	29
2.1.5	Concluding remarks . . . . .	31



# Rozdział 1

## Współczesna teoria oceny ryzyka rynkowego

Istnieje przynajmniej kilka powodów, dla których dotychczasowe teorie oceniające ryzyko rynkowe są niewystarczające<sup>1</sup>. Teorie te bazują na Centralnym Twierdzeniu Granicznym (CTG) czyli na analizie zmienności ('volatility') rozumianej jako typowy rozrzut cen papierów wartościowych wokół ich wartości przeciętnych wyrażony np. za pomocą dyspersji  $\sigma$  lub kurtozy  $\kappa$ . Tego typu podejście oznacza, że najistotniejsze informacje statystyczne zawarte są w tzw. przedziale trzysigmowym ( $\pm 3\sigma$ ). Innymi słowy, "ogon" rozkładu nie zawiera wtedy istotnych informacji statystycznych - jest to gaussowski punkt widzenia (przyjęta np. w modelu Blacka-Scholesa), w którym nie ma miejsca na procesy stochastyczne typu Lévy'ego czyli na zdarzenia rzadkie.

Procesy Lévy'ego są przeciwieństwem procesów gaussowskich gdyż mamy w nich do czynienia z tzw. rozkładami poszerzonymi gdzie najistotniejsza informacja o układzie statystycznym zawarta jest właśnie w pogrubionym "ogonie" funkcji rozkładu; prowadzi to natychmiast do nieskończonej dyspersji i kurtozy a tym samym do bezużyteczności oceny ryzyka opartej na tego typu tradycyjnych zmiennościach. Jak widać, **właściwa analiza ryzyka rynkowego wymaga innej definicji ryzyka** np. opartej na kwantylach (które zawsze istnieją) a nie na momentach (które mogą nie istnieć, czyli teoretycznie rzecz biorąc przybierać wartości nieskończone).

Istotą współczesnej teorii ryzyka rynkowego jest traktowanie zdarzeń ekstremalnych jako posiadających decydujący wpływ na charakter i wielkość ponoszonego ryzyka. Jest to zasadnicza różnica w stosunku do podejść tradycyjnych, w których tego typu zdarzenia są po prostu ignorowane. Prowadzi to bezpośrednio do nowej, współczesnej definicji ryzyka rynkowego wyrażonego za pomocą prawdopodobieństwa ekstremalnych strat (ang. *probability of extreme losses*); tego typu metoda nosi nazwę VaR (ang. *Value at Risk*), czyli 'Wartości Narażonej na Ryzyko' (lub "Wartości Zagrożonej Ryzykiem").

---

<sup>1</sup>Niniejsze opracowanie powstało w oparciu o prace przeglądową [1] oraz [3].

## 1.1 Tradycyjna analiza poziomu ryzyka

Przyjrzyjmy się nieco dokładniej roli CTG w tradycyjnej ocenie poziomu ryzyka, analizując zależną od czasu chwilową stopę zwrotu

$$\Delta\mathcal{R}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)} = \frac{\Delta X(t)}{X(t)}, \quad (1.1)$$

jakiegoś papieru wartościowego, którego cena w chwili  $t$  wynosi  $X(t)$  a w chwili późniejszej  $t + \Delta t$  jest  $X(t + \Delta t)$ ; tutaj  $\Delta t$  jest ustalonym horyzontem czasowym czyli czas  $t = n \cdot \Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Stopa zwrotu może być zarówno dodatnia jak i ujemna - w tym ostatnim przypadku powinniśmy myśleć o stopie zwrotu, oczywiście, jak o relatywnej stracie.

W dalszym ciągu zakładamy, że zmiana ceny w zadanym horyzoncie czasu  $\Delta t$  jest relatywnie niewielka, tzn.  $|\Delta X(t)| \ll X(t)$ , stąd zależna od czasu chwilowa stopa zwrotu

$$\Delta\mathcal{R}(t) \approx \ln\left(\frac{X(t + \Delta t)}{X(t)}\right) = \ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t)), \quad (1.2)$$

czyli jest, z dobrym przybliżeniem zmianą logarytmów cen. Jest to jeden z powodów dla których wygodnie jest się w wielu różnych sytuacjach posługiwać logarytmem ceny a nie samą ceną. Wyrażenia (1.1) oraz (1.2) pozwalają na stosowanie zamiennie (w zależności od potrzeb) jednej z trzech definicji chwilowej stopy zwrotu.

Ponieważ ma miejsce następująca dekompozycja

$$X(n \cdot \Delta t) = X(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta X(j \cdot \Delta t), \quad (1.3)$$

więc sumaryczna stopa zwrotu (zwana dalej po prostu stopą zwrotu) dana jest w postaci sumy chwilowych stóp zwrotu

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) &= \frac{X(t) - X(0)}{X(0)} \approx \ln\left(\frac{X(t)}{X(0)}\right) = \ln\left(\prod_{j=0}^{n-1} (1 + \Delta\mathcal{R}(j \cdot \Delta t))\right) \\ &\approx \sum_{j=0}^{n-1} \Delta\mathcal{R}(j \cdot \Delta t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

przy czym milcząco założyliśmy, że także wartość sumarycznej zmiany ceny  $|X(t) - X(0)| \ll X(0)$ . Wynik (1.4) ma charakter zasadniczy, czyniący celowym wprowadzenie kluczowego założenia tradycyjnej analizy ryzyka traktującej **chwilowe stopy zwrotu** jak **niezależne zmienne losowe** o identycznym, niekoniecznie gaussowskim rozkładzie wymagającym jedynie aby wariancja chwilowej stopy zwrotu była skończona i niezależna od czasu

$$\sigma^2 = \langle [\Delta\mathcal{R}(t) - \langle \Delta\mathcal{R}(t) \rangle]^2 \rangle = \langle [\Delta\mathcal{R}(t)]^2 \rangle - m^2 < \infty, \quad (1.5)$$

podobnie jak i sama wartość średnia

$$m = \langle \Delta \mathcal{R}(t) \rangle < \infty, \quad (1.6)$$

(innymi słowy, czas jest tutaj traktowany jako jednorodny czyli w sposób stacjonarny).

W związku z powyższym, do stopy zwrotu  $\mathcal{R}(t)$  można zastosować CTG. Oznacza to, że dla  $n \rightarrow \infty$  centrowana zmienna losowa  $\mathcal{R}(n \cdot \Delta t) - \langle \mathcal{R}(n \cdot \Delta t) \rangle$  staje się zmienną gaussowską (czyli podlegającą rozkładowi Gaussa) o wariancji

$$\sigma_{\mathcal{R}}^2(n \cdot \Delta t) = n \cdot \sigma^2 \quad (1.7)$$

i wartości średniej

$$m_{\mathcal{R}}(n \cdot \Delta t) = n \cdot m. \quad (1.8)$$

Zatem jakakolwiek miara poziomu ryzyka,  $-\Lambda_G$ , (gdzie  $\Lambda_G \geq 0$ ) np. rozrzut trzysigmowy

$$-\Lambda_G = -3 \cdot \sigma_{\mathcal{R}}(t) \quad (1.9)$$

lub rozrzut względny czyli tzw. współczynnik zmienności

$$-\Lambda_G = -\frac{\sigma_{\mathcal{R}}(t)}{|m_{\mathcal{R}}(t)|} = -\frac{\sigma}{|m|} \cdot \sqrt{n}, \quad (1.10)$$

bazuje w tym podejściu na dyspersji  $\sigma$  (gdyż skośność dla rozkładu Gaussa znika a kurtoza jest po prostu stała). Wyrażenie (1.10) nazywa się często "jakością inwestycji" a także "stosunkiem sygnał-szum" jak też "stosunkiem Sharpe'a", który oznacza się przez  $\mathcal{S}$  i zwykle określa w skali roku. Zauważmy, że miary poziomu ryzyka (1.9) i (1.10) należy traktowane komplementarnie. W takim podejściu (które siłą rzeczy jest tutaj dwuparametrowe) straty i zyski są rozłożone symetrycznie wokół wielkości średniej  $m_{\mathcal{R}}(t)$ .

## Zakres stosowalności

Poświęcimy teraz nieco więcej uwagi zakresowi stosowalności powyższego, tradycyjnego podejścia do oceny poziomu ryzyka.

1. Jak już powiedzieliśmy, straty i zyski podlegają tutaj rozkładowi symetrycznemu dlatego występują, średnio rzecz biorąc, z jednakową częstością co na ogół nie ma miejsca dla sytuacji rzeczywistych. Inaczej mówiąc, model taki jest nierealistyczny.
2. Inna niedogodność modelu opiera się na założeniu relatywnie małych zmian ceny waloru co pozostaje w sprzeczności z często obserwowanymi (zwłaszcza w ostatnich dwóch dekadach) znacznymi, skokowymi zmianami cen walorów wykraczającymi znacznie poza obszar trzysigmowy.

3. Ponadto, samo założenie o skończonej wartości dyspersji może być kwestionowane ze względu na istnienie ekstremalnych zdarzeń rzadkich. Objawia się to w postaci niestabilnego zachowania estymaty dyspersji ze wzrostem rozmiaru okna czasowego (czyli liczby danych empirycznych budujących dyspersję). Zamiast stabilizowania się tej wielkości, jak to przewiduje Prawo Wielkich Liczb Bernoulliego, obserwuje się co jakiś czas uskoki, których amplituda wyraźnie wzrasta ze wzrostem wielkości okna czasowego z którego zbiera się dane. Innymi słowy, gdy wzrasta wielkość okna czasowego to tym samym wzrasta prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia rzadkiego destabilizującego estymatę dyspersji.

## 1.2 Nowoczesne podejście do ryzyka

Przypuśćmy, że **chcemy ocenić pojedynczą (jednorazową) stratę**  $\Delta X < 0$  jaką moglibyśmy ponieść w horyzoncie czasowym  $\tau$ , czyli np. na koniec dnia transakcyjnego (wówczas  $\tau = 1$  [td]). W tym celu wprowadźmy bazowy rozkład prawdopodobieństwa strat,  $P_\tau(\Delta X)$ , dla ustalonego horyzontu czasowego  $\tau$ , np.  $\tau = 1$  dzień transakcyjny (w skrócie [td]). Rozkład ten należy rozumieć w ten sposób, że statystyka empiryczna (budująca ten rozkład) jest zbierana na koniec każdego dnia transakcyjnego. Oznacza to jednak, że nie bierze się tutaj pod uwagę dwóch istotnych efektów (do których możemy powrócić w dalszej części o ile uznacie Państwo to za celowe):

- 1) kumulowania się strat w ciągu dnia transakcyjnego, z których każda z osobna jest mniejsza od dopuszczalnej straty ale, które w sumie przewyższają ją,
- 2) pojawienia się straty większej od dopuszczalnej w ciągu dnia transakcyjnego a nie na jego koniec.

Mimo wszystko, dysponując rozkładem  $P_\tau$  możemy określić np. prawdopodobieństwo (absolutnej wartości) straty  $|\Delta X| = -\Delta X$  nie mniejszej niż jakaś (dowolnie) ustalona przez nas dopuszczalna wielkość progowa  $\Lambda (\geq 0)$ :

$$\mathcal{P}(-\Delta X \geq \Lambda) = \mathcal{P}(\Delta X \leq -\Lambda) = \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda) = \int_{-\Lambda_{down}}^{-\Lambda} P_\tau(\Delta X) d(\Delta X), \quad (1.11)$$

gdzie prawdopodobieństwo  $\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda)$  (wyrażane najczęściej w procentach) nosi nazwę **oceny ryzyka** lub **poziomu ufności**, wartość absolutna  $\Lambda$  nazywana jest **poziomem strat** (ang. *level of loss*), **poziomem ryzyka** lub w żargonie po prostu **ryzykiem**, wartość absolutna  $\Lambda_{down}$  jest maksymalną absolutną wartością pojedynczej straty jaką możemy kiedykolwiek ponieść, przy czym zakładamy, że  $\Lambda \ll \Lambda_{down}$ ; w związku z tym można przyjąć, że  $\Lambda_{down} \approx \infty$  co upraszcza obliczenia nie wpływając na (przybliżoną) postać ostatecznych wzorów.



W dalszym ciągu wprowadźmy w równaniu (1.11) jakąś konkretną wartość poziomu strat i oznaczmy ją przez  $\Lambda_{VaR}$ ; niech będzie to taki poziom strat, czyli *wartość zagrożona ryzykiem*<sup>2</sup>, która odpowiada zadanej ocenie ryzyka

$$\mathcal{P}_{VaR} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda_{VaR}) = \alpha, \quad (1.12)$$

równej np. 1%. Oznacza to, że wartość straty większej<sup>3</sup> lub równej stracie progowej (o wartości absolutnej)  $\Lambda_{VaR}$  wystąpi (w przybliżeniu, średnio rzecz biorąc) raz na  $N = 100$  [td]. Zatem, z dobrym przybliżeniem, dla  $N \gg 1$ , można przyjąć, że

$$\mathcal{P}_{VaR} \approx \frac{1}{N}. \quad (1.13)$$

Powyższe wyrażenie definiuje jednocześnie tzw. **zdarzenie rzadkie**, które nie musi być ekstremalnym (wystarczy jedynie, żeby spełniało równość (1.13)). Zatem, dopuszczenie tej równości oznacza, że traktujemy wartość zagrożoną ryzykiem jak zdarzenie rzadkie.

Ogólnie rzecz biorąc, im większy jest poziom ufności tym mniejszy jest poziom strat. Naszym **celem jest wyznaczenie poziomu ryzyka  $\Lambda_{VaR}$  przy zadanej wielkości poziomu ufności  $\mathcal{P}_{VaR}$** , tzn. odwrócenie równości (1.12)

$$\Lambda_{VaR} = -\mathcal{P}_{\leq}^{-1}(\mathcal{P}_{VaR}) = -\mathcal{P}_{\leq}^{-1}(\alpha) \approx -\mathcal{P}_{\leq}^{-1}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (1.14)$$

W ogólności jest to zagadnienie rozwiązywalne tylko na drodze numerycznej jednakże dla kilku charakterystycznych przypadków można uzyskać rozwiązanie analityczne o czy mówimy poniżej. Zauważmy, że równanie (1.14) zależy w sposób globalny (sumaryczny) od nieznanego bazowego rozkładu prawdopodobieństwa  $P_{\tau}(\dots)$  - **jego postać jest wynikiem przyjętego modelu** i musi, rzecz jasna podlegać weryfikacji empirycznej.

Często, wygodniej jest operować stratą zdefiniowaną jako wielkość dodatnia (powyżej, w równaniu (1.11) strata została zdefiniowana jako wielkość ujemna), wtedy ocena ryzyka wartości narażonej na ryzyko jest wielkością komplementarną do dystrybuanty, czyli prawdopodobieństwem skumulowanym.

## 1.2.1 Zasadnicze pytania

Możemy teraz postawić pytanie centralne dla Teorii Zdarzeń Ekstremalnych (ang. *Extreme Value Theory*, patrz rozdz.2) mianowicie, **jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia największej jednorazowej straty o zadanej wartości absolutnej  $\Lambda$  w czasie równym  $N$  dni transakcyjnych**<sup>4</sup>? Jak widać, w tak postawionym pytaniu właśnie  $\Lambda$  pełni rolę zdarzenia ekstremalnego. Odpowiedź na to

<sup>2</sup>Jest to już dzisiaj nazwa własna. Dokładniej rzecz biorąc, chodzi o wartość progową zagrożoną nadmiernym ryzykiem, tzn. taki lub większy poziom strat jest już przez nas nieakceptowalny.

<sup>3</sup>Należy to rozumieć w ten sposób, że stała wynosząca  $-100$  jest większa od straty  $-10$ .

<sup>4</sup>Podkreślmy, chodzi zawsze o  $N$  przyszłych dni transakcyjnych.

pytanie uzyskujemy (analogicznie jak w rozdz.2) w oparciu o założenie mówiące o statystycznej niezależności strat. Zatem,

$$\begin{aligned} P(\Lambda; N) &= N \cdot [\mathcal{P}_>(-\Lambda)]^{N-1} \cdot P_\tau(-\Lambda) \\ &\approx N \cdot P_\tau(-\Lambda) \cdot \exp(-N \cdot \mathcal{P}_\leq(-\Lambda)), \end{aligned} \quad (1.15)$$

gdzie przy wyprowadzeniu przybliżonej równości w (1.15) przyjęliśmy, że prawdopodobieństwo  $\mathcal{P}_\leq(-\Lambda)$  jest co najwyżej rzędu 10% tzn., że mamy do czynienia ze stosunkowo niskim poziomem ufności, czyli dużym ryzykiem; innymi słowy, **interesujemy się tylko dużymi stratami**. Na podstawie (1.13), wyrażenie (1.15) można zapisać w alternatywnej postaci, którą wykorzystamy w dalszej części

$$P(\Lambda; 1/\mathcal{P}_{VaR}) \approx \frac{P_\tau(-\Lambda)}{\mathcal{P}_{VaR}} \cdot \exp\left(-\frac{\mathcal{P}_\leq(-\Lambda)}{\mathcal{P}_{VaR}}\right). \quad (1.16)$$

Dodajmy jeszcze, że założenie o niezależności strat jest niestety trudno weryfikowalne na drodze empirycznej.

Postawmy teraz **zasadnicze pytanie: dla jakiej wartości  $\Lambda$  prawdopodobieństwo  $P(\Lambda; N)$  osiąga maximum?** Czyli **poszukujemy najbardziej prawdopodobnej wielkości największej straty  $\Lambda_{MAX}$** . Z pierwszej równości w (1.15) otrzymujemy konieczny warunek, różniczkując ją stronami po  $\Lambda$  i przyrównując otrzymane wyrażenie do zera

$$N \cdot P_\tau(-\Lambda_{MAX}) \approx -\mathcal{P}_>(-\Lambda_{MAX}) \cdot \left. \frac{d \ln(P_\tau(-\Lambda))}{d\Lambda} \right|_{\Lambda=\Lambda_{MAX}}, \quad (1.17)$$

który wykorzystujemy do analizy wielce użytecznych przykładów.

Podkreślmy, że to właśnie  $\Lambda_{MAX}$  jest tą charakterystyką poziomu ryzyka, o którą nam chodzi, niestety możliwości jej praktycznego wykorzystanie są znacznie mniejsze niż  $\Lambda_{VaR}$ , ze względu na trudność związaną z wyznaczeniem  $\mathcal{P}_{MAX}(= \mathcal{P}_\leq(-\Lambda_{MAX}))$ . Nie mniej, **wszędzie tam gdzie to jest tylko możliwe należy dążyć do uzyskania obu tych wielkości w jawnej postaci**.

## 1.2.2 Charakterystyczne przykłady

Omówimy teraz trzy charakterystyczne, niezwykle użyteczne przykłady dotyczące, różniących się w sposób istotny, bazowych rozkładów prawdopodobieństw  $P_\tau$  przy czym, dwa pierwsze przykłady dostarczą nam rozwiązań analitycznych równania (1.14).

### Przykład 1

Przypuśćmy, że bazowy rozkład prawdopodobieństwa

$$P_\tau(-\Lambda) = \frac{1}{\langle \Lambda \rangle} \cdot \exp\left(-\frac{\Lambda}{\langle \Lambda \rangle}\right), \quad \Lambda \geq 0, \quad (1.18)$$

gdzie przeciętna wielkość strat  $\langle \Lambda \rangle (> 0)$  jest możliwa do bezpośredniej estymacji na drodze empirycznej (np. w oparciu o dane archiwalne) podobnie jak wariancja  $\sigma^2 = \langle \Lambda \rangle^2$ . Stąd,

$$\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda) = \exp\left(-\frac{\Lambda}{\langle \Lambda \rangle}\right). \quad (1.19)$$

Podstawiając wyrażenia (1.18) i (1.19) do warunku (1.17) otrzymujemy, że

$$\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda_{MAX}) = \mathcal{P}_{MAX} \approx \frac{1}{N} \approx \mathcal{P}_{VaR}, \quad (1.20)$$

czyli, że

$$\frac{\Lambda_{MAX}}{\langle \Lambda \rangle} = \frac{\Lambda_{VaR}}{\langle \Lambda \rangle} \approx \ln(N), \quad (1.21)$$

co stanowi poszukiwane rozwiązanie równania (1.14)<sup>5</sup>. Jak widać, **dla danej oceny ryzyka odpowiadający jej poziom ryzyka, czyli wartość zagrożona ryzykiem, jest w tym przypadku najbardziej prawdopodobną największą jednorazową stratą spośród wszelkich możliwych największych jednorazowych strat, jakie mogą mieć miejsce w przeciągu  $N$  dni transakcyjnych i wolno (logarytmicznie) rośnie ze wzrostem  $N$ .**

Jak już wspomnieliśmy (przy wyprowadzaniu wzoru (1.15), próg  $\Lambda$  pełni dla uczestnika gry rynkowej rolę zdarzenia ekstremalnego dlatego jest celowym pytaniem o jego rozkład w postaci jawnej (i zamkniętej, o ile jest to możliwe). Podstawiając wyrażenia (1.18) i (1.19) do wzoru (1.16) otrzymujemy, że

$$P(\Lambda; 1/\mathcal{P}_{VaR}) \approx \frac{1}{\langle \Lambda \rangle} \cdot \exp\left(-\frac{\Lambda - \Lambda_{VaR}}{\langle \Lambda \rangle}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{\Lambda - \Lambda_{VaR}}{\langle \Lambda \rangle}\right)\right), \quad (1.22)$$

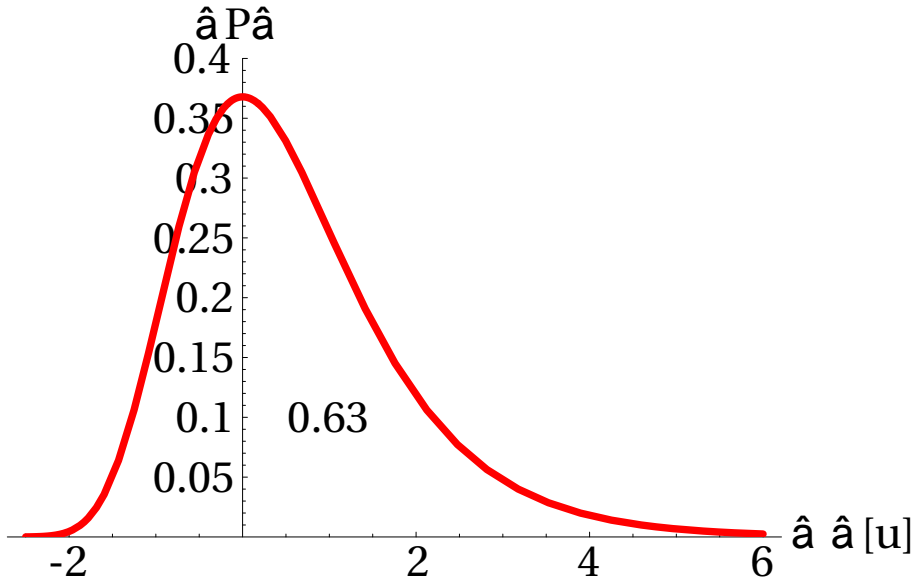
czyli ostatecznie, po dokonaniu zamiany zmiennych  $(\Lambda - \Lambda_{VaR})/\langle \Lambda \rangle \Rightarrow u$ , otrzymujemy, że

$$P(\Lambda; 1/\mathcal{P}_{VaR}) \sim \tilde{P}(u) = \exp(-u) \cdot \exp(-\exp(-u)), \quad (1.23)$$

czyli rozkład Gumbela zdarzeń ekstremalnych (patrz rys.1.1), który omawiamy w rozdz.2. Oczywiście, taki rozkład jest wynikiem wykładniczego charakteru rozkładu bazowego. Ponownie widać (nie mogło być inaczej), że najbardziej prawdopodobną wartością straty jest wartość zagrożona ryzykiem  $\Lambda_{VaR}$ , która jest zarazem ekstremalną wartością straty odpowiadającą przyjętej ocenie ryzyka  $\alpha$  (patrz wzór (1.14)) oraz zdarzeniem rzadkim - zagadnienie to jest dokładniej omawiane w rozdz.2.

---

<sup>5</sup>Drugą równość w (1.21) uzyskuje się bezpośrednio z (1.19) podstawiając tam  $\Lambda = \Lambda_{VaR}$  a następnie wykorzystując przybliżoną równość (1.13).



Rysunek 1.1: Rozkład Gumbela zdarzeń ekstremalnych dany wzorem (1.23), przy czym zmienna  $u \stackrel{\text{def.}}{=} \Lambda - \Lambda_{VaR}$ . Jak widać, najbardziej prawdopodobną wartością zmiennej  $u$  jest  $u = 0$ , czyli  $\Lambda_{MAX} = \Lambda_{VaR}$ , gdzie  $\Lambda_{MAX}$  jest najbardziej prawdopodobną wartością  $\Lambda$ . Można łatwo obliczyć, że prawdopodobieństwo straty  $\Lambda > \Lambda_{VaR}$  wynosi dla rozkładu Gumbela 63% (co zostało zaznaczone na prawej stronie wykresu).

## Przykład 2

Załóżmy teraz, że prawdopodobieństwo  $P_{\tau}(-\Lambda)$  jest zadane, dla  $\Lambda \geq \lambda$ , w postaci potęgowego rozkładu Pareto-Lévy'ego

$$P_{\tau}(-\Lambda) = \frac{\beta}{\lambda} \frac{1}{(\Lambda/\lambda)^{1+\beta}}, \quad (1.24)$$

gdzie  $\lambda$  jest stałą normalizacyjną stanowiącą dodatkowo jednostkę, w której można najwygodniej wyrażać  $\Lambda$ . Zauważmy, że dla  $\beta > 2$  zarówno wartość oczekiwana jak i drugi moment tego rozkładu istnieją<sup>6</sup> i wynoszą odpowiednio  $\langle \Lambda \rangle = \lambda \frac{\beta}{\beta-1}$  oraz  $\langle \Lambda \rangle^2 = \lambda^2 \frac{\beta}{\beta-2}$ ; stąd, wariancja  $\sigma^2 = \langle \Lambda \rangle^2 \frac{1}{(\beta-1)^2} = \frac{\beta}{(\beta-2)(\beta-1)^2} \lambda^2$ . Z równania (1.24) otrzymujemy,

$$\mathcal{P}_{\leq}(-\Lambda) = \frac{1}{(\Lambda/\lambda)^{\beta}}, \quad (1.25)$$

a więc poziom ryzyka

$$\frac{\Lambda_{VaR}}{\lambda} = \mathcal{P}_{VaR}^{-1/\beta} = N^{1/\beta} \quad (1.26)$$

<sup>6</sup>Oczywiście, z istnienia drugiego momentu wynika istnienie wariancji.

jest potęgową funkcją poziomu ufności  $\mathcal{P}_{VaR}$  o wykładniku  $-1/\beta$  oraz potęgowo (z wykładnikiem  $1/\beta$ ) zależnym od liczby dni transakcyjnych  $N$ .

Podstawiając wyrażenia (1.24) i (1.25) do równości (1.17) oraz korzystając z (1.26), otrzymujemy, dla  $\beta \cdot N \gg 1$ , że

$$\Lambda_{MAX} = \left( \frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{1/\beta} \cdot \Lambda_{VaR} \quad (1.27)$$

W przeciwieństwie do poprzedniego przykładu, tylko dla  $\beta \gg 1$  wartość zagrożona ryzykiem  $\Lambda_{VaR}$  jest (z dobrym przybliżeniem) najbardziej prawdopodobną wielkością straty. Dla małych i pośrednich wartości  $\beta$  wielkość  $\Lambda_{VaR} > \Lambda_{MAX}$ , czyli ma miejsce przeszacowanie wielkości straty. Widać więc, jak ważny jest wybór modelu czyli bazowego rozkładu prawdopodobieństwa  $P_\tau$ .

Odpowiemy teraz na pytanie dotyczące jawnej i zamkniętej postaci rozkładu  $P(\Lambda; N)$ . Podstawmy w tym celu (1.24) i (1.25) do wyrażenia (1.16)

$$P(\Lambda; 1/\mathcal{P}_{VaR}) \approx \frac{1}{\Lambda_{VaR}} \cdot \frac{\beta}{(\Lambda/\Lambda_{VaR})^{\beta+1}} \exp\left(-(\Lambda/\Lambda_{VaR})^{-\beta}\right), \quad (1.28)$$

co po prostej zamianie zmiennych  $\Lambda \Rightarrow u = \Lambda/\Lambda_{VaR}$ , tak jak to miało miejsce w rozdz.2, otrzymujemy dyskutowany tam rozkład Fréchet'a

$$P(\Lambda; 1/\mathcal{P}_{VaR}) \sim \tilde{P}(u) = \frac{\beta}{u^{\beta+1}} \exp\left(-\frac{1}{u^\beta}\right) \quad (1.29)$$

dla zdarzeń ekstremalnych (patrz rys.1.2). Zatem nawet w przypadku, gdy mamy do czynienia z rozkładem (1.24) posiadającym *pogrubiony ogon* pojęcia *oceny ryzyka* i *poziomu ryzyka* są dobrze określone i pozwalają na prowadzenie skutecznej analizy danych rynkowych. Jest to właśnie zasadnicza korzyść płynąca z takiego podejścia do problemu ryzyka rynkowego, czyli podejścia w którym **nie posługujemy się momentami rozkładu**.

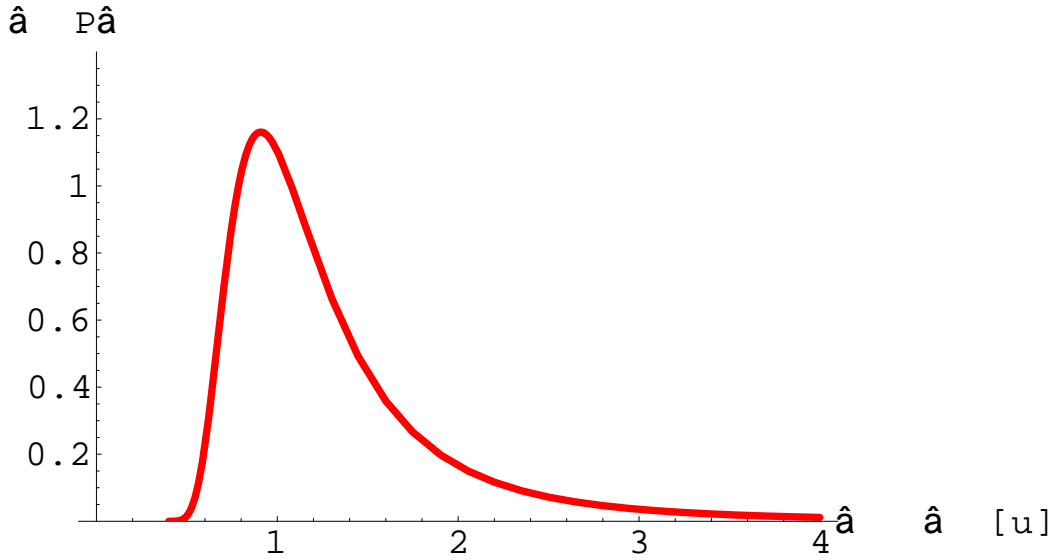
### Przykład 3

Rozważmy teraz bazowy rozkład prawdopodobieństwa zadany w postaci funkcji Gaussa

$$P_\tau(-\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma(\tau)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Lambda - \langle \Lambda \rangle}{\sigma(\tau)}\right)^2\right), \quad (1.30)$$

gdzie  $\langle \Lambda \rangle$  jest przeciętną wielkością straty (przy czym teraz  $\Lambda$  może być zarówno wielkością dodatnią jak też ujemną, czyli może być zarówno stratą jak też zyskiem), natomiast wariancja  $\sigma^2(\tau) = \sigma_0^2 \cdot \tau$  czyli jest (na mocy CTG) liniową funkcją czasu ( $\sigma_0$  jest dyspersją szybkozmiennej, elementarnej np. jednoninutowej, straty).

Podstawiając wyrażenie (1.30) do równania (1.11) a następnie kładąc w nim  $\Lambda = \Lambda_{VaR}$ , czyli wykorzystując równość (1.12), otrzymujemy równanie przestępne



Rysunek 1.2: Rozkład Frécheta zdarzeń ekstremalnych dany wzorem (1.29) dla  $\beta = 3$ , przy czym zmienna  $u \stackrel{\text{def.}}{=} \Lambda/\Lambda_{VaR}$ . Jak widać, najbardziej prawdopodobna wartość zmiennej  $u$  jest nieco mniejsza od 1 (patrz także wzór (1.27)), czyli  $\Lambda_{MAX} < \Lambda_{VaR}$ , gdzie  $\Lambda_{MAX}$  jest najbardziej prawdopodobną wartością największej jednorazowej straty  $\Lambda$ .

(transcendentne) na wartość zagrożoną ryzykiem  $VaR$ , czyli równanie (1.14) dla rozkładu Gaussa,

$$\frac{\Lambda_{VaR} - \langle \Lambda \rangle}{\sqrt{2} \sigma(\tau)} = \text{erfc}^{-1}(2\mathcal{P}_{VaR}) = \text{erfc}^{-1}\left(\frac{2}{N}\right) \quad (1.31)$$

wolno rosnącą ze wzrostem liczby dni transakcyjnych  $N$ . Jak widać, w przybliżeniu gaussowskim poziom ten, jak należało się spodziewać, jest proporcjonalny do dyspersji  $\sigma(\tau)$  oraz maleje w sposób monotoniczny ze wzrostem poziomu ufności  $\mathcal{P}_{VaR}$  - zależność tą w sposób jawny można uzyskać tylko na drodze numerycznej<sup>7</sup>, w przeciwieństwie do omawianych powyżej przykładów.

Jak widać, w tym przypadku zarówno prawdopodobieństwo

$$\begin{aligned} P(\Lambda; 1/\mathcal{P}_{VaR}) &\approx \frac{1}{\mathcal{P}_{VaR}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma(\tau)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda - \langle \Lambda \rangle}{\sigma(\tau)}\right)^2\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2\mathcal{P}_{VaR}} \text{erfc}\left(\frac{\Lambda - \langle \Lambda \rangle}{\sqrt{2}\sigma(\tau)}\right)\right), \end{aligned} \quad (1.32)$$

które łatwo można wyprowadzić z ogólnego wyrażenia (1.16) (korzystając z (1.30) oraz definicji funkcji  $\text{erfc}$ ), jak też (uzyskane powyżej) wyrażenie na  $\Lambda_{VaR}$ , przy-

<sup>7</sup>Przypomnijmy, funkcja  $\text{erfc}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_x^\infty \exp(-y^2) dy$ .

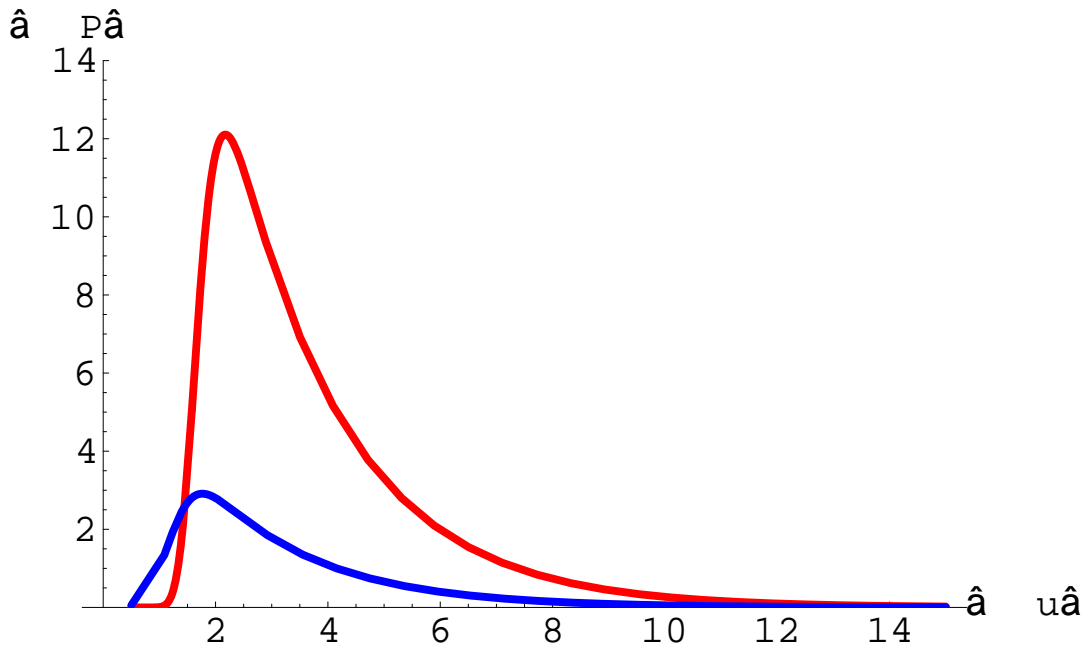
bierają skomplikowane postacie; mianowicie,  $P(\Lambda; 1/\mathcal{P}_{VaR})$  nie daje się wyrazić za pomocą funkcji elementarnych, natomiast uzyskanie  $\Lambda_{VaR}$  w jawnej postaci jest możliwe tylko na drodze numerycznego rozwiązania równania przestępnego (1.31).

Przedstawmy jeszcze dla wygody wyrażenie (1.32) w zmiennej standaryzowanej  $u \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\Lambda - \langle \Lambda \rangle}{\sqrt{2}\sigma(\tau)}$ ,

$$P(\Lambda; 1/\mathcal{P}_{VaR}) \sim \tilde{P}(u) = \frac{1}{\mathcal{P}_{VaR}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) \exp\left(-\frac{1}{2\mathcal{P}_{VaR}} \operatorname{erfc}(u)\right). \quad (1.33)$$

Jak widać, wprowadzenie zmiennej standaryzowanej sprowadziło rozkład do nieco wygodniejszej, jednoparametrowej postaci, przy czym parametrem jest wielkość odgrywająca kluczową rolę w teorii ryzyka, czyli  $\mathcal{P}_{VaR}$ ; jednak rozkład ma nadal postać skomplikowaną.

Na rys.1.3 porównano przebiegi funkcji  $P(u)$  danej powyższym wzorem (gdzie przyjęto  $u > 0$ ) dla dwóch wartości oceny ryzyka  $\mathcal{P}_{VaR} = 0.01$  (linia czerwona) i  $\mathcal{P}_{VaR} = 0.05$  (linia niebieska). Powstaje pytanie (podobnie jak w poprzednich dwóch



Rysunek 1.3: Porównanie przebiegów funkcji  $P(u)$  danej wzorem (1.33) dla dwóch wartości oceny ryzyka  $\mathcal{P}_{VaR} = 0.01$  (linia czerwona) i  $\mathcal{P}_{VaR} = 0.05$  (linia niebieska).

przykładach) o związek pomiędzy  $\Lambda_{MAX}$  i  $\Lambda_{VaR}$

Niestety, relacja na  $\Lambda_{MAX}$ ,

$$\frac{1}{\mathcal{P}_{VaR}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u_{MAX}^2) \approx u_{MAX} (1 + \operatorname{erf}(u_{MAX})), \quad (1.34)$$

którą otrzymuje się z (1.17), ma charakter uwikłany (niejawny) wskazujący, że  $\Lambda_{MAX}$  oraz  $\Lambda_{VaR}$  to są dwie istotnie różne wielkości. Kontrastuje to z wynikami (1.21) i (1.26) otrzymanymi dla dwóch poprzednich przykładów, świadcząc o komplikacji i nieprzejrzystości jaką wprowadzałyby rozkład Gaussa, gdyby chciano go stosować do analizy ekstremalnego ryzyka rynkowego.

Liniowej zależności jaka ma miejsce w naszych przykładach pomiędzy wielkością narażoną na ryzyko  $\Lambda_{VaR}$  a dyspersją  $\sigma$ , o ile ta ostatnia istnieje, można się było spodziewać dzięki zachodzeniu nierówności Czebyszewa, która w naszym przypadku może być zapisana następująco,

$$\Lambda_{VaR}^2 \leq \frac{\sigma^2}{\mathcal{P}_{VaR}} \approx \sigma^2 N, \quad (1.35)$$

(uwaga: zagadnienie istnienia bądź też nieistnienia wariancji analizowane z punktu widzenia danych empirycznych lub pochodzących z symulacji możemy przedyskutować, o ile jesteście Państwo tym zainteresowani), sugerując istnienie relacji proporcjonalności pomiędzy poziomem ryzyka a dyspersją. Niestety, analogiczna sugestia w odniesieniu do zależności od  $N$  jest na ogół błędna, czyli błędna jest sugestia, że  $\Lambda_{VaR}^2$  jest sumaryczną  $N$ -dniową wariancją. Zależność od  $N$  zmienia się od rozkładu do rozkładu, o czym łatwo się można przekonać zważywszy jak bardzo różne są przebiegi linii czerwonej (dotyczącej rozkładu potęgowego o wykładniku kształtu  $\beta = 3$ , patrz wzór (1.26)) i zielonej (dotyczącej rozkładu Gaussa, patrz wzór (1.31)) przedstawionych na rys.1.4.

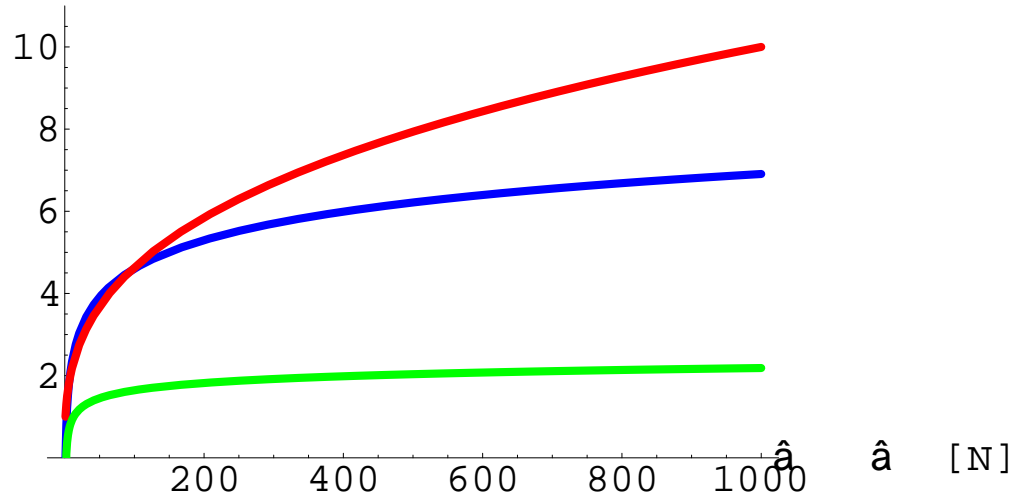
Na rys. 1.4 i 1.5 porównano zależności (odpowiednio przeskalowanej) wartości zagrożonej ryzykiem od liczby dni transakcyjnych dla trzech przedstawionych powyżej rozkładów, czyli po prostu przedstawiono prawe strony wzorów (1.26) (linia czerwona), (1.21) (linia niebieska) i (1.31) (linia zielona). Jak widać, w dłuższym okresie czasu tylko rozkład potęgowy jest wystarczająco uwrażliwiony na wzrost  $N$ , co oznacza, że stosowanie rozkładów innych niż potęgowy w długim okresie czasu naraża uczestnika gry rynkowej na niedoszacowanie straty. Zwłaszcza rozkład Gaussa prowadzi (w tej skali, dla  $N > 100 [td]$ , patrz rys.1.4) do, praktycznie rzecz biorąc, powstania plateau wartości narażonej na ryzyko - tworzy to szczególnie niebezpieczną sytuację dla uczestnika gry rynkowej stosującego ten rozkład. Zauważmy także, że dla  $N < 100 [td]$  (patrz rys.1.5) rozkład potęgowy i wykładniczy dają podobne wyniki (decyzja, którego z nich używać wymaga nieco dokładniejszej analizy).

### 1.3 Krótkie podsumowanie

Podsumowanie przedstawiamy w postaci zbiorczej tabeli 1.3 pokazującej jawne relacje pomiędzy wielkościami charakteryzującymi ryzyko w omawianych przez nas przykładach.



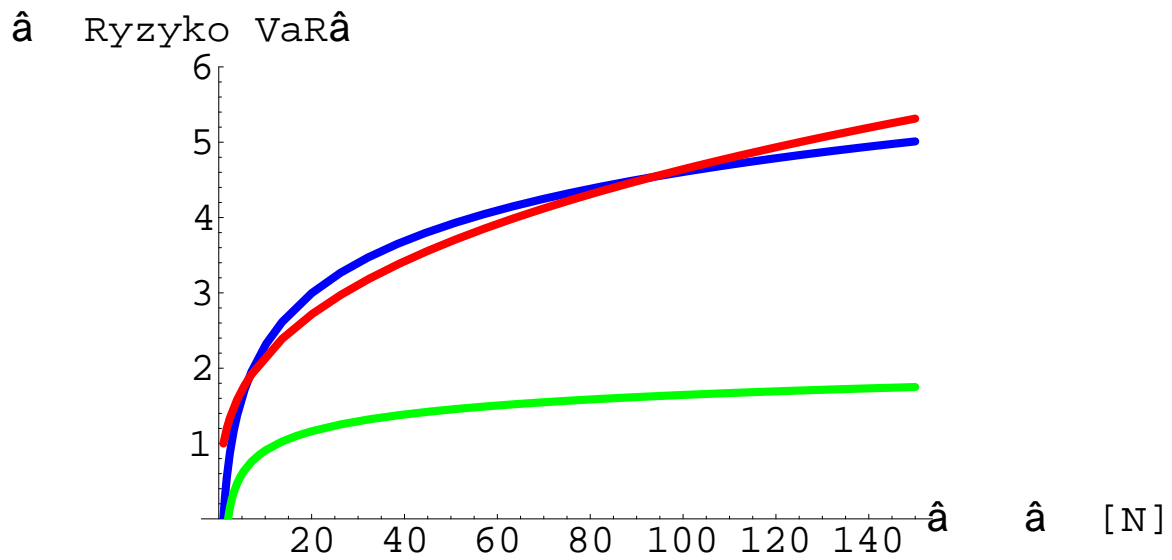
## â Ryzyko VaRâ



Rysunek 1.4: Porównanie zależności trzech wartości zagrożonych ryzykiem od liczby dni transakcyjnych  $1 \leq N \leq 1000$  dla trzech przedstawionych powyżej rozkładów (linia czerwona wzór (1.26), linia niebieska wzór (1.21) i linia zielona wzór (1.31). Jak widać, dla dużej liczby dni transakcyjnych wartość zagrożona ryzykiem dla rozkładu potęgowego szybciej rośnie w porównaniu z pozostałymi dwoma rozkładami (wykładniczym i Gaussa).

Tabela 1.1: Zestawienie jawnych relacji określających poziom ryzyka  $\Lambda_{VaR}$ .

Przykład No.	Jawna relacja $\Lambda_{VaR}(\sigma, \mathcal{P}_{VaR})$	Jawna relacja $\Lambda_{MAX}(\Lambda_{VaR})$
1	$\Lambda_{VaR} \approx -\sigma \ln \mathcal{P}_{VaR}$	$\Lambda_{MAX} = \Lambda_{VaR}$
2	$\Lambda_{VaR} = (\beta - 1) \sqrt{\frac{\beta - 2}{\beta}} \sigma \mathcal{P}_{VaR}^{-1/\beta}$	$\Lambda_{MAX} = \left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right)^{1/\beta} \Lambda_{VaR}$
3	$\Lambda_{VaR} = \sqrt{2} \sigma \operatorname{erfc}^{-1}(2\mathcal{P}_{VaR}) + \langle \Lambda \rangle$	brak



Rysunek 1.5: Porównanie zależności trzech wartości zagrożonych ryzykiem od liczby dni transakcyjnych  $1 \leq N \leq 150$  dla trzech przedstawionych powyżej rozkładów (linia czerwona wzór (1.26), linia niebieska wzór (1.21) i linia zielona wzór (1.31)).

# Rozdział 2

## Teoria zdarzeń ekstremalnych

### 2.1 Statistics of extremes

The central values and typical fluctuations are not sufficient to characterize natural systems which exhibit rare events often dominating the long-term behaviour<sup>1</sup>. Therefore the statistics of extrema is a classical subject of great interest in mathematics, physics and economical and social sciences [2, 3, 4]. In physics, rare and extreme events have been studied in a number of fields [5] (and refs. therein) including self-organized fluctuations and critical phenomena, material fracture, disordered systems at low temperatures, and turbulence. Knowledge of extreme event statistics is of fundamental importance to predict and estimate the risk in a variety of natural and man-made phenomena such as earthquakes, changes in climate conditions, floods and large movement in financial markets. A new field where extreme statistics is of interest are complex networks [5].

#### 2.1.1 General derivation

If one observes a series of  $L$  independent realizations of the same random phenomenon (or its stochastic replica), the central question of the Extreme Value Theory (EVT) imposes how to characterize the maximum observed value of random variables<sup>2</sup>  $x_{max} \stackrel{\text{def.}}{=} \max\{x_l\}_{l=1,\dots,L}$ . For example, the maximum value could be the deepest trap encountered by the walker in a disordered medium (then we would have  $x \equiv \varepsilon$ , where  $\varepsilon$  is the energetic depth of the trap) or the longest mean residence time (called also the sojourn time of the walker) in such a trap (then we would have  $x \equiv \tau$ , where  $\tau$  is the mean residence time).

The main goal of the EVT is to characterize  $x_{max}$  by determination of the probability distribution,  $P(x_{max} = \Lambda)$ , of the maximal value  $x_{max}$ , where  $\Lambda$  is an arbitrary threshold. In the case of dispersive transport and diffusion we apply the EVT to

---

<sup>1</sup>Rozdział ten został zaczerpnięty niemal w całości z pracy przeglądowej [1].

<sup>2</sup>We developed the Extreme Value Theory by considering continuous variables.

characterize, the mentioned above two, related, stochastic variables ( $\varepsilon$  and  $\tau$ ).

First, we calculate the cumulative probability distribution  $P(x_{max} < \Lambda)$  of the random variable  $x_{max}$  by noting that if the maximum  $x_{max}$  is smaller than  $\Lambda$  then all  $x_i$ 's are also smaller than this threshold and vice versa. As these random variables are independent and identically distributed (iid), we can put

$$P(x_{max} < \Lambda) = [\rho_{<}(\Lambda)]^L = [1 - \rho_{>}(\Lambda)]^L, \quad (2.1)$$

by assuming the cumulative probability distribution of random variable  $x$

$$\rho_{<}(\Lambda) = \int_{x_{down}}^{\Lambda} \rho(x) dx, \quad (2.2)$$

where  $\rho(x)dx$  is the probability that the random variable  $x$  can be found in the interval  $x, x + dx$ , and  $x_{down}$  is the lowest value which this variable can assume. Of course, the second equality in expression (2.1) comes from the normalization of the probability density (or distribution)  $\rho(\dots)$  where

$$\rho_{>}(\Lambda) = \int_{\Lambda}^{x_{up}} \rho(x) dx, \quad (2.3)$$

here  $x_{up}$  is the largest value which the variable  $x$  can assume. We set here  $x_{down} \ll \Lambda \leq x_{up}$  so that the strong inequality  $\rho_{>}(\Lambda) \ll 1$  is obeyed. Therefore, the second equality in expression (2.1) takes, with a good approximation, the useful form

$$P(x_{max} < \Lambda) \approx \exp(-L \cdot \rho_{>}(\Lambda)). \quad (2.4)$$

In this way, we reached our second step, namely the intermediate formula useful for further transformations

$$P(x_{max} = \Lambda) = \frac{dP(x_{max} < \Lambda)}{d\Lambda} \approx L \cdot \rho(\Lambda) \cdot \exp(-L \cdot \rho_{>}(\Lambda)), \quad (2.5)$$

where the notation  $\rho(\Lambda) = \rho(x = \Lambda)$  and definition (2.3) have been introduced.

In the third step, we relate the number of observations ( $L$ ) to the rare event. The law of large numbers tells us that one can expect to observe (typically) such events which have a probability at least equal to  $1/L$ . Hence, it would be surprising to encounter an event which has a probability much smaller than  $1/L$ . The largest event  $\Lambda_{max}$ , observed in a series of  $L \gg 1$  iid random variables (which we call indeed the rare one), is thus given by relation

$$\rho_{\geq}(\Lambda_{max}) = \frac{1}{L}. \quad (2.6)$$

We can call the above definition of the rare event the weak one; the stronger definition (which seems to be even easier to interpret) could have the form

$$\rho(\Lambda_{max}) = \frac{1}{L}, \quad (2.7)$$

which is, however, less convenient (from the technical point of view of the general approach)<sup>3</sup>. Since now we operate with two types of max-variables our aim is to find the probabilistic relation between them.

By combining eqs.(2.4), (2.5) and (2.6) we finally find the general formula for the searched distribution

$$P(x_{max} = \Lambda) \approx \frac{\rho(\Lambda)}{\rho_{\geq}(\Lambda_{max})} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_{>}(\Lambda)}{\rho_{\geq}(\Lambda_{max})}\right). \quad (2.8)$$

It is just the above formula that we use to get the Gumbel and Fréchet distributions as well as to find a relation between them.

## 2.1.2 The Gumbel distribution versus the Fréchet one

We assume that disordered substrate (medium) is characterized by the random-trap or valley model defined on a regular lattice. Therefore, all valleys are equally spaced but have different (energetic) depths,  $\{\varepsilon > 0\}$ , while the mountain peaks are all at the same energy level. It is assumed that the distribution of depths is exponential

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle}\right) \quad (2.9)$$

which was done by many authors. The visible aspect of the random-trap model is its symmetry where (in absence of a bias) there is no tendency for the carrier to drift from any configuration of traps. Hence the carrier hops in any possible direction have an equal probability and the different hops between valleys are, of course, uncorrelated. We use the above given distribution as a basis for further considerations.

*The Gumbel distribution.* As we already mentioned in Sec.2.1.1, we can identify the random variables  $x \equiv \varepsilon$ . Moreover, from expression (2.9) we find

$$\begin{aligned} \rho(\Lambda) &= \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \exp\left(-\frac{\Lambda}{\langle \varepsilon \rangle}\right), \\ \rho_{>}(\Lambda) &= \exp\left(-\frac{\Lambda}{\langle \varepsilon \rangle}\right), \quad \rho_{\geq}(\Lambda_{max}) = \exp\left(-\frac{\Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle}\right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

required to express formula (2.8) in an explicit form. Note that the third expression (2.10) together with (2.7) gives an explicit, unique relation between the value of the rare event  $\Lambda_{max}$  and the number of observations  $L$

$$\frac{\Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle} = \ln(L), \quad (2.11)$$

---

<sup>3</sup>Note that for most cases analytically solvable both definitions give identical shapes of distributions of random variables which require only rescaling by additive and/or multiplicative constants.

which points to a slow (logarithmic) growth<sup>4</sup> with increasing  $L$ .

By using (2.10), formula (2.8) takes an intermediate form

$$P(\varepsilon_{max} = \Lambda) \approx \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \exp\left(-\frac{\Lambda - \Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{\Lambda - \Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle}\right)\right). \quad (2.12)$$

To obtain the searched distribution in a closed, explicit form the following transformation of variable  $\varepsilon_{max}$  or  $\Lambda$  should be made

$$u \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\varepsilon_{max} - \Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle} = \frac{\Lambda - \Lambda_{max}}{\langle \varepsilon \rangle} \Rightarrow du = \frac{\Lambda}{\langle \varepsilon \rangle}; \quad (2.13)$$

hence and by expression (2.12) we finally obtain the well known Gumbel distribution

$$P(u) = \exp(-u) \exp(-\exp(-u)) \quad (2.14)$$

of the  $u$  random variable, where we tacitly use the invariance of the probability under the monotonic transformation of random variable (invariant measure); thus we used the equality

$$P(\varepsilon_{max} = \Lambda)d\Lambda = P(u)du. \quad (2.15)$$

Note that the most probable value of this distribution is  $u = 0$  which shows that, paradoxically, the rare event  $\Lambda_{max}$  is the most probable value among  $\varepsilon_{max}$ 's. On the other hand, when  $u \rightarrow \infty$  the Gumbel distribution  $P(u \rightarrow \infty) \rightarrow \exp(-u)$ . Hence, the distribution of random variable  $\varepsilon$  and the analogous (although asymptotic) one of variable  $\varepsilon_{max}$  are exponential. We can say that the exponential distribution is asymptotically stable with respect to the 'max' operation.

*The Fréchet distribution.* Now we are ready to answer the question concerning the distribution of sojourn times of the walker in traps and find (by using formula (2.8)) the distribution of its longest values present within a given series of observations. Then (as we mentioned at the beginning of Sec.2.1.1) we assume that the random variable  $x \equiv \tau$ .

Accordingly, we perform as the first step we perform the transformation

$$\begin{aligned} \varepsilon \Rightarrow \tau(\varepsilon) &= \tau_0 \cdot (\tau')^{\varepsilon/\Delta}, \\ \rho(\varepsilon) \Rightarrow \rho'(\tau(\varepsilon)) &= \frac{1}{\tau_0} \frac{\alpha}{(\tau/\tau_0)^{\alpha+1}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

where we set  $\tau' = \exp(\beta' \cdot \Delta)$ , as we consider over-barrier jumps of a carrier (here  $\Delta$  denotes the energy unit), and the exponent

$$\alpha = \frac{\ln(N)}{\ln(\tau')} = \frac{1}{\beta' \cdot \langle \varepsilon \rangle}. \quad (2.17)$$

---

<sup>4</sup>For the stronger definition of the rare event (2.7) we obtain  $\Lambda_{max}/\langle \varepsilon \rangle = \ln(L/\langle \varepsilon \rangle)$  while the Gumbel distribution (2.14) of variable  $u$  defined by (2.13) is unaffected.

To derive of the second equality in (2.16) we used again the invariance of the probability under the monotonic transformation of random variable (as given by the first equation of (2.16)), i.e. we used the equality

$$\rho'(\tau)d\tau = \rho(\varepsilon)d\varepsilon. \quad (2.18)$$

Note that the *exponential transformation of the random variable leads to the transformation of its (invariant) probability distribution from the exponential one to the power-law*. Conversely, *the logarithmic transformation of random variable leads to the transformation of its probability distribution from the power-law to exponential ones*.

From the second relation in (2.16) and definition (2.3) we can easily calculate the probability

$$\rho'_{>}(\Lambda) = \frac{1}{(\Lambda/\tau_0)^\alpha}. \quad (2.19)$$

and hence

$$\rho'_{\geq}(\Lambda_{max}) = \frac{1}{(\Lambda_{max}/\tau_0)^\alpha}. \quad (2.20)$$

necessary to obtain probability distribution (2.8) in an explicit form<sup>5</sup>. Note that by using eq.(2.6) we obtain  $\Lambda_{max}$  as a power-law function of  $L$ <sup>6</sup>

$$\frac{\Lambda_{max}}{\tau_0} = L^{1/\alpha}. \quad (2.21)$$

It should be noted that the same result is obtained if we use the rare event of energy depth of traps (2.11) as a power (divided by  $\Delta$ ) of  $\tau'$  which gives self-consistency of the approach.

By introducing formulae (2.19) and (2.20) into (2.8) we obtain after straightforward calculations

$$P(\tau_{max} = \Lambda) = \frac{1}{\Lambda_{max}} \cdot \frac{\alpha}{(\Lambda/\Lambda_{max})^{\alpha+1}} \exp(-1/(\Lambda/\Lambda_{max})^\alpha) \quad (2.22)$$

Hence we finally obtain the Fréchet distribution

$$P(u) = \frac{\alpha}{u^{\alpha+1}} \exp(-\frac{1}{u^\alpha}) \quad (2.23)$$

of  $u \stackrel{\text{def.}}{=} \Lambda/\Lambda_{max}$  variable, where as usual we used the invariance of the probability under the monotonic transformation of random variable, i.e. we used the equality

$$P(\tau_{max} = \Lambda)d\Lambda = P(u)du. \quad (2.24)$$

---

<sup>5</sup>The  $\Lambda$  variable used here relates to  $\tau$  and not  $\varepsilon$  one.

<sup>6</sup>By using the stronger definition (2.7) of the rare event one gets a related scaling law  $\Lambda_{max}/\tau_0 = (L/(\tau_0 \cdot \alpha))^{1/(\alpha+1)}$ .

It can be easily found that the most probable value of  $\tau_{max}$  is proportional to the value of the rare event  $\Lambda_{max}$ <sup>7</sup>.

As it is seen, for  $u \gg 1$  the Fréchet distribution is the power-law of exponent  $1 + \alpha$  with the power-law correction to the scaling of exponent  $\alpha$  since

$$P(u) \approx \frac{\alpha}{u^{\alpha+1}} \left(1 - \frac{1}{u^\alpha}\right). \quad (2.25)$$

Analogously to the Gumbel distribution, we can again say that the power-law tail is asymptotically stable with respect to the 'max' operation.

*Relation between the Gumbel and Fréchet distributions.* The above considerations show that, when we made the transformation from the random variable  $\varepsilon$  to its exponential representation  $\tau(\varepsilon)$  (cf. the first relation in (2.16)) as a result we transformed the Gumbel to the Fréchet distributions. In other words, the Gumbel distribution characterizes an additive stochastic process while the multiplicative one is characterized by the Fréchet distribution (where relation between both processes is given by the *log* operation).

### 2.1.3 Pictorial analysis of rank ordering

The main goal of this section is to show the decisive role of rare events in Hierarchical Continuous-Time Random Walk (HCTRW) for asymptotic many time-steps. To make our analysis more convenient we treat variable  $\varepsilon/\Delta$  as a discrete one which is possible as  $\Delta$  can be always assumed to be sufficiently small (i.e. by assuming  $\Delta \ll \bar{\varepsilon}$ ). Again, we assume that  $x \equiv \tau$  is our random variable distributed according to the power-law defined by the second expression in (2.16). Now, we introduce the discrete notation  $j = \frac{\varepsilon}{\Delta}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , and define  $N = \exp(\frac{\Delta}{\bar{\varepsilon}})$ ; hence, with a good approximation,  $\frac{\Delta}{\bar{\varepsilon}} \approx 1 - \frac{1}{N}$ , which makes the transformation to the discrete distribution

$$\rho(\varepsilon) \Rightarrow \rho''(j) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \frac{1}{N^j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.26)$$

and the definition of the rare event

$$\rho''(j_{max}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \frac{1}{N^{j_{max}}}, \quad (2.27)$$

clear<sup>8</sup>.

*Hierarchical waiting-time distribution in a discrete representation.* Note that our hierarchical waiting-time distribution,  $\psi(t)$  (which is the basic function of the

---

<sup>7</sup>More precisely,  $\tau_{max} = (\alpha/(1 + \alpha))^{1/\alpha} \cdot \Lambda_{max}$  and only for  $\alpha \rightarrow \infty$  variable  $\tau_{max} = \Lambda_{max}$ .

<sup>8</sup>In the above derivation we simply exchanged  $d(\frac{\varepsilon}{\Delta})$  for 1. Note that the distribution has still an exponential form and its normalization is conserved, as it should be.



HCTRW) assumes, within the above introduced discrete representation, the following useful form

$$\psi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho''(j) \cdot \psi_j(t), \quad (2.28)$$

where the conditional Poisson waiting-time distribution

$$\psi_j(t) = \frac{1}{\tau_0(\tau')^j} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_0 \cdot (\tau')^j}\right), \quad (2.29)$$

and  $\rho''(j)$  is the weight which plays a fundamental role in these considerations. (Of course, this discretized  $\psi(t)$  conserves the normalization and scaling). For example, the sojourn time can be easily calculated by using the weight,

$$\langle t \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \rho''(j) \cdot \langle t \rangle_j, \quad \langle t \rangle_j = \tau(j) = \int_0^{\infty} t \cdot \psi_j(t) dt = \tau_0 \cdot (\tau')^j. \quad (2.30)$$

Note that the partial residence time  $\langle t \rangle_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , is always finite but the total residence time is finite only when  $\alpha > 1$  and equal to

$$\langle t \rangle = \tau_0 \cdot \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 - \frac{\tau}{N}}; \quad (2.31)$$

otherwise it diverges which fully agrees with the result shown in Sec.2.2. Hence, to obtain  $\langle t \rangle$  finite the weight  $\rho''(j)$  must converge sufficiently quickly with the increase of variable  $j$ .

It is decisive for our present considerations that the ratio of successive weights

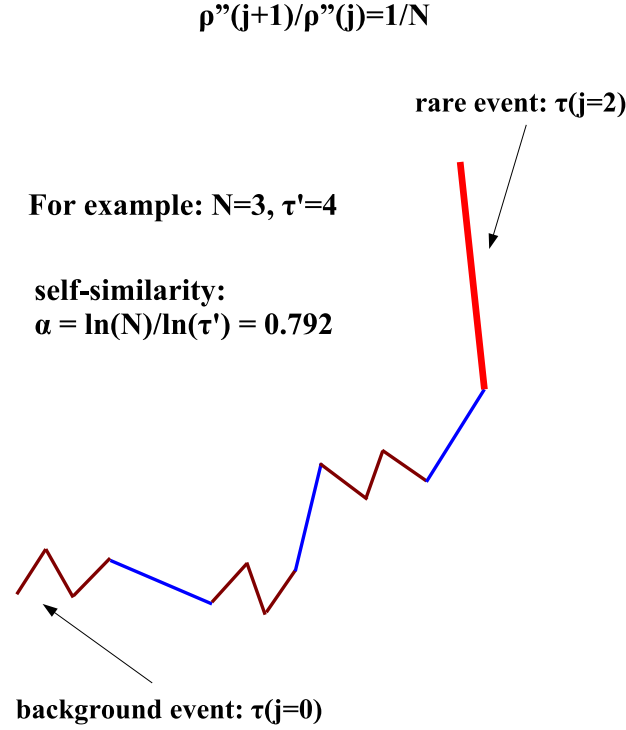
$$\frac{\rho''(j+1)}{\rho''(j)} = \frac{1}{N}, \quad (2.32)$$

be already  $j$ -independent. This means that in each single-step the residence of a carrier in a trap with sojourn time  $\tau_0 \cdot (\tau')^j$  or in state (or hierarchy level)  $j$  is  $N$  times more likely than those of the next larger order  $j+1$ . Hence, one expects (on the average) that the walker will visit  $N^j$  traps having the shortest sojourn time  $\tau_0$  before he encounters a sufficiently deep trap with a mean residence time  $\tau(j) = \tau_0 \cdot (\tau')^j$ ,  $j = 1, 2, \dots$

*Practical aims.* In Fig.2.1 the schematic illustration of this essential observation is given in the form of one-dimensional hierarchically ordered time-intervals or mean residence (sojourn) times in the corresponding traps. Here

- (i) we neglect (due to the Bernoulli law of large numbers) the fluctuation of the number of hierarchy levels as well as their succession (as we calculate the summarized quantities), and
- (ii) plot only the length of the average time-intervals  $\langle t \rangle_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$

## Hierarchical ordering of mean residence times



Rysunek 2.1: The part of the stochastic hierarchy of the carrier residence times in random traps presented in the form of ordered two-dimensional zig-zag intervals (the art-view) where the length of each interval is given by  $\tau(j) = \tau_0 \cdot (\tau')^j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$

As it is seen, we made the transformation from the stochastic hierarchy to its deterministic representation. This makes it easier to realize our practical aims, namely to discuss

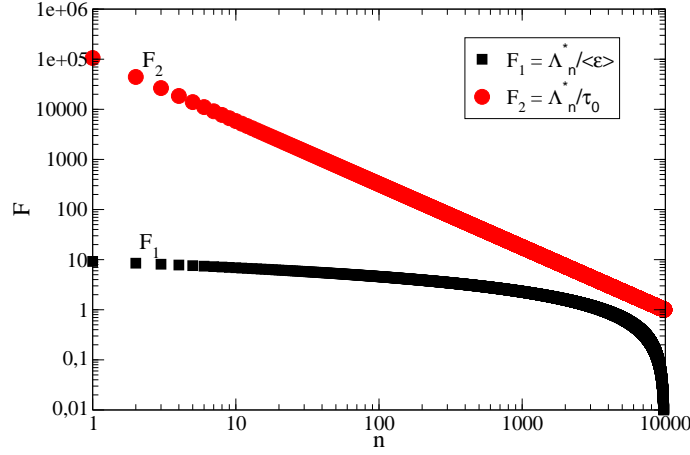
- (1) the rank ordering of residence times,
- (2) the finite-size effect as scaling of characteristic quantities with the size of the hierarchy.

From Fig.2.1 one gets the useful relation between the size of hierarchy  $L$  and the number of its levels  $j (\gg 1$  and  $\tau', N > 1$ ),

$$L(j) = N^j + N^{j-1} + \dots + N^1 + N^0 \approx \frac{1}{1 - 1/N} \cdot N^j. \quad (2.33)$$

The quantity  $L(j)$  is also the total number of steps after which the walker encountered the trap with sojourn time  $\tau_0 \cdot (\tau')^j$ .

## RANK ORDERING



Rysunek 2.2: The rank ordering of residence times and depths of traps described by the power-law (function  $F_1$ , where  $\Lambda_n^*$  is given by eq.(2.50)) and logarithmic ( $F_2$ , where  $\Lambda_n^*$  is given by eq.(2.49)) dependences, respectively.

Now, we can set the rank  $n = L(j)$  and look for the corresponding sojourn time as a function of  $n$  ranked according to its decreasing amplitude. Hence, we can write the one-to-one correspondence in the form:  $n = L(j) \Leftrightarrow (\tau')^{j_{max}-j}$ , where  $j_{max}$  is related to the total number of observations  $L$ ; by using relation (2.33) we can write

$$L = L(j_{max}) \approx \frac{1}{1 - 1/N} \cdot N^{j_{max}}. \quad (2.34)$$

From expressions (2.33) and (2.34) we calculate exponent  $j_{max} - j$  and by introducing it into the formula for  $n$  given the above, we finally find the searched rank dependence

$$\tau(n) = \tau_0 \cdot (\tau')^{j_{max}-j} = \tau_0 \cdot \left(\frac{L}{n}\right)^{1/\alpha}, \quad (2.35)$$

which is (for large  $L$ ) the power-law with exponent  $-1/\alpha$ . In Fig.2.2 we presented this dependence, for example, for  $\alpha = 0.792$  (or  $N = 3$  and  $\tau' = 4$ ) and  $L = 9841$ . Eq.(2.35) shows that hierarchically organized encountered random variables lead to the power-law rank of their amplitudes. Speaking more precisely, we obtained a kind of descending devil's staircase whose average slope is asymptotically given by exponent  $-1/\alpha$ .

*Empirical verification of the tail.* The rank relation (2.35) is very useful in identifying the nature of the tails of probability distributions. The single-step procedure is as follows: one sorts in decreasing order the series of observed random variables (for example,  $\tau$ 's) and one simply draws  $\Lambda_n$  (here equal to  $\tau(n)$ ) as a function of  $n$ . If variables are power-law distributed, this graph should be a straight line in a log-log plot, with a slope given by exponent  $-1/\alpha$  (as shown, e.g., by expression (2.35)).

*Decisive role of rare events.* Our second aim is realized in connection with rare events. Now, we can prove that the (average) total time for which carrier stays in the traps encountered during  $L$  steps obeys the same scaling law with  $L$  as a rare event.

First, from (2.26) and (2.27) we easily obtain

$$\begin{aligned}\rho''_{\geq}(\Lambda) &= \sum_{j=\Lambda}^{\infty} \rho''(j) = \frac{1}{N^{\Lambda}} \Rightarrow \rho''_{\geq}(\Lambda_{max}) = \frac{1}{N^{\Lambda_{max}}} = \frac{1}{L} \\ &\equiv \Lambda_{max} = \frac{\ln(L)}{\ln(N)},\end{aligned}\quad (2.36)$$

where the second relation defines the rare event in agreement with weaker definition (2.7). Hence, we have

$$(\tau')^{\Lambda_{max}} = L^{1/\alpha}. \quad (2.37)$$

By using relations (2.34) and (2.27), we find that just  $j_{max}$  is the rare event in the stronger sense given by (2.7); thus,

$$(\tau')^{j_{max}} = \left[\left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot L\right]^{1/\alpha}, \quad (2.38)$$

which means that the difference  $\Lambda_{max} - j_{max} = \ln N / \ln(1 - 1/N)$  is an unimportant constant.

The total time mentioned above is given by the following sum

$$\begin{aligned}\frac{t}{\tau_0} &\approx N^0(\tau')^{j_{max}} + N^1(\tau')^{j_{max}-1} + \dots + N^{j_{max}-1}(\tau')^1 + N^{j_{max}}(\tau')^0 \\ &= N^{j_{max}} \frac{\left(\frac{\tau'}{N}\right)^{j_{max}+1} - 1}{\frac{\tau'}{N} - 1} \approx \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{\tau'}{N}} \cdot (\tau')^{j_{max}}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{1}{1-\frac{\tau'}{N}} \cdot N^{j_{max}}, & \text{for } \alpha > 1, \end{cases}\end{aligned}\quad (2.39)$$

By introducing eq.(2.38) and eq.(2.34) into (2.39) we obtain the important relations

$$\frac{t}{\tau_0} \approx \begin{cases} \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{1/\alpha}}{1-\frac{\tau'}{N}} \cdot L^{1/\alpha}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{\tau'}{N}} \cdot L, & \text{for } \alpha > 1. \end{cases}\quad (2.40)$$

Note that both relations (2.39) and (2.40) distinguish two essentially different ranges of exponent  $\alpha$  (the marginal case  $\alpha = 1$  is not considered here). For the first range ( $\alpha < 1$ ) we found  $t$  proportional to the rare event, i.e. it scales with the number of steps  $L$  in the same manner as the rare event; this is the main result of this section. The proportionality coefficient is called the (dimensionless) fractional residence time. For the opposite, regular case the analogous coefficient is simply the residence time given above (cf. eq.(2.31) and second relation (??)).

Now, it is easy to calculate the dependence of the mean-time,  $\langle t \rangle$ , used by the walker for a single step, on  $L$ . For the asymptotic long  $L$  one can write the following average calculated along the  $L$ -step trajectory

$$\begin{aligned} \frac{\langle t \rangle}{\tau_0} &\approx \frac{N^{j_{max}}}{L}(\tau')^0 + \frac{N^{j_{max}-1}}{L}(\tau')^1 + \dots + \frac{N^0}{L}(\tau')^{j_{max}} \\ &\approx \begin{cases} \frac{(1-\frac{1}{N})^{1/\alpha}}{1-\frac{1}{N}} L^{\frac{1}{\alpha}-1}, & \text{for } \alpha < 1 \\ \frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{1}{N}}, & \text{for } \alpha > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Of course, this result can be obtained straightforward from expression (2.40) by deviding it simply by  $L$ .

*Additional properties of rare events.* It is useful to have a list of several simple properties of the rare events. The first question which we can easily answer is: how many potential rare events,  $l_{max}$ , typically appear within  $L (\gg 1)$  events<sup>9</sup>? From (2.33) we immediately get (exchanging simply  $j$  for  $l_{max}$ ):  $l_{max} \approx \frac{\ln(L(l_{max}))}{\ln(N)}$ .

The second question is: how the distance between the successive rare events increases with  $L$ ? Again from (2.33) we obtain

$$\Delta L(j) = L(j+1) - L(j) = N^{j+1} \approx (N-1) \cdot L(j); \quad (2.42)$$

i.e. this distance increases linearly with  $L$ .

The third question concerns the ratio of the value of the potential rare events and their difference. Directly from Fig.2.1 we find that this ratio is simply equal to  $\tau'$  independently of  $L$  while their difference

$$\tau_0 \cdot [(\tau')^{l_{max}+1} - (\tau')^{l_{max}}] \approx \tau_0 \cdot (\tau' - 1) \cdot L^{1/\alpha}, \quad (2.43)$$

scales with  $L$  as a single rare event.

## 2.1.4 Rank ordering of random variables. General approach

In this section we ask a more general question than in Sec.2.1.1 although we consider again a series of  $L$  independent observations of random, identically distributed phenomena. We can rank variables  $x_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ , in decreasing order of their amplitude. We denote by  $\Lambda_n$  the  $n^{th}$  encountered value among these random variables. Hence, for example,  $\Lambda_1 = x_{max}$  and  $\Lambda_L = x_{min}$  (i.e. the minimal value of the variables  $x_l$ ).

As the first step we are interested in the probability distribution  $P_n(\Lambda_n)$  of the random variable  $\Lambda_n$ . We can write the exact formula

$$P_n(\Lambda_n) = L \cdot C_{L-1}^{n-1} \cdot \rho(x = \Lambda_n) [\rho_{>}(\Lambda_n)]^{n-1} [\rho_{<}(\Lambda_n)]^{L-n}, \quad (2.44)$$

---

<sup>9</sup>The potential rare event is such an event which is the maximal one but within the given number of steps smaller than  $L$ .

where  $C_{L-1}^{n-1}$  denotes the combinatorial (or Newton binomial) factor. The product  $L \cdot C_{L-1}^{n-1}$  gives the total number of ways to set  $\Lambda_n$  within all possible configurations of  $L-1$  which remain random variables of the series. Note that for  $n=1$  the above formula simplifies to expression (2.5), as it is expected to be.

In the second step we find the most probable value of  $\Lambda_n^*$  (for a given rank  $n$ ). By differentiating probability distribution (2.44) and setting it equal to zero we obtain the formula

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \cdot \frac{d\rho(\Lambda_n)}{d\Lambda_n} \cdot \rho_{>}(\Lambda_n) \cdot \rho_{<}(\Lambda_n) - \frac{n-1}{L} \cdot [\rho(\Lambda_n)]^2 \cdot \rho_{<}(\Lambda_n) \\ + \left(1 - \frac{n}{L}\right) \cdot [\rho(\Lambda_n)]^2 \cdot \rho_{>}(\Lambda_n) = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

useful for further considerations particularly when  $n, L \rightarrow \infty$  with fixed ratio  $n/L$ . Then the first term in (2.45) vanishes and we obtain the formula

$$\rho_{>}(\Lambda_n^*) \approx \frac{n}{L}. \quad (2.46)$$

which generalizes (2.6)<sup>10</sup>.

To complete information about distribution  $P_n(\Lambda_n)$  in the vicinity of  $\Lambda_n^*$  we calculate, as our third step, its width  $\sigma_n$ . We find  $\sigma_n$  by using the saddle-point (or Gaussian) approximation from the second derivative of  $\ln P_n(\Lambda_n)$  calculated at  $\Lambda_n^*$  since in this approximation one can use

$$\frac{d^2}{d\Lambda_n^2} \ln P_n(\Lambda_n) \Big|_{\Lambda_n^*} = -\frac{1}{\sigma_n^2}. \quad (2.47)$$

Hence and from (2.44), we obtain immediately the width of the probability distribution  $P_n(\Lambda_n)$  in the form

$$\sigma_n \approx \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{n}{L} \cdot \left(1 - \frac{n}{L}\right)}}{\rho(\Lambda_n^*)} \quad (2.48)$$

which is more and more sharply peaked around its most probable value  $\Lambda_n^*$  as  $L$  tends to infinity (with fixed ratio  $n/L$ ).

*Two useful cases.* Let's assume the case of exponential tail (given in Sec.2.1.2 by eq.(2.9)). By applying the second relation of eq.(2.10) to eq.(2.45) we obtain that

$$\Lambda_n^* \approx \langle \varepsilon \rangle \cdot \ln\left(\frac{L}{n}\right). \quad (2.49)$$

In the case of the power-law tail (given again in Sec.2.1.2 by the second equation in (2.16)) we obtain

$$\Lambda_n^* \approx \tau_0 \cdot \left(\frac{L}{n}\right)^{1/\alpha}, \quad (2.50)$$

---

<sup>10</sup>We used here the normalization condition  $\rho_{<}(\Lambda_n) = 1 - \rho_{>}(\Lambda_n)$  which is valid for the continuous random variable.

which was already derived in Sec.2.1.3 by the simplified approach (of course,  $\Lambda_n^*$  present in the above formula is equivalent to  $\tau(n)$  in formula (2.35)).

In Fig.2.2 we compare both the above derived results in the log-log plot (where we used  $L = 9841$  and  $\alpha = 0.792$ ). For the exponential distribution we observe an effective slope which is smaller and smaller as the rank variable  $n$  increases, i.e. the remarkable difference between both rank plots is well seen.

### 2.1.5 Concluding remarks

In the paper we present, in the context of amorphous materials, two essentially different types of transport and diffusion: above the temperature threshold  $1/\beta' = \langle \varepsilon \rangle$  they are regular (normal) while below they are anomalous (i.e. non-Gaussian). We discuss, for these two regions, the asymptotic form of the spatial-temporal propagator, the time-dependent drift and the variance emphasizing their subdiffusive character. Moreover, we were able to show the decisive role of rare events in these anomalous types of transport and diffusion by matching the biased Hierarchical Continuous-Time Random Flight model and the Extreme Value Theory. We hope that this approach makes possible a deeper understanding of the transport and diffusion phenomena.





# Bibliografia

- [1] M. Kozłowska, R. Kutner: *Anomalous transport and diffusion versus extreme value theory*, Physica A 357 (2005) 282-304.
- [2] D. Sornette: *Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2000.
- [3] J.-P. Bouchaud and M. Potters: *From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2001.
- [4] R. Kutner: *Extreme events as foundation of Lévy walks with varying velocity*, Chem. Phys. **284** (2002) 481 - 505.
- [5] A.A. Moreira, J.S. Andrade, Jr., and L.A.N. Amaral: *Extremum Statistics in Scale-Free Network Models*, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 268703-1 - 4.