

**Uogólniony i zreinterpretowany model  
materiałów lepkosprężystych  
jako narzędzie badania dynamiki  
wybranych indeksów giełdowych**

Marzena Kozłowska

**Praca doktorska  
wykonana w ramach Studiów Doktoranckich  
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego**

**Promotor: dr hab. Ryszard Kutner prof. ndzw. UW**

*Zakład Dydaktyki Fizyki  
Instytut Fizyki Doświadczalnej  
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski*

Warszawa, lipiec 2009 r.



Składam serdeczne podziękowania  
całemu zespołowi Zakładu Dydaktyki Fizyki IFD WF UW  
za przemiłą atmosferę stymulującą do pracy - w szczególności zaś  
mojemu promotorowi dr hab. Ryszardowi Kutnerowi prof.ndzw.UW  
za bezcenną pomoc, wsparcie i przekazaną wiedzę.

Dziękuję Rodzinie za pomoc w opiece nad moją córką Magdusią.

W mojej pamięci pozostaje również Tata.



# Spis treści

<b>I</b>	<b>Wstęp</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Motywacja i cele pracy</b>	<b>11</b>
1.1	Krótką historia ekonofizyki . . . . .	11
1.1.1	Kalendarium wybranych kryzysów i krachów na giełdach . . . . .	13
1.2	Różnice metodologiczne pomiędzy ekonomią a fizyką . . . . .	20
1.3	Wkład ekonofizyki do ekonomii - wybrane elementy . . . . .	23
1.4	Wybrane cele ekonofizyki . . . . .	24
1.5	Cel pracy . . . . .	25
1.6	Relaksacja fraktalna . . . . .	31
1.6.1	Pierwszy rodzaj relaksacji: prawo Kohlrauscha-Williamsa-Wattsa . . . . .	31
1.6.2	Drugi rodzaj niedebye'owskiej relaksacji: prawo Nuttinga - ciąg dalszy analizy sytuacji dla $0 < \alpha < 1$ . . . . .	34
1.6.3	Trzeci rodzaj relaksacji niedebye'owskiej: funkcja Mittag-Lefflera . . . . .	37
1.6.4	Funkcja Mittag-Lefflera na rynku nieruchomości . . . . .	37
1.6.5	Funkcja Mittag-Lefflera a funkcja q-eksponens Tsallisa . . . . .	40
1.6.6	Dyskusja pików w kształcie ostrzy i niepełnych ostrzy . . . . .	41
1.6.7	Różne kształty funkcji Mittag-Lefflera . . . . .	46
1.6.8	Uwagi o dokładności obliczeń . . . . .	46
1.7	Wzrastające antybąble . . . . .	48
<b>II</b>	<b>Model i porównanie z danymi empirycznymi dotyczą- cymi giełd</b>	<b>53</b>
<b>2</b>	<b>Reologiczny Model Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego</b>	<b>55</b>
2.1	Ewolucja indeksu: rynek wyidealizowany . . . . .	56
2.1.1	Relacja pomiędzy kluczowymi wielkościami modelu . . . . .	57

2.1.2	Wyidealizowana dynamika indeksu . . . . .	60
2.1.3	Analogia do materiału lepkosprężystego . . . . .	62
2.1.4	Hipoteza Rynku Plastycznego . . . . .	65
2.1.5	Hipoteza transformacyjna: przejście do rynku rzeczywistego . . . . .	66
2.1.6	Ułamkowa pochodna Caputo a przypadek równych wykładników kształtu . . . . .	70
2.1.7	Rozwiązanie fraktalnego zagadnienia początkowego . . . . .	70
2.1.8	Uwagi o równowadze popytowo-podażowej . . . . .	72
2.1.9	Usprawiedliwienie używania terminu "przemiana fazowa na giełdzie" . . . . .	73
2.2	Porównanie z giełdowymi danymi empirycznymi i wnioski . . . . .	74
2.2.1	Pobieżna analiza pików $A$ , $a$ i $B$ WIGu . . . . .	75
2.2.2	Dyskusja ostatniego pików WIGu . . . . .	80
2.2.3	Duże błędy cząstkowe a brak arbitrażu - dalsze uwagi . . . . .	88
2.2.4	Analiza ostatniego pików na WIG20 . . . . .	90
2.2.5	Analiza ostatniego pików DAX . . . . .	93
2.2.6	Analiza ostatniego pików DJIA . . . . .	96
2.2.7	Analiza ostatniego pików indeksu NASDAQ . . . . .	98
2.2.8	Analiza ostatniego pików S&P500 . . . . .	101
2.2.9	Zestawienie własności omawianych pików . . . . .	103
<b>III Zakończenie</b>		<b>107</b>
<b>3 Ogólne wnioski i podsumowanie</b>		<b>109</b>
<b>IV Dodatki</b>		<b>115</b>
<b>A Wybrane własności funkcji Mittag-Lefflera</b>		<b>117</b>
<b>B Logarytmiczna-periodyczność</b>		<b>121</b>
B.1	Logarytmiczno-periodyczne rozwiązanie liniowego równania relaksacji . . . . .	121
B.2	Logarytmiczno-periodyczne rozwiązanie równania skalowania . . . . .	125
<b>C Reologiczny Standardowy Model Zenera Ciała Plastycznego</b>		<b>135</b>
C.1	Modele Kelvina i Maxwella materiałów plastycznych . . . . .	135
C.2	Standardowy Model Zenera Ciała Plastycznego . . . . .	138
C.2.1	Przejście od modeli tradycyjnych do fraktalnych . . . . .	139

C.2.2	Analogie . . . . .	139
<b>D</b>	<b>Ścisłe rozwiązanie wprost fraktalnego swobodnego równania relaksacji</b>	<b>145</b>
<b>E</b>	<b>Ścisłe rozwiązanie fraktalnego, niejednorodnego równania relaksacji metodą transformacji Laplace’a</b>	<b>147</b>
E.1	Ułamkowa pochodna Caputo a fraktalne równania relaksacji . . . . .	151



**Część I**

**Wstęp**



# Rozdział 1

## Motywacja i cele pracy

Od roku 1991, czyli od chwili ukazania się drukiem w czasopiśmie *Physica A* pracy Rosario Nunzio Mantegny pt.: *Lévy walks and enhanced diffusion in Milan stock exchange* dotyczącej niegaussowskiego rozkładu zmian mediolańskiego indeksu giełdowego MIB15<sup>1</sup> [1], datuje się systematyczny wkład środowiska fizyków do badań rynków finansowych. Z tego też powodu datę tą traktuje się jako narodziny współczesnej ekonofizyki [2] (i referencje tamże).

### 1.1 Krótka historia ekonofizyki

Przez ostatnie dwie dekady, zarówno metodologie, jak też modele i teorie rozwijające się głównie w ramach fizyki statystycznej, fizyki materii skondensowanej (a w tym fizyki materii miękkiej) oraz teorii pola przenoszone były (i nadal są) do analizy zjawisk i procesów ekonomicznych, pomimo dzielących je różnic (patrz rozdz.1.2). Co więcej, ten rodzaj badań od ponad dekady ma swoją oficjalną nazwę *ekonofizyka* [2]. Nazwa ta narodziła się w czasopiśmie *Physica A*, w którym została stworzona sekcja pod taką właśnie nazwą, gdzie publikowane są prace z pogranicza szeroko rozumianej fizyki i ekonomii. Aktualnie, nazwa ta jest już obecna np. w oficjalnym, amerykańskim wykazie PACS (ang. *The Physics and Astronomy Classification Scheme*) w rozdz. 89 pn.: *Other areas of applied and interdisciplinary physics* (§ 89.65.Gh) a szereg renomowanych naukowych czasopism fizycznych (takich jak np. *Science*, *Nature*, *Physical Review*, *Physical Review Letters*, *Physica A*, *The European Physical Journal B*, *International Journal of Modern Physics C*, *Acta Physica Polonica A i B*) otworzyło swoje łamy dla tego typu prac badawczych.

Prehistoria i historia ekonofizyki oraz jej związek z fizyką zostały systematycz-

---

<sup>1</sup>MIB15 jest indeksem piętnastu największych branż notowanych na giełdzie w Mediolanie; MIB jest akronimem włoskiej nazwy *Milan Index Borsa*.

nie omówione przez fizyka i ekonomistę B.M. Roehnera w jego książce *Patterns of speculation. A study in observational econophysics* [3]. Pogłębiony przegląd najważniejszych osiągnięć ekonofizyki, wliczając w to zwłaszcza oscylacje logarytmiczno-periodyczne, został przedstawiony przez D. Sornette [4], [5]. W roku 2003 ukazał się również popularny artykuł [6] skierowany do polskich czytelników pt.: *Fizyk na giełdzie* zawierający wybrane elementy historii ekonofizyki.

Oczywiście, zachodzi tutaj potrzeba wyjaśnienia znaczenia słowa *ekonofizyka*. Neologizm ten, wprowadzony w 1997 roku przez H.E. Stanley'a, definiuje nową interdyscyplinarną dziedzinę, w której przejawia się aktywność fizyków pracujących nad problemami ekonomicznymi (w mikro- i makroskali) stosujących i rozwijających różne koncepcje zaczerpnięte z nauk fizycznych (np. z fizyki statystycznej a w tym z teorii macierzy przypadkowych, termodynamiki, fizyki materii skondensowanej a w tym z fizyki materii miękkiej, teorii pola i teorii chaosu [7]-[11]). W ten sposób otrzymuje się znacznie głębszą analizę zjawisk i procesów ekonomicznych a nawet socjologicznych.

Nieformalny początek ekonofizyki datuje się opublikowaniem wspomnianego na wstępie artykułu R.N. Mantegny [1]. W pracy tej autor zbadał notowania indeksu MIB15 stwierdzając, że dynamika indeksu dla różnych horyzontów czasowych daje się opisać stabilnym rozkładem Lévy'ego a nie rozkładem Gaussa jak mogłoby się wydawać w oparciu o hipotezę L. Bacheliera [12] (patrz poniżej). Z tego powodu wymieniony artykuł stał się inspiracją dla społeczności fizyków a także matematyków do niebrownowskiego modelowania ewolucji stochastycznej rynków finansowych, czyli np. do wzięcia pod uwagę procesów typu Lévy'ego [13]-[15], rzadkich i ekstremalnych zdarzeń na rynkach finansowych [16] razem z bezskalowością [17] oraz logarytmiczno-periodycznymi oscylacjami opisującymi (wybrane) krachy finansowe [18] a także uwzględnieniu modelu w pełni rozwiniętej turbulencji (opartej na multiplikatywnej kaskadzie) [19].

Pionierska rozprawa doktorska Louisa Bacheliera (którego promotorem był znakomity matematyk i fizyk teoretyczny Henri Poincaré) pojawiła się w roku 1900. W swojej pracy autor badał ewolucję indeksu Paryskiej Giełdy Papierów Wartościowych co zaowocowało sformułowaniem nadzwyczaj płodej hipotezy mówiącej, że rynki finansowe zachowują się w sposób probalistyczny i w związku z tym do ich opisu należy stosować rachunek prawdopodobieństwa i statystykę matematyczną. Co więcej, Bachelier był pierwszym, który odkrył równość łańcuchową (zwaną dzisiaj równością Becheliera-Chapmana-Kołmogorowa) stanowiącą podstawę procesów stochastycznych Markowa. Kilka lat później, wymieniony proces został zastosowany przez Mariana Smoluchowskiego [20] do opisu i wyjaśnienia ruchu Browna - podejście Smoluchowskiego jest dzisiaj kanonicznym w teorii i zastosowaniach procesów stochastycznych.

Kolejnym krokiem w tym kierunku precyzującym rolę ruchu Browna na giełdzie było odkrycie w połowie lat 60-ych XX wieku przez P. Samuelsona tzw. geometrycznego ruchu Browna na giełdzie [21]. W konsekwencji, na początku lat 70-ych F. Black i M. Scholes zaproponowali model dynamiki opcji giełdowych, który dał początek nowej gałęzi matematyki zwanej matematyką finansową [22] zajmującą się dzisiaj już nie tylko dynamiką pochodnych instrumentów finansowych.

Ponadto, na początku lat 60-ych XX wieku Benois Mandelbrot odkrył grube ogony (ang. *fat tails*) w statystyce zmian cen bawełny kwotowanej na giełdzie towarowej [23], co doprowadziło go w konsekwencji do zastosowania struktur fraktalnych nie tylko do ewolucji giełd towarowych ale również finansowych. Nieco później, odkrył on i zastosował w tym kontekście struktury multifraktalne, na których obecnie opiera się szereg narzędzi badawczych ekonofizyki.

Rynki finansowe są dobrze zdefiniowanym przykładem układów złożonych<sup>2</sup>, których modelowanie jest rozwijane w szczególności przez fizyków. Stało się to możliwe i celowe od kiedy rynki finansowe są w sposób ciągły, elektronicznie monitorowane, nawet w skalach rzędu milisekund.

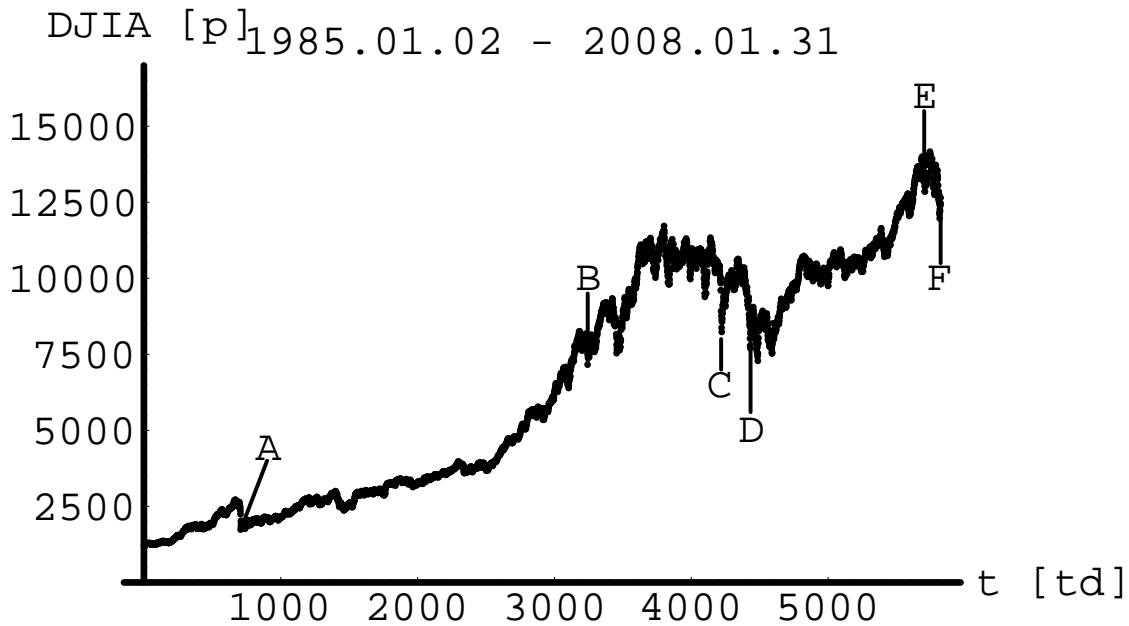
Wszystko to co zostało powiedziane powyżej czyni rynki finansowe atrakcyjnymi obiektami badań, szczególnie dla fizyków zainteresowanych głębszym zrozumieniem ich kolektywnej dynamiki a w tym przede wszystkim przyczynami i skutkami kryzysów i krachów jakie mają miejsce od czasu do czasu na giełdach w gospodarkach wolnorynkowych. Sytuacja ta jest tym bardziej interesująca, że następuje w trakcie trwania procesu globalizacji w skali całej planety nie tylko rynków finansowych ale także całych gospodarek. Paradoksalnie, obecny kryzys ma miejsce w okresie dynamicznego rozwoju azjatyckich gospodarek wolnorynkowych (a w tym zwłaszcza gospodarek Chin i Indii).

### 1.1.1 Kalendarium wybranych kryzysów i krachów na giełdach

Za początek trwającego obecnie kryzysu na rynkach finansowych (ang. *the credit crunch, the credit crisis, a liquidity crisis*) uważa się czwartek 9 sierpnia 2007 roku, gdyż wtedy właśnie nastąpiło nagłe załamanie rynku hipotecznego w Stanach Zjednoczonych. Dow Jones spadł w ciągu sesji z 13652,33 na otwarciu do 13270,67 punktów na zamknięciu, czyli o 2.8%, co dało początek obsuwaniu się giełd aż po dzień dzisiejszy (patrz rys.1.1, gdzie m.in. zaznaczono obszar pomiędzy punktami E i F, w którym zanotowano spadek DJIA w ostatnim kwartale 2007 roku oraz styczniu 2008 roku o ponad 15% na zamknięciu). Dodajmy, że punkt A na rys.1.1

---

<sup>2</sup>Mówiąc o układach złożonych mam tu na myśli takie układy, których podział na podukłady prowadzi do utraty przez nie jakiejś ważnej cechy lub cech wyjściowego układu.



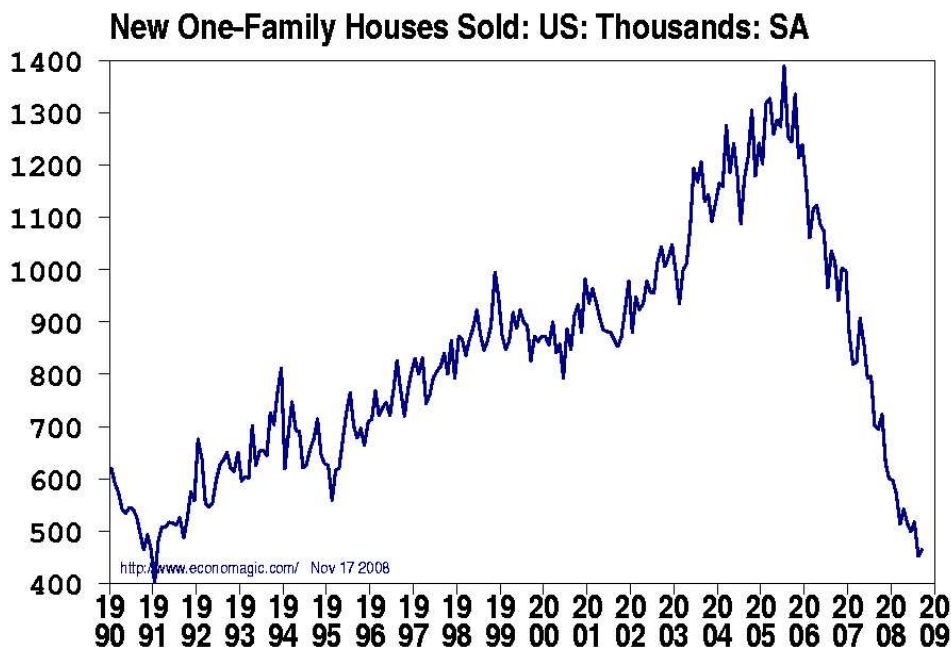
Rysunek 1.1: Notowania indeksu Dow Jonesa obejmujące czasokres 02.01.1985 - 31.01.2008 z zaznaczonymi kilkoma wybranymi kryzysami, o których mowa w tekście.

oznacza wartość indeksu w dniu paniki na giełdzie w Hong-Kongu 19.10.1987 roku, punkt B największego jednosesyjnego spadku indeksu (nie licząc aktualnego kryzysu, z 7715,4 punktów w dniu 27.10.1997 do 7161,2 punktów w dniu następnym) na skutek kryzysu na rynkach azjatyckich, punkt C dotyczy spadku na Wall Street w dniu 17.09.2001, czyli po tygodniowym zawieszeniu notowań, co było spowodowane atakiem terrorystycznym z 11 września 2001 roku, punkt D dotyczy dnia 27.07.2002 roku związanego z ponad 28% spadkiem notowań w przeciągu poprzedzających pięciu miesięcy, wreszcie punkt E wskazuje wartość indeksu na zamknięciu w dniu 09.08.2007 roku a punkt F jego wartość 31.01.2008 r.

Przed utratą płynności rynki finansowe uratowała (jak się później okazało tylko na krótko) interwencja FEDu (ang. *Federal Reserve*, czyli Systemu Rezerwy Federalnej pełniącej rolę banku centralnego Stanów Zjednoczonych) w kwocie około 400 mld dolarów.

Sygnaly o nadciągającym kryzysie pojawiały się jednak już wcześniej a ich kumulacja nastąpiła na początku kwietnia 2007 roku, kiedy to Krajowy Związek Właścicieli Nieruchomości (ang. *National Association of Realtors*) ogłosił, że sprzedaż nowych domów w Stanach Zjednoczonych spadła w marcu o 8,4%, co stanowiło największy miesięczny spadek od 18 lat. Na rys.1.2 przedstawiono liczbę domów

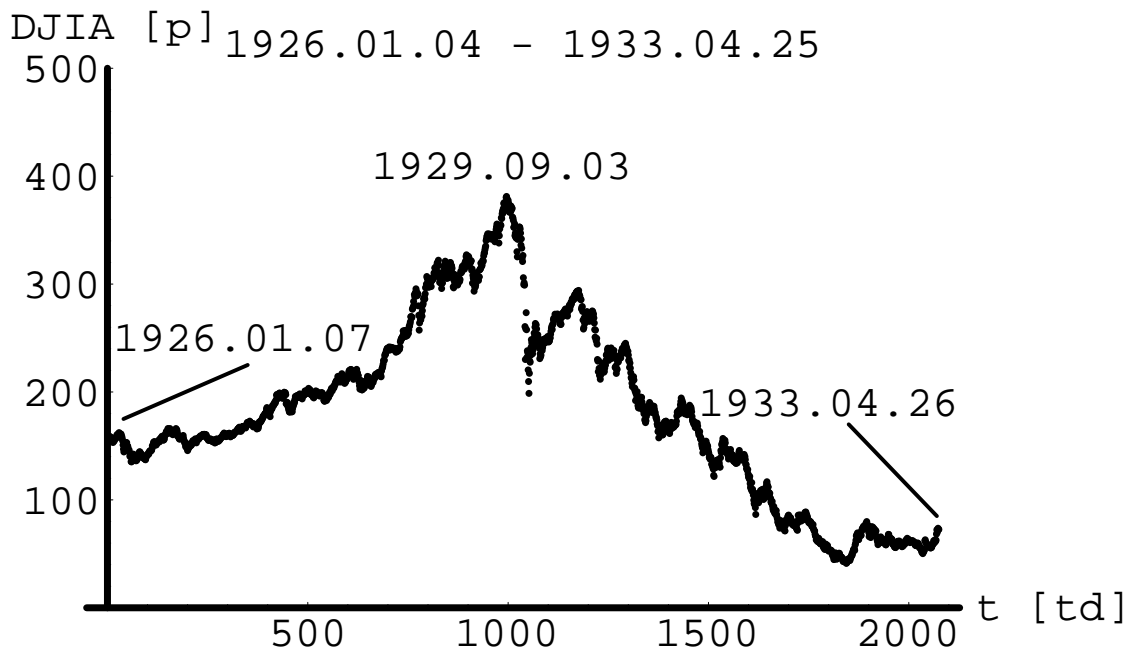
jednorodzinnych sprzedawanych w Stanach Zjednoczonych poczynając od roku 1990 - wspomniany spadek leży na prawym zboczu piku, którego maksimum przypadło w połowie 2005 roku.



Rysunek 1.2: Liczba domów jednorodzinnych (liczonych w tysiącach) sprzedawanych w Stanach Zjednoczonych w latach 1990 - 2008 (zaczepnięto z internetu spod adresu zaznaczonego na rysunku). Jak widać, załamanie sprzedaży nastąpiło w połowie 2005 roku a więc około dwóch lat wcześniej niż załamanie giełdy na Wall Street.

Historię kryzysów współczesnych gospodarek wolnorynkowych zapoczątkował tzw. czarny czwartek 24 października 1929 roku jednakże, największy spadek dzienne zanotowano kilka dni później we wtorek 29 października 1929 roku - wyniósł on (na zamknięciu) 11,7% (patrz rys.1.3) wywołując panikę na niespotykaną skalę. Kryzys w ciągu kilku tygodni ogarnął cały świat - wciąż jest uważany za największy krach giełdowy na świecie. Wygasł samoczynnie wiosną 1933 roku.

Upadło wówczas około 5 tysięcy banków w tym wielki nowojorski Bank Stanów Zjednoczonych a w samych tylko Stanach Zjednoczonych blisko 9 mln osób straci-



Rysunek 1.3: Notowania indeksu Dow Jones obejmującego krach na Wall Street z października 1929 roku. Widoczny jest ogromny uskok indeksu w centralnej części wykresu (wynoszący blisko 12%) - dotyczy on (wspomnianej w tekście) daty 29 października 1929 roku.

ło wszelkie oszczędności. Bezrobocie sięgnęło w szczycie 25% a Produkt Krajowy Brutto (PKB) spadł o ponad 1/4. Kryzys szybko przeniósł się do Europy, która była kapitałowo silnie powiązana z Ameryką, a w tym najpierw do Wielkiej Brytanii (najsilniej związanej z Ameryką) a potem do Niemiec i reszty Europy. Zbankrutowały największe banki Europy Środkowej austriacki Österreichische Credit-Anstalt i niemiecki Darmstädter und Nationalbank (Danatbank); światowy system finansowy zablokował się paraliżując gospodarkę. Rządy próbowały ratować zagrożone banki i gospodarkę ale działania miały charakter partykularny (protekcjonizm, nacjonalizm), były spóźnione, doraźne i daleko niewystarczające.

Jak się wydaje, bezpośrednią przyczyną krachu była utrata płynności przez rynki finansowe. Istotnym skutkiem Wielkiego Kryzysu o długofalowych konsekwencjach było wydarzenie bez precedensu w historii światowych finansów a mianowicie,

- 1) odejście dolara (a zaraz potem funta brytyjskiego) od pieniądza kruszcowego (złotego, srebrnego i miedzianego) a ponadto,
- 2) zerwanie z wymienialnością dolara (a potem innych walut) na złoto.

Tym samym, zarządzanie pieniądzem zostało całkowicie przejęte przez państwo co

nałożyło na gospodarkę wolnorynkową silne więzy, wprowadzając do niej "frontowymi drzwiami" politykę. Tego typu proces był wynikiem utraty wiary w samoregulujące mechanizmy rynku - wiara ta już nigdy nie została w pełni przywrócona, dlatego zaangażowanie państwa w gospodarkę wciąż w skali świata rośnie a stąd wzrasta prymat polityki nad gospodarką.

Należy jednak stwierdzić, że w ostatnich dwóch dekadach XX w. państwo polu-zowało rygory nałożone wcześniej na wolny rynek, np.:

- 1) standardem stała się pełna wymienialność walut,
- 2) swoboda przepływu kapitałów,
- 3) relatywnie niskie cła,
- 4) zrównoważone budżety państw,
- 5) prywatyzacja.

Mimo tego, należy zdać sobie sprawę, że dzisiaj państwo ma, praktycznie rzecz bio-rząc, wszelkie niezbędne narzędzia umożliwiające daleko posunięty interwencjonizm, tzn. umożliwiające nawet zablokowanie funkcjonowania mechanizmów wolnorynko-wych.

Warto odnotować, że prehistorię recesji gospodarczych rozpoczyna ta z roku 1797, zwana "paniką z 1797 r.", wywołana pęknięciem spekulacyjnej bańki cenowej na rynku nieruchomości. Ceny zostały "wywindowane" przez, działający w Ameryce Północnej, Bank Anglii, który kredytował zakupy domów na wschodnim wybrzeżu Stanów Zjednoczonych. Słabnąca koniunktura spowodowała, że wielu kredytobior-ców nie było w stanie regulować swoich wierzytelności, co zmusiło banki do zlicyto-wania ich nieruchomości a tym samym doprowadziło do spadku cen nieruchomości w większej skali. Kryzys przyczynił się do przyjęcia przez Kongres w roku 1800 pierwszej w historii Ameryki ustawy o bankructwie (ważnej przez trzy kolejne lata). Ustawa ta położyła kres wspomnianej panice.

Z kolei za pierwszy kryzys XX w. uważa się kryzys finansowy jaki wybuchł 21 października 1907 roku w wyniku paniki bankowej, swoistego strajku banków, które znacząco ograniczyły wypłaty na wieść o poważnych kłopotach finansowych trzeciego co do wielkości towarzystwa powierniczego w Nowym Jorku (tzn. Knicker-bocker Trust Company). Kryzys został zażegnany już na początku 1908 roku dzięki udzieleniu przez zdrowe banki gwarancji tym, które popadły w kłopoty.

Za pierwszy poważny kryzys po II wojnie światowej uważa się pierwszy kryzys energetyczny z roku 1973. Został on wywołany embargiem krajów zrzeszonych w OPEC na dostawy ropy do krajów, które poparły Izrael w wojnie z Egiptem (Yom

Kippur) wraz z jednoczesnym czterokrotnym podniesieniem przez nie cen ropy. Spowodowało to natychmiastową zapaść gospodarki w Stanach Zjednoczonych (która w tym czasie była w marnym stanie co wymusiło np. uniezależnienie kursu dolara od ceny złota oraz jego dewaluację) a następnie ogromne trudności gospodarcze świata (za wyjątkiem Japonii, której kryzys w zasadzie nie dotknął), trafiając rykoszetem w kraje OPEC. Był to jeden z głównych powodów, który zmusił te kraje do zmiany polityki, umożliwiając tym samym gospodarce światowej odbicie.

Z gwałtownym wzrostem cen ropy naftowej, tzw. szokiem naftowym, mieliśmy do czynienia w roku 1979; wzrost ten był związany ze zniszczeniem przemysłu naftowego Iranu w wojnie domowej, w trakcie której władzę przejęli ajatollahowie. Kryzys wkrótce zakończył się, gdyż potrzeby gospodarcze kraju zmusiły ajatollahów do jego szybkiej odbudowy.

Recesja lat osiemdziesiątych zaczęła się od paniki na giełdzie w Hong-Kongu w czarny poniedziałek 19 października 1987 roku, po czym seria spadków przeszła błyskawicznie przez całą Europę by wreszcie doprowadzić, jeszcze tego samego dnia, do krachu na Wall Street (patrz rys.1.1). Dow Jones odnotował wówczas największy w swojej historii dzienny procentowy spadek indeksu (o 22,6%). Kryzys ten był spowodowany, jak się dzisiaj wydaje, przez przypadkowo wywołaną panikę giełdową (w sytuacji złych nastrojów spowodowanych ogólną recesją), która przyczyniła się do lawinowej wyprzedaży akcji na giełdach. Odwrócenie trendu nastąpiło szybko, gdyż zaistniałe przeceny stworzyły dogodną sytuację dla inwestycji giełdowych a szybka interwencja FEDu skutecznie przywróciła zaufanie do systemu finansowego.

Kryzys finansowy w Azji w roku 1997 zaczął się w Tajlandii, gdzie pojawiła się bańka spekulacyjna na rynku nieruchomości. Kryzysu nie powstrzymały nawet kosztowne posunięcia rządu usiłującego ratować rodzimą walutę, która w stosunku do dolara spadła po uwolnieniu o ponad 100% (z 25 bahtów za dolara do 57). Wkrótce, kryzys rozprzestrzenił się na całą Azję a jego skutkami oprócz Tajlandii dotknięte zostały przede wszystkim Malezja, Filipiny i Indonezja; natomiast Tajwan, Chiny, Indie, Bruneli i Wietnam ucierpiały stosunkowo niewiele. Azja wyszła z kryzysu niemal o własnych siłach dzięki wprowadzeniu nadzwyczajnej dyscypliny finansowej, tzn. spłaceniu długów (w tym tych pomocowych udzielonych przez Międzynarodowy Fundusz Walutowy, MFW) przed terminem. Program MFW stabilizujący gospodarkę Azji wyniósł blisko 40 mld USD i był, jak na tamte warunki, rekordowym chociaż jego skuteczność była niewielka. Wzrost PKB kontynentu azjatyckiego rozpoczął się dopiero w roku 1999, do czego mógł się przyczynić (jako skutek kryzysu) spadek cen surowców.

17 września 1998 roku był początkiem tzw. kryzysu rublowego, będącego pokłosiem kryzysu azjatyckiego. W kryzysie tym, ze względu na spadek cen surowców a w tym zwłaszcza ropy naftowej, szczególnie ucierpiała Rosja (80% jej eksportu sta-

nowiły właśnie surowce). Drugim powodem był brak środków w kasie państwowej ze względu na notoryczne niepłacenie podatków przez najbogatszych a trzecim to kosztowna wojna w Czeczenii. Zatem, brak środków uniemożliwił państwu skuteczną interwencję. Także z tych powodów upadł *Inkombank* - największy bank Rosji a rząd miał kłopoty nie tylko ze spłatą zagranicznego zadłużenia (był zmuszony zwiesić jego spłacanie na okres trzech miesięcy) ale także z regularnym wypłacaniem emerytur. Wszystko to wywołało panikę na moskiewskiej giełdzie. Poważnym skutkiem kryzysu było zachwianie zaufania inwestorów zagranicznych, którzy w pośpiechu wycofali swój kapitał z tego kraju.

Kolejnymi ofiarami kryzysu rublowego stały się kraje nadbałtyckie, w których zapanowała recesja; natomiast Białoruś i Finlandia stanęły na granicy recesji, gdyż zmniejszył się gwałtownie eksport z tych krajów na rynek rosyjski. Ponadto, w kłopoty wpadły Kazachstan, Uzbekistan, Ukraina i Mołdawia silnie powiązane z Rosją. Ostatecznie, region ten od dalszej recesji uratował wzrost cen ropy naftowej w latach 1999 - 2000.

Pęknięcie bańki internetowej w roku 2000 było spowodowane marną sprzedażą internetu na przełomie 1999 i 2000 roku - zadłużone spółki internetowe (tzw. *dot.coms*) nie były w stanie regulować należności. Należności te były związane z inwestycjami w najnowsze, kosztowne technologie typu *hightech* i związane z tym licencje. Gdy sprawa ta wyszła na jaw (w marcowych sprawozdaniach), spowodowała głęboką przecenę spółek internetowych. Dało to początek bessie trwającej do końca 2002 roku (patrz np. rys.1.4).

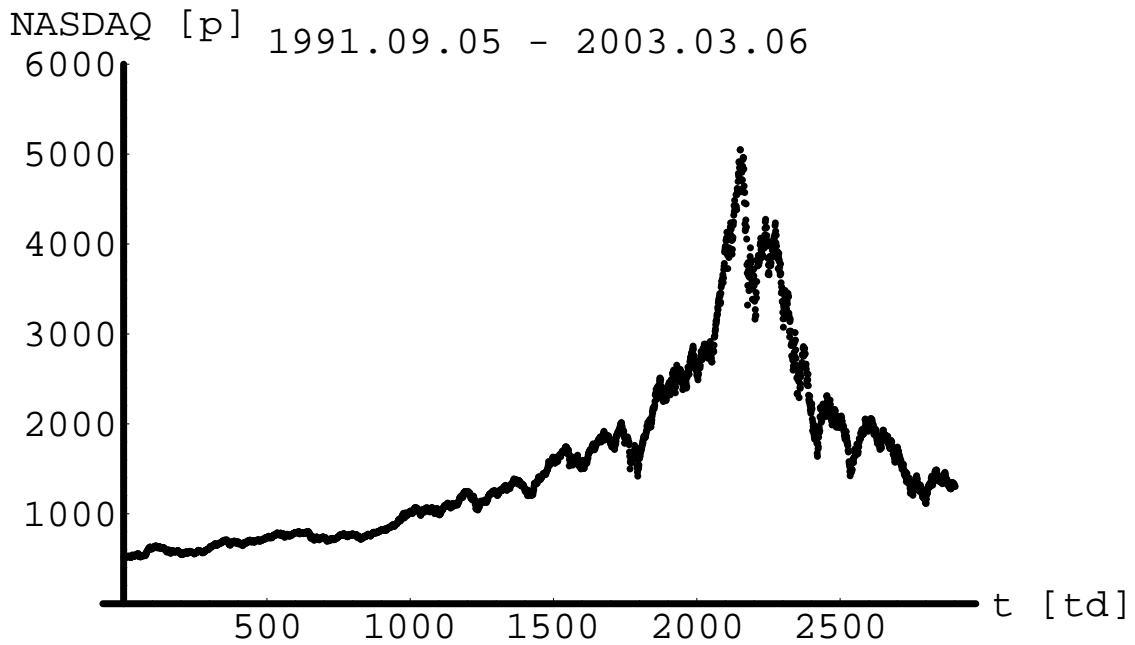
Należy podkreślić, że pozytywnym skutkiem tego kryzysu był ogromny wzrost wydajności pracy spowodowany dynamicznym rozwojem komputeryzacji a w tym zwłaszcza rozwojem sieci komputerowych (np. internetu). To z kolei doprowadziło do pojawienia się znacznej nadwyżki kapitałowej w systemie finansowym, która wsparta niskimi stopami procentowymi utrzymywanymi przez FED (w obawie o nawrót kryzysu) przełożyła się na prawdziwą kredytomanie, stymulowaną przez tzw. prospołeczną politykę mieszkaniową państwa.

Podsumujmy rozważania niniejszego paragrafu zestawieniem (patrz Tabela 1.1) czasu trwania 13 najdłuższych światowych recesji<sup>3</sup> - jeżeli chodzi o aktualnie trwającą to FED szacuje jej zakończenie w USA na koniec tego roku.

Rozważania przedstawione w tym paragrafie wskazują jak często występują kryzysy ekonomiczne oraz jak długo trwają - niemal wszystkie one związane są z jakimiś krachami giełdowymi, stanowiącymi (jak się wydaje) nieusuwalną cechę gospodarek wolnorynkowych. Stąd, jest zrozumiałym dlaczego w niniejszej pracy **ograniczyłam się właśnie do badania krachów giełdowych a w tym zwłaszcza tych**

---

<sup>3</sup>Przez receję rozumie się (przypomnijmy) sytuację, w której przez dwa kolejne kwartały odnotowano spadek PKB.



Rysunek 1.4: Dzielne notowania indeksu NASDAQ w okresie 05.09.1991 r. - 06.03.2003 r. tworzące największą bańkę (tzw. bańkę internetową) na tym indeksie; jej maksimum przypadło na 10.03.2000 r.

na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych, gdzie hossy i bessy (tzn. lokalne piki wskaźników) zajmują blisko połowę całego czasu trwania notowań.

## 1.2 Różnice metodologiczne pomiędzy ekonomią a fizyką

Pomimo wielu dostrzeganych już dzisiaj metodologicznych podobieństw (np. w ramach podejścia statystycznego) pomiędzy ekonomią a szeroko rozumianą fizyką (czyli wliczając np. astrofizykę i geofizykę), istnieją pomiędzy nimi (przynajmniej jak na razie) istotne różnice metodologiczne. Mianowicie,

- Ekonomia zajmuje się układami (społecznościami i społeczeństwami) składającymi się z powiązanych ze sobą jednostek myślących, obdarzonych emocjami (element psychologiczny) tzn. uwzględnia zarówno ich stronę racjonalną jak też psychologiczną.
- Ekonomia uwzględnia fakt, że prognozy dotyczące przyszłości mają wpływ na

Tabela 1.1: Wybrane czasy trwania 13 najdłuższych światowych recesji.

Początek recesji (miesiąc, rok)	Czas trwania recesji w miesiącach
08.1929	43
05.1937	13
02.1945	8
11.1948	11
07.1953	10
08.1957	8
04.1960	10
12.1969	11
11.1973	16
07.1981	16
07.1990	8
03.2001	8
12.2007	dotychczas ponad 12

podejmowanie aktualnych decyzji, np. prognoza inflacyjna (projekcja inflacji) odgrywa kluczową rolę w konstruowaniu budżetu państwa; oczywiście, stojąc na gruncie zasad pierwszych (*ab initio*) można powiedzieć, że tylko przeszłość określa przyszłość tyle tylko, że (jak na razie) zasady te, w odniesieniu do życia społeczno-ekonomicznego, nie są nam znane.

- Oczywisty brak powtarzalności w pozyskiwaniu danych ekonomicznych, gdyż rzeczywistości nie da się zreplikować - każda następna chwila niesie ze sobą inne informacje niż chwile poprzednie. Sytuacja tutaj jest podobna do tej jaka ma miejsce np. w astrofizyce lub geofizyce a nie w tradycyjnie rozumianej fizyce.
- Teorie, modele i strategie ekonomiczne mają wpływ na decyzje podejmowane przez różnych uczestników (instytucjonalnych i indywidualnych) życia gospodarczego a tym samym mają wpływ na kształtowanie rzeczywistości. Co więcej, teorie, modele i strategie te są wprzęgnięte w mechanizm sprzężenia zwrotnego, gdyż wpływając na rzeczywistość wymuszają zwrotnie własne, odpowiednie dostosowanie się do niej, tzn. rzeczywistość wpływa na nie zwrotnie, w kolejnych iteracjach (jest jeszcze o tym mowa poniżej). Innymi słowy, teorie, modele i strategie ekonomiczne powinny mieć nie tylko charakter falsyfikowalny (podobnie jak fizyczne) ale i adaptatywny.
- Empiryczne dane giełdowe posiadają szczególną własność a mianowicie, otrzy-

mywane na ich podstawie informacje uniemożliwiają w zasadzie pojawienie się arbitrażu, tzn. uniemożliwiają pojawienie się zysku bez ryzyka a jeżeli nawet arbitraż pojawi się to ma on charakter krótkotrwały (fluktuacyjny a nie systematyczny) - rynki samoczynnie degradują go. Można powiedzieć, że rynek dąży do przywracania równowagi arbitrażowej (czyli stanu pozbawionego arbitrażu) za każdym razem po naruszeniu zasady braku arbitrażu. Zatem, równowagę arbitrażową na giełdzie można traktować jako odpowiednik równowagi termodynamicznej układu fizycznego. Nie oznacza to, że wspomniane dane giełdowe uniemożliwiają badanie mechanizmów rządzących giełdą. Z degradacji arbitrażu wynika tylko, że wspomniane dane nie pozwalają np. wyznaczyć z zadowalającą dokładnością parametrów modelu istotnych dla osiągnięcia zysku. Natomiast parametry nieistotne z tego punktu widzenia, można wyznaczyć ze stosunkowo dużą dokładnością. A zatem **na rynkach panuje swoista reguła przekory przypominająca regułę przekory Lenza w fizyce. Rynek, na którym inwestorzy poszukują zysku przeciwstawia się temu w taki sposób aby zysk** (odpowienik przepływu prądu w słynnym doświadczeniu Faraday'a ze zmiennym strumieniem pola magnetycznego i cewką) **nie był możliwy bez ryzykownego zainwestowania kapitału** (a w przypadku wspomnianego doświadczenia, bez wykonania pracy przeciwko sile wytworzonej przez indukowany prąd, przeciwstawiającej się zmianie strumienia pola magnetycznego, który wywołuje ten prąd). Przy czym dane fizyczne (przynajmniej na poziomie fizyki klasycznej) umożliwiają, w zasadzie, estymowanie badanych wielkości z dowolnie dużą dokładnością.

Rozwijając nieco uwagę przedstawioną w punkcie drugim można powiedzieć, że nawet gdy odpowiadamy na jedno z kluczowych pytań dotyczących rynku finansowego czyli pytanie o wycenę opcji w chwili bieżącej (np. w ramach klasycznego modelu Blacka-Scholesa, BS) na podstawie przyszłej, przypuszczalnej (domniemanej) wielkości wypłaty to nasze podejście zawiera także elementy metodologii tradycyjnej fizyki. Mianowicie, rozwiązanie zagadnienia aktualnej wyceny ma charakter dwuetapowy. W pierwszym etapie musimy zdefiniować rodzaj błędzenia przypadkowego waloru bazowego (np. ceny akcji). W przypadku modelu BS jest to geometryczny ruch Browna, tzn. ruchowi Browna podlega logarytm ceny akcji (a nie sama akcja). Można powiedzieć, że metodologia tego etapu jest identyczna z metodologią fizyki statystycznej. Dopiero metodologia drugiego etapu różni się w zasadzie od metodologii tradycyjnie rozumianej fizyki. Bowiem, poszukujemy odpowiedzi na pytanie o istnienie takiej miary (zwanej martyngałową) w ramach której bieżąca wycena sprowadza się do obliczenia (zdyskontowanej na daną chwilę) przyszłej wartości oczekiwanej czyli przyszłej wypłaty. Namiastką tego drugiego etapu może być w fizyce ewolucja wstecz w czasie.

Jak widać, prawidłowe rozpoznanie z jakim rodzajem błędzenia waloru bazowego mamy do czynienia jest kluczowe dla wyceny wystawionego na ten walor pochodnego instrumentu finansowego. Rozpoznanie to jest jednak związane z właściwym odczytaniem trendu a następnie zdetrendowanie analizowanego sygnału - właśnie **zasadniczym celem niniejszej pracy jest odpowiedź na pytanie o trend występujący w badanych szeregach czasowych w obszarach lokalnych (chwilowych) pików** obecnych w analizowanym sygnale.

Pomimo wspomnianych powyżej różnic pomiędzy ekonomią a fizyką, istnieją ważne obszary ekonomii, w których zarówno ekono- jak i socjofizyka odgrywają istotną rolę.

### 1.3 Wkład ekonofizyki do ekonomii - wybrane elementy

Do tej pory ekonofizyka miała w zasadzie swój wkład w czterech obszarach ekonomii, są to:

- (1) rynki finansowe,
- (2) rozkład bogactwa i dochodów w różnych społeczeństwach,
- (3) makroekonomia firm (np. rozkład wielkości firm i wskaźników ich wzrostu),
- (4) analiza ewoluujących sieci powiązań.

Można powiedzieć, że badania prowadzone w ramach zarówno ekono- jak i socjofizyki mogą być podzielone na trzy zasadnicze grupy w zależności od tego czy:

- (a) są oparte na metodach statystycznych (obejmujących także termodynamikę fenomenologiczną procesów odwracalnych i nieodwracalnych),
- (b) nie są oparte na metodach statystycznych (ta grupa jest głównie oparta na teorii pola oraz na teorii chaosu deterministycznego) oraz
- (c) są oparte na metodach hybrydowych, gdzie podejścia deterministyczne są zaburzone szumem stochastycznym, typowym przykładem może być tutaj równanie dynamiki stochastycznej Langevina zawierające biały szum.

**Niniejszą pracę należy zakwalifikować jako oryginalny wkład do tej drugiej grupy** (pomimo, że nie jest oparta ani na teorii pola ani teorii chaosu deterministycznego).

## 1.4 Wybrane cele ekonofizyki

Pierwszym i naturalnym celem ekonofizyki jest badanie własności rynków finansowych. Badanie to jest oparte na uogólnionej hipotezie L. Bacheliera z roku 1900 mówiącej o statystycznym charakterze zdetrendowanych finansowych szeregów czasowych. Innymi słowy, po usunięciu trendu, mamy do czynienia z szumem, który może mieć charakter:

- różnorodnych procesów o ograniczonej wariancji np. brownowskich (arytmetycznego, geometrycznego albo ułamkowego ruchu Browna),
- różnorodnych procesów o nieograniczonej wariancji (niespełniających Centralnego Twierdzenia Granicznego) np. typu stabilnych przelotów Lévy'ego, które podlegają Uogólnionemu Centralnemu Twierdzeniu Granicznemu Lévy'ego i Khinchina (twierdzenie to nazywa się także kanoniczną reprezentacją rozkładów stabilnych).

Znalezione na tej drodze własności rynków finansowych noszą nazwę "faktów stylizowanych"; oczywiście, proces kolekcjonowania faktów stylizowanych wciąż trwa.

Kolejnym celem ekonofizyki jest zrozumienie mechanizmów (zwłaszcza o charakterze mikroskopowym) prowadzących do opisu i wyjaśnienia faktów stylizowanych; niestety, dotychczas nie zbudowano modelu, który wyjaśniłby wszystkie tego typu fakty. Przez model mikroskopowy (mikroekonomiczny) rozumie się tutaj taki model, którego elementami są pojedynczy uczestnicy gry rynkowej (indywidualni lub instytucjonalni) powiązani ze sobą różnego rodzaju zależnościami (relacjami)<sup>4</sup>, znajdujący się dodatkowo w środowisku, które na nich w istotny sposób oddziałuje, ograniczeni więzami stworzonymi przez infrastrukturę prawno-socjologiczno-ekonomiczno-kulturową.

Następnym celem ekonofizyki jest budowanie prognoz oraz ocena ryzyka aktywności inwestorów a zwłaszcza ocena ryzyka stosowanych strategii i używanych instrumentów finansowych.

Zwróćmy uwagę, że ostateczne zdefiniowanie celów ekonofizyki jest trudne ze względu na specyficzny charakter relacji pomiędzy teorią a rzeczywistością jaki zachodzi w tej dziedzinie wiedzy - inny niż ma to miejsce w naukach przyrodniczych (o czym wspomniałam już w podrozdz.1.2). Jeżeli bowiem, gracze uwierzą w jakąś teorię i zastosują się do niej w przyszłości to tym samym spowodują, że przewidywania teorii (oparte, siłą rzeczy, na wcześniejszych obserwacjach) mogą się okazać nieaktualne. Wymagać to może poprawienia teorii lub przynajmniej aktualizacji wartości

---

<sup>4</sup>Mówiąc o powiązaniach między inwestorami mam na myśli np. fakt, że mogą oni pozostawać ze sobą np. w kontakcie telefonicznym lub poprzez fora internetowe w ramach giełd.

jej parametrów, co prowadzi do podejścia iteracyjnego (rekurencyjnego), czyli do mechanizmu sprzężenia zwrotnego. Przypadek taki, jak się wydaje, miał miejsce na (koreańskim) indeksie Hang Seng (w okresie krachu azjatyckiego z października 1997 roku), gdzie uczestnicy gry rynkowej uwierzyli w prognozę opartą na funkcji logarytmiczno-periodycznej przewidującej moment zmiany trendu (z wzrostowego na spadkowy) i wyprzedając masowo aktywa doprowadzili do wyraźnie wcześniejszej zmiany trendu a tym samym do dezaktualizacji wyjściowej prognozy. Sytuacja ta wskazuje na konieczność budowania teorii ekonomicznych z wmontowanym mechanizmem adaptacyjnym albo przynajmniej umożliwiającym wmontowanie go, czyli wmontowanie mechanizmu dostosowującego model do zmieniających się warunków wywołanych jego stosowaniem. Na szczęście, tego typu mechanizm można stosunkowo łatwo wprowadzić, np. przekształcając równania modelu do postaci iteracyjnej.

## 1.5 Cel pracy

Pomimo omawianych wcześniej (patrz podrozdz.1.2) różnic, istnieje wiele wyraźnych analogii pomiędzy dynamiką i probabilistyką złożonych układów fizycznych, ekonomicznych czy nawet społecznych [24]-[34]. Metody i algorytmy używane do opisu zjawisk fizycznych stanowią podłoże i inspiracje dla wielu owocnych metod i algorytmów stosowanych w analizie danych ekonomicznych [35]-[37].

Znalezienie modelu opisującego lokalne, chwilowe piki indeksów giełdowych, dobrze widoczne np. w dziennych danych empirycznych, stanowi jedno z zasadniczych, pragmatycznych i badawczych, wyzwań stojących zarówno przed inwestorami giełdowymi jak też przed analitykami rynków finansowych a zwłaszcza przed ekonofizykami. Zasadniczy charakter tego wyzwania bierze się z faktu, że piki te zbudowane są na tzw. bańkach (bąblach) giełdowych, których pęknięcie jest bezpośrednią przyczyną ciągle powtarzających się kryzysów i krachów giełdowych a których natura jest wciąż zagadkowa. Mówiąc tutaj o modelu, mam na myśli taki formalizm, który przynajmniej stwarza możliwość powiązania poziomu mikroskopowego, czyli mikroekonomicznego (np. sieci powiązań między inwestorami giełdowymi) z przebiegiem indeksów giełdowych, czyli poziomem makroskopowym (tzn. makroekonomicznym). **W ramach zaproponowanego w pracy modelu, mającego (do pewnego stopnia) swój formalny odpowiednik w reologii<sup>5</sup>, została podjęta próba analizy nie tylko indeksów giełdowych ale także ich logarytmów - jak wiadomo ich pochodne po czasie są stopami zwrotu<sup>6</sup> na jednostkę czasu a więc wielkościami o zasadniczym znaczeniu dla inwestorów i analityków giełdowych. Niniejsza**

---

<sup>5</sup>Przypomnę, że reologia to dział fizyki materii skondensowanej zajmujący się plastycznością ciał.

<sup>6</sup>W tym kontekście nazywa się je, równie często, stopami wzrostu.

praca stanowi rozwinięcie moich dwóch wcześniejszych publikacji [38] i [39].

**Model zaproponowany w mojej pracy doktorskiej stanowi uogólnienie i zreinterpretowanie modelu fraktalnej relaksacji materiału plastycznego (lepkosprężystego biopolimeru), jaki został stworzony w roku 1991 przez Glöckle i Nonnenmachera (GN)<sup>7</sup> [40] do opisu relaksacji naprężenia wałeczka z ciasta mącznego, mierzonego po prostu za pomocą dynamometru, przy ustalonym wydłużeniu wałeczka. Było to proste doświadczenie przeprowadzone po raz pierwszy przez Scheffelda i Blaira ponad 60 lat wcześniej (patrz Dodatek A) - wynik tego doświadczenia nie dał się opisać relaksacją wykładniczą obserwowaną dla typowych materiałów plastycznych. Podstawowe (konstrytuwne) równanie zaproponowanego przeze mnie modelu jest rozszerzonym analogonem odpowiedniego równania definiującego wspomniany powyżej model GN [41]. Równanie to zostało wyprowadzone przeze mnie na zupełnie innej drodze niż równanie podstawowe modelu GN a mianowicie, oparte zostało na ogólnych własnościach giełdy.**

Przeprowadzona przeze mnie analiza dziennych notowań Warszawskiego Indeksu Giełdowego w horyzoncie czasowym obejmującym okres od 16 kwietnia 1991 roku (czyli od początku istnienia giełdy) do dnia dzisiejszego pozwoliła stwierdzić istnienie trendu (czyli zmiany indeksu o charakterze systematycznym a nie fluktuacyjnym) w obrębie dobrze ukształtowanych pików. Okazało się, że dynamika indeksu może być opisana (wspomnianym powyżej) konstytutywnym, fraktalnym równaniem relaksacji wprowadzonym w ramach Reologicznego Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku (ang. *Rheological Model of the Fractional Dynamics of Financial Market*, RMFDM), jaki zaproponowałam w pracy. Model ten ma charakter deterministyczny a nie probabilistyczny, a więc pozwala na istotną redukcję liczby parametrów związanych z ryzykiem giełdowym - tylko niektóre parametry modelu mogą mieć tutaj charakter probabilistyczny, np. parametr odpowiadający punktowi zwrotnemu definiującemu (poprzez trwałą zmianę trendu) realne (a nie modelowe) położenie maksimum piku.

**W niniejszej pracy koncentruję się na:**

- **analizie trendu obserwowanego w dziennych notowaniach** Warszawskiego Indeksu Giełdowego (WIG, patrz rys.1.5), a także
- na analogicznej analizie dla indeksów innych giełd, np. średniej wielkości typu Frankfurckiej GPW (której głównym indeksem jest *Deutscher Aktienindex*, DAX, patrz rys.1.6) jak też dużych takich jak np. DJIA (patrz rys.1.7), NASDAQ<sup>8</sup> (rys.1.4) oraz S&P500 (rys.1.8, reprezentującym uśrednione notowania

---

<sup>7</sup>W dalszym ciągu będziemy go nazywać Modelem Fraktalnego Ciała Plastycznego GN lub po prostu modelem GN.

<sup>8</sup>NASDAQ (ang. *National Association of Securities Dealers Automated Quotations* nie jest gieł-

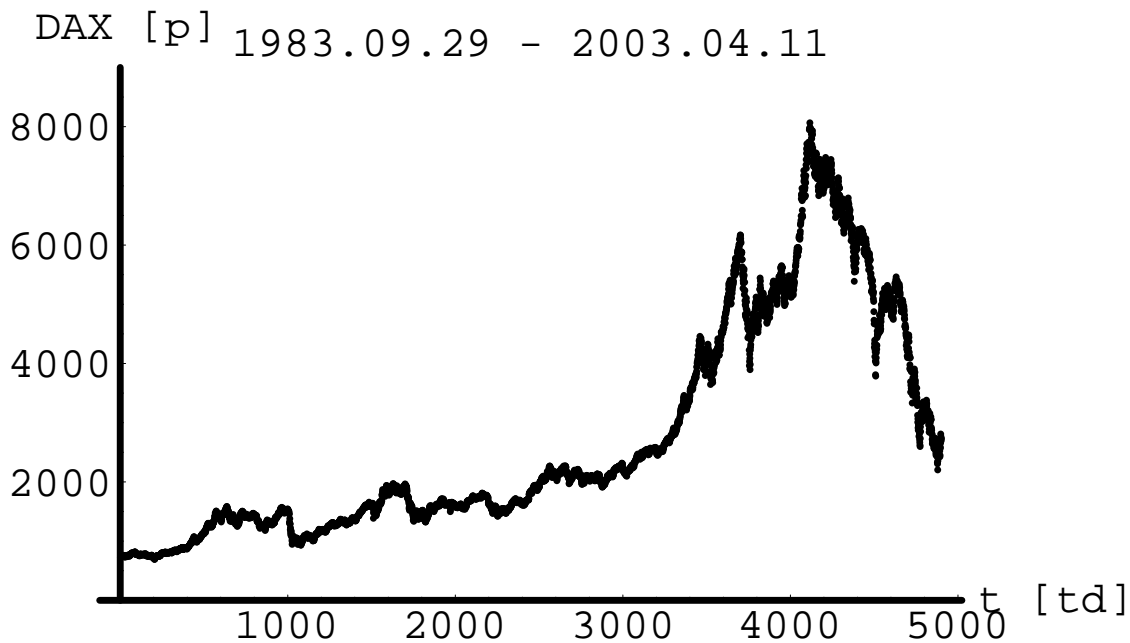
500 największych firm amerykańskich z obu powyższych giełd), koncentrując się na ostatnim dobrze wykształconym piku obejmującym aktualnie trwający kryzys.



Rysunek 1.5: Notowania dzienne indeksu WIG, głównego wskaźnika Warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych: dane dotyczą okresu od początku notowań, tzn. od 16.04.1991 do 22.04.2009. Dobrze widoczne piki oznaczono literami A, B, C (przykładowo wybrane, mniejsze lokalne maksimum oznaczone literą *a* jest lepiej widoczne dopiero w powiększeniu).

Właściwe odtworzenie trendu ma kluczowe znaczenie dla detrendowania sygnału a tym samym przeprowadzenia konkretnej analizy statystycznej uzyskanego w ten sposób rozrzutu danych empirycznych wokół trendu.

Analiza WIG-u jest interesująca i wygodna z kilku powodów. Po pierwsze, dane które miałam do dyspozycji pochodziły bezpośrednio z Warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych czyli z giełdy rozwijającej się, a dynamika indeksu WIG zdaje się być typowa dla małych giełd. Po drugie, definicja rozważanego indeksu jest analogiczna do definicji S&P500, czyli liczona jako suma iloczynów liczby akcji i ich wartości obecnie notowanych na giełdzie wzięta z odpowiednią wagą oraz pomnożona dą w pełnym sensie tego terminu ale pełni podobną rolę, gdyż zapewnia możliwość płynnego, bezpiecznego i anonimowego obrotu akcjami.

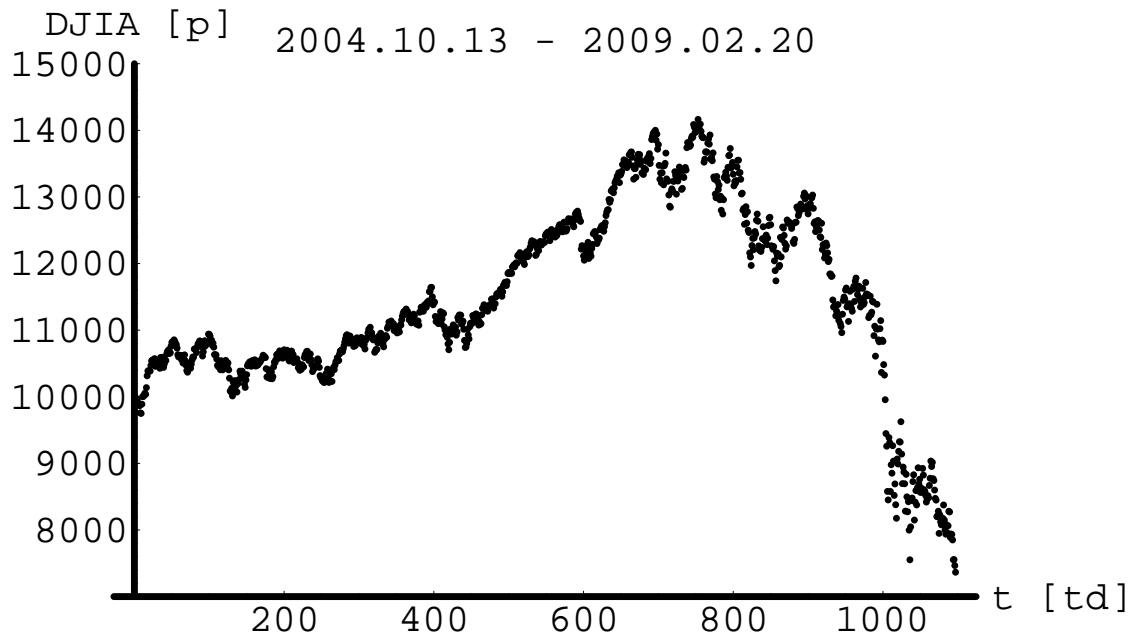


Rysunek 1.6: Dzielne notowania DAX w okresie 29.09.1983 r. - 11.04.2003 r. tworząca największą bańkę (tzw. bańkę internetową) na tym indeksie porównywalną tylko z aktualną; jej maksimum przypadło na 07.03.2000 r.

przez zależny od czasu, wolno zmieniający się współczynnik korygujący. Po trzecie, oscylacje tego indeksu są (paradoksalnie) znacznie słabsze od analogicznych oscylacji występujących na innych (małych i dużych) giełdach oraz są bardziej regularne co pozwala znacznie łatwiej ustalić i opisać trend oraz zmianę trendu.

**W pracy koncentruję się na analizie dobrze ukształtowanych, lokalnych w czasie pikach wybranych indeksów giełdowych** mających m.in. kształt ostrza (ang. *cusp-like shape*) zsuperponowanego z oscylacjami. W praktyce ostrza te mają zaokrąglone albo poszarpane wierzchołki a ich kształt jest bezpośrednio związany z bąblami i krachami giełdowymi, charakteryzując się tym, że (z dokładnością do oscylacji) z dala od położenia maksimum pików dają się opisać (z grubsza rzecz biorąc) funkcją potęgową natomiast w pobliżu maksimum mają taki przebieg, że stopa zwrotu na indeksie (czyli względna zmiana indeksu na jednostkę czasu) rozbiega się potęgowo, przy czym wartość samego indeksu jest zawsze skończona. Piki różnego typu pokrywają znaczącą część całego zakresu notowań (w przypadku WIG jest to nawet przeważająca część) a ich rola w spekulacjach giełdowych jest (jak się wydaje) dominująca.

**Zasadniczym celem niniejszej pracy** jest odtworzenie kształtu zboczy wspomnianych powyżej lokalnych pików za pomocą funkcji uwzględniającej także oscy-



Rysunek 1.7: Notowania indeksu DJIA dotyczące ostatniego, dobrze wykształconego piku (a w tym aktualnie trwającego kryzysu), czyli czasokresu od 13.10.2004 r. do 20.02.2009 r.

lacje indeksu (a w tym nawet dudnienia). Moim pierwszym zadaniem, na poziomie zaawansowanej analizy technicznej, jest analityczne opisanie zarówno

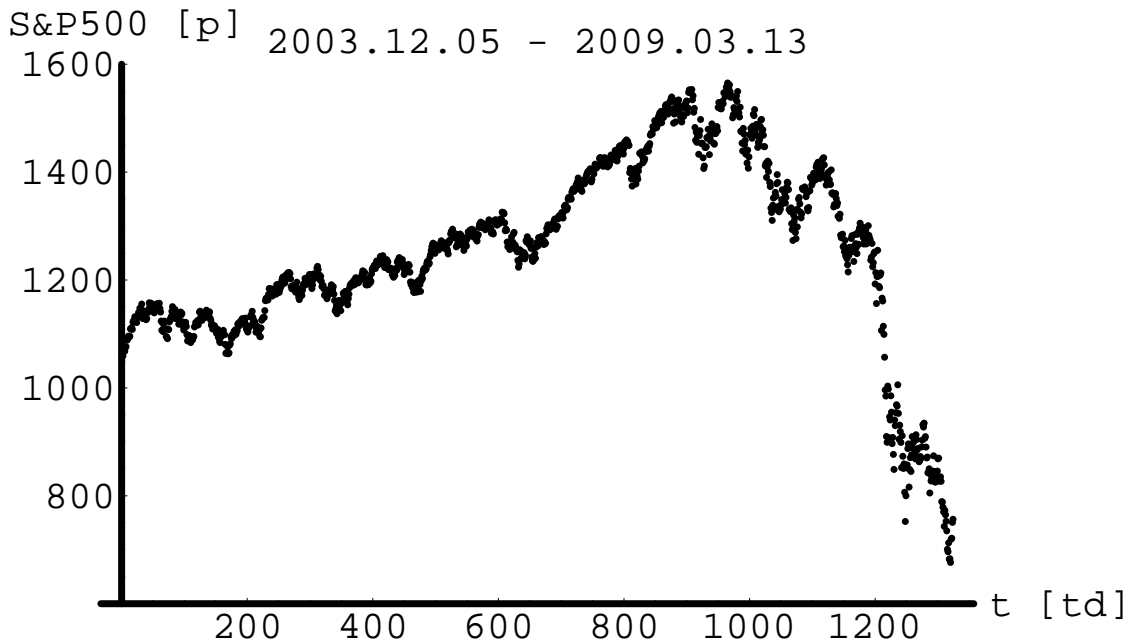
- zbocza opadającego jak i
- zbocza narastającego,

traktując je jako dwa odrębne procesy.

Kolejnym zadaniem, na poziomie makroekonomicznym, jest uwzględnienie efektu "płynięcia" giełdy, czyli efektu stadnego polegającego na gwałtownym wzroście lub spadku indeksu przy jednoczesnym zachodzeniu równowagi popytowo-podażowej.

Wreszcie, trzecim zadaniem, na poziomie mikroekonomicznym, jest modelowanie emocji bez czego zrozumienie funkcjonowania giełdy nie wydaje się być możliwe.

Analityczny opis dynamiki wyżej wymienionych zboczy doprowadził do wniosku, że w układzie istnieje (pewnego rodzaju) pamięć. Jest ona wynikiem takiej aktywności inwestorów, która jest stymulowana zarówno obserwacjami historycznych (archiwalnych) danych empirycznych jak też przyszłymi oczekiwaniami. Na przykład, obserwowany proces relaksacji może być rozważany jako opóźniony "efekt tarcia" - retardacja (skutków w stosunku do przyczyn) widoczna na rynkach finansowych.



Rysunek 1.8: Notowania indeksu S&P500 dotyczące ostatniego, dobrze wykształconego piku (a w tym aktualnie trwającego kryzysu), czyli czasokresu od 05.12.2003 r. do 13.03.2009 r.

Można również rozważać to końcowe gwałtowne narastanie zboczy oraz ich początkowe strome opadanie po zmianie trendu (z hossy na bessę) jako rezultat "owczego pędu" inwestorów lub ogólniej, pozytywnego sprzężenia zwrotnego prowadzącego w rezultacie do krachu na rynku finansowym z powodu gwałtownie powstałej awersji do ryzyka a w tym panicznej chęci realizacji zysków.

Ponadto, celem opisanie obu narastających zboczy wybranych pików WIGu oznaczonych na rys.1.5 przez  $A$  i  $B$  (tzn. oprócz lewego zbocza pierwszego lokalnego piku oznaczonego na tym rysunku przez  $A$ , którego zachowanie można opisać funkcją eksponens jak również obu zboczy ostatniego piku  $C$ , do których została dopasowana funkcja Mittag-Leffler'a (ML) zsuperponowana z oscylacjami) używam nowszego rodzaju oscylacji logarytmiczno-periodycznych, tzw. wzrastających antybąbli (ang. *bullish anti-bubbles* lub *inverted bubbles*), które zostały wywołane egzogenicznym krachem powodującym wzrost cen mocno niedocenionych akcji (tworzących indeks WIG).

Jak widać, **rozważania prowadzone w niniejszej pracy opierają się na dwóch wzajemnie powiązanych procesach**, są to:

- (i) niedebye'owskie czy też nieeksponencjalne procesy relaksacji zaobserwowane dla wielu materiałów plastycznych [41]-[49], jak również dla danych tikowych

dotyczących kontraktów futures notowanych na londyńskiej LIFFE [25] oraz

- (ii) różne rodzaje bąbli spekulacyjnych związanych z krachami finansowymi [18, 37].

Rozwiązanie znalezione w ramach zaproponowanego w pracy Reologicznego Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego, uzupełnione przykładowo o oscylacje logarytmiczno-periodyczne, stanowi podstawę, która może być w przyszłości użyta do budowy systemów oprogramowania monitorującego i analizującego rynki finansowe oraz ułatwiającego przeprowadzanie prognoz zmniejszających ryzyko inwestycji finansowych.

## 1.6 Relaksacja fraktalna

Do opisania niedebye'owskich procesów relaksacyjnych w układach złożonych stosuje się kilka rodzajów funkcji relaksacji - tutaj podam trzy, które uważam za szczególnie ważne z punktu widzenia niniejszej pracy (o czwartej wspominając jedynie dla porównania i kompletności rozważań). Ponadto, w podrozdz.1.7 omawiam szeroko stosowane (w kontekście dynamiki indeksów giełdowych) oscylacje logarytmiczno-periodyczne [55, 56] (oraz odnośniki literaturowe tamże).

### 1.6.1 Pierwszy rodzaj relaksacji: prawo Kohlrauscha-Williamsa-Wattsa

Pierwszy rodzaj relaksacji niedebye'owskiej opisuje się za pomocą znanego prawa Kohlrauscha-Williamsa-Wattsa (KWW) [45], czyli za pomocą tzw. rozciągniętego eksponenta postaci:

$$f(t) \sim \exp\left(-\left(\frac{|t|}{\xi}\right)^\alpha\right), \quad \alpha > 0, \quad (1.1)$$

gdzie  $t$  jest czasem liczonym wstecz albo wprzód od miejsca usytuowania maksymalnej wartości  $f(t=0)$  funkcji relaksacji<sup>9</sup>  $f(t)$  a charakterystyczny czas  $\xi(>0)$  jest jej czasem relaksacji<sup>10</sup>, (natomiast ' $\sim$ ' oznacza, jak zwykle, proporcjonalność).

---

<sup>9</sup>Termin '*relaksacja wstecz w czasie*' jest tutaj równoważny terminowi '*wzrost w czasie*'. Wprowadzenie relaksacji wstecz jest, jak pokażemy w rozdz.2, zabiegiem umożliwiającym uwzględnienie w modelu (w relatywnie prosty sposób) wpływu przyszłych, skumulowanych oczekiwanych zysków lub strat na bieżące decyzje inwestorów.

<sup>10</sup>Wprowadzenie tutaj parametru  $\xi$  na oznaczenie czasu relaksacji ma go odróżnić od analogicznego występującego w funkcji Mittag-Lefflera (1.4) i nazwanego  $\tau$ ; pomiędzy tymi parametrami zachodzi proporcjonalność podana w podpisie rys.1.9.

Zauważmy, że z relaksacją wykładniczą (standardową), często nazywaną relaksacją Maxwella-Debye'a, mielibyśmy do czynienia wtedy, gdyby wykładnik kształtu  $\alpha = 1$ ; oczywiście, relaksacja niedebyeowska odpowiada sytuacji, gdy  $\alpha \neq 1$ . W obu przypadkach wartość funkcji relaksacji  $f(t = \xi)$  jest taka sama (patrz punkt przecięcia linii zielonej i niebieskiej na rys.1.9) i  $e$ -razy mniejsza od wyjściowej, czyli maksymalnej wartości  $f(t = 0)$  (gdzie  $e$  jest jak zwykle podstawą logarytmu naturalnego), standaryzując tym samym sens parametru  $\xi$ .

W pracy mam do czynienia

- 1) zarówno z realnymi sytuacjami, gdzie wykładnik kształtu  $0 < \alpha < 1$  - mówimy wtedy o zboczu w kształcie półostrza, jak też
- 2) z sytuacjami odwrotnymi (gdy  $\alpha \geq 1$ ).

### Wstępna analiza sytuacji dla $0 < \alpha < 1$

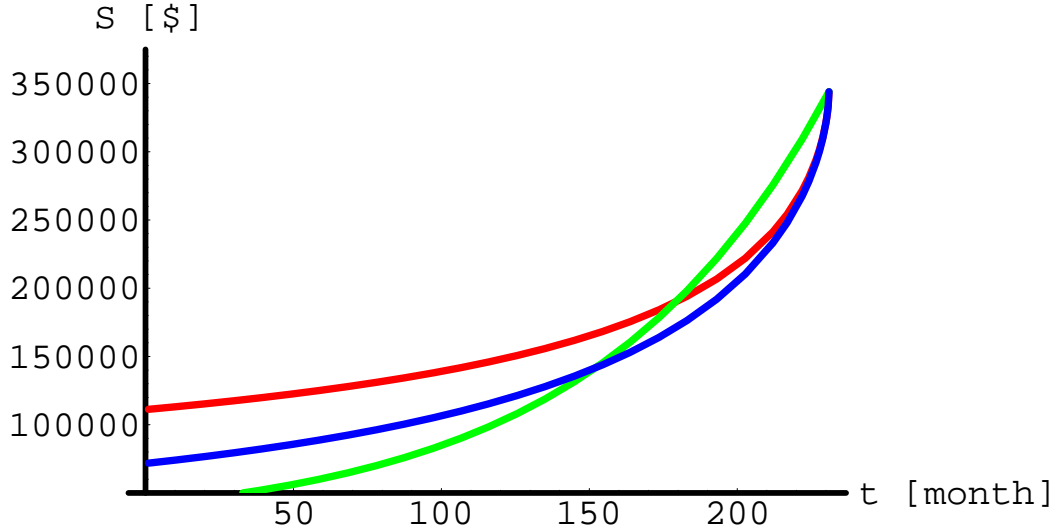
Na rys.1.9 porównałam przebieg trzech funkcji relaksacji. Większość obliczeń tego podrozdziału została przeprowadzona (dla lewego zbocza piku) dla wykładnika kształtu  $\alpha = 0.60$ ; taka właśnie wartość tego wykładnika jest wynikiem dopasowania uogólnionego eksponensa ML do wybranych danych empirycznych - patrz definicja (1.4) i rys.1.13 oraz towarzyszące im wyjaśnienia.

Przykładowo, na rys.1.9 porównano przebieg funkcji ML dla lewego zbocza piku z analogicznym (tzn. dla tych samych parametrów) przebiegiem funkcji typu rozciągnięty eksponens ( $SE^{11}$ ) oraz ze zwykłym eksponensem. Jak widać, tylko w obszarze maksimum funkcje ML i SE pokrywają się (przy zdolności rozdzielczej zadanej rozmiarem rysunku) natomiast zwykły eksponens ma zupełnie inny przebieg (zarówno w okolicach maksimum jak też z dala od niego, gdzie praktycznie rzecz biorąc znika). Zauważmy, że na tym rysunku przedstawiono tylko zakresy krótkich i pośrednich czasów (w porównaniu z czasem relaksacji  $\tau$ ).

Tytułem uzupełnienia na rys.1.10 przedstawiono pochodne funkcji widocznych na rys.1.9 po to aby znaleźć przedział czasu, w którym relaksacja (wstecz w czasie) rozciągniętego eksponensa (linia granatowa) jest szybsza od relaksacji odpowiadającej mu funkcji wykładniczej (tzn. o takim samym czasie relaksacji, patrz zielona linia na tym rysunku). Przedział ten, jak widać, zaczyna się w punkcie przecięcia linii granatowej i zielonej ( $t_{CROSS} \approx 217 [tm]^{12}$ ); odpowiada to takiej chwili, dla której styczne do linii zielonej i niebieskiej przedstawionych na rys.1.9 są do siebie równoległe - punkt ten znajduje się wyraźnie powyżej punktu przecięcia obu krzywych.

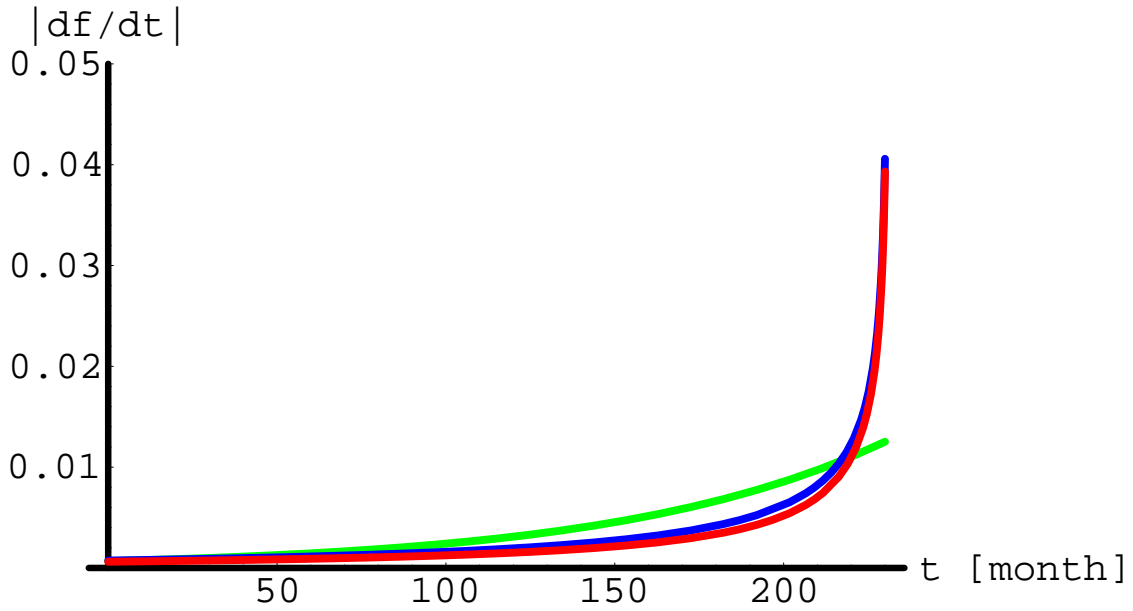
<sup>11</sup>'SE' jest akronimem angielskiej nazwy *stretched exponent*.

<sup>12</sup>'tm' jest akronimem nazwy *trading month*; na wykresach w podrozdz.1.6 używam także równoważnie słowa *month*.



Rysunek 1.9: Porównanie przebiegu funkcji rozciągnięty eksponens (1.1) (linia granatowa) oraz funkcji wykładniczej (linia zielona); przy okazji, zamieszczono przebieg funkcji Mittag-Lefflera (1.4) (linia czerwona). Dla czasu dużo krótszego od czasu relaksacji  $\tau (= 95 [tm])$ , patrz także definicja (1.4) oraz rys.1.13) rozciągnięty eksponens o czasie relaksacji wynoszącym  $\xi = \tau [\Gamma(1 + \alpha)]^{1/\alpha} = 79 [tm]$  (tutaj  $\alpha = 0.60$ , patrz także rys.1.13) jest z dobrym przybliżeniem równy funkcji Mittag-Lefflera o tym samym wykładniku  $\alpha$  i czasie relaksacji  $\tau$ . Rozciągnięty eksponens oraz funkcja wykładnicza posiadają taki sam czas relaksacji  $\xi$ . Przecięcie tych funkcji ma miejsce dla czasu (liczonego wstecz od maximum położonego w punkcie  $t_c = 231 [tm]$ ) równego podanemu powyżej wspólnemu czasowi relaksacji  $\xi = 79 [tm]$ . Inaczej mówiąc, punkt przecięcia pojawia się dla chwili  $t_{CROSS} = t_c - \xi = 152$  (liczonej wprzód) co jest widoczne na wykresie (przecięcie linii granatowej i zielonej).

Do zagadnienia przyspieszonej relaksacji (przyspieszonego wzrostu) powracam jeszcze przy okazji bardziej szczegółowej analizy funkcji Mittag-Lefflera (patrz dalsze rozważania w niniejszym rozdziale oraz w rozdz.2).



Rysunek 1.10: Porównanie przebiegu pochodnych funkcji przedstawionych na rys.1.9 tzn. funkcji Mittag-Lefflera (czerwona linia), rozciągniętego eksponensa (niebieska linia) oraz funkcji wykładniczej (zielona linia). Jak widać, powyżej punktu przecięcia linii czerwonej i zielonej ( $t_{CROSS} \approx 217 [tm]$ ) funkcja ML rośnie szybciej niż zwykły eksponens, gdyż jej pochodna ma wtedy większą wartość rozbiegając się do nieskończoności w punkcie  $t_c = 231 [tm]$  - dlatego jej przebieg został zatrzymany przykładowo na 1 miesiąc przed osiągnięciem przez funkcję ML maksimum w punkcie  $t_c$ . Oczywiście, pochodne funkcji ML i rozciągniętego eksponensa dążą do siebie w miarę zbliżania się do punktu  $t_c$ .

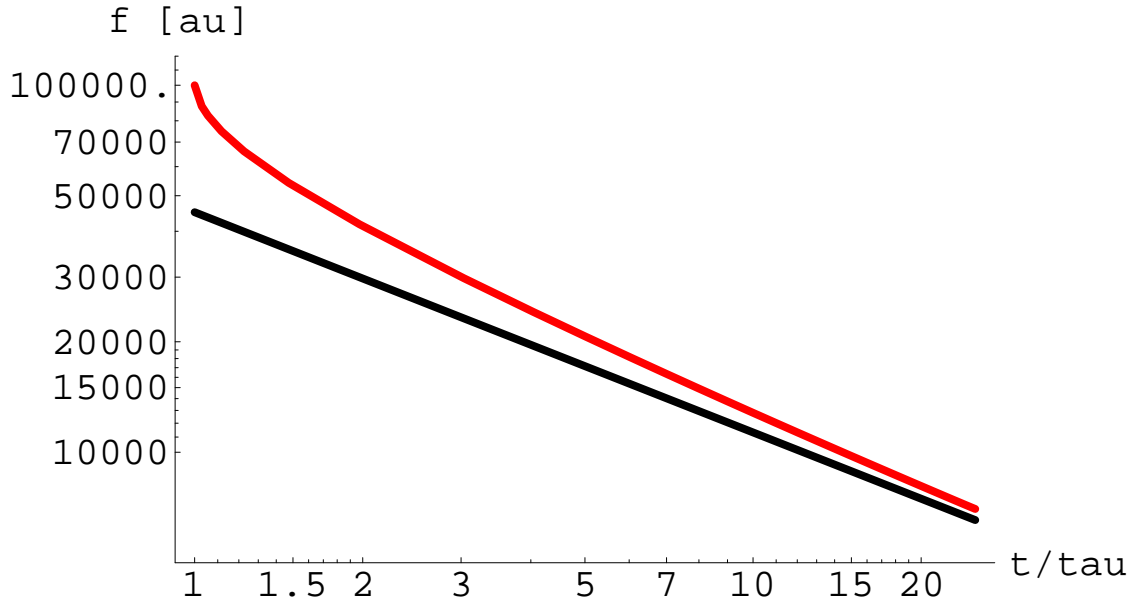
### 1.6.2 Drugi rodzaj niedebye'owskiej relaksacji: prawo Nuttinga - ciąg dalszy analizy sytuacji dla $0 < \alpha < 1$

Drugi rodzaj dotyczy tylko spowolnionej niedebye'owskiej relaksacji<sup>13</sup> (wstecz albo wprzód w czasie), którą dla  $|t| \gg \tau$  można opisać za pomocą asymptotycznego prawa potęgowego, czyli prawa Nuttinga postaci [42]

$$f(t) \sim \left(1 + \frac{|t|}{\tau}\right)^{-\alpha}, \quad (1.2)$$

<sup>13</sup>Mówiąc teraz o spowolnionej relaksacji mam na myśli asymptotyczne spowolnienie zanikania funkcji  $f(t)$ , czyli asymptotyczny zanik wolniejszy od  $\sim 1/t$ .

gdzie  $0 < \alpha < 1$  (występująca w tym prawie jedynka nie ma praktycznego znaczenia).



Rysunek 1.11: Porównanie przebiegu funkcji relaksacji danej prawem Nuttinga (1.2) (linia czarna) z funkcją relaksacji Mittag-Lefflera (1.4) (linia czerwona). W obu przypadkach przyjęto  $t_c = 0$  a wykładnik  $\alpha = 0.60$  (czyli taki sam jak np. dla krzywej czerwonej i granatowej na rys.1.9). Dla wygody, na osi poziomej odłożono  $t/\tau$ .

Jak wynika z wykresu przedstawionego na rys.1.11, im czas  $t$  jest dłuższy tym bardziej funkcja Mittag-Lefflera (ML) dana wyrażeniem (1.4) jest, dla  $0 < \alpha < 1$ , bliższa prawu Nuttinga<sup>14</sup>, czyli linii prostej w skali log-log, której nachylenie dane jest wykładnikiem  $\alpha = 0.60$  (jest to ta sama wartość wykładnika, która opisuje np. lewe zbocze lokalnego maksimum przedstawionego na rys.1.18).

Z wyrażeń (1.1) i (1.2) otrzymujemy zmianę  $\ln f(t)$  na jednostkę czasu opisaną poniższym wyrażeniem:

$$\frac{d \ln f(t)}{d |t|} \sim \begin{cases} \frac{1}{(|t|/\xi)^{1-\alpha}} & \text{dla } |t| \ll \xi \\ \frac{1}{|t|/\tau} & \text{dla } |t| \gg \tau, \end{cases} \quad (1.3)$$

określającym zakresy, w których mamy do czynienia z prawami potęgowymi. Rozpatrujemy tutaj logarytm funkcji  $f(t)$  dlatego, że w ekonomii a zwłaszcza w finansach mamy często do czynienia z pochodnymi po czasie tego typu obiektów nazywanymi

<sup>14</sup>Dokładniejszą analizę tej zbieżności przedstawiono w Dodatku A.

(w zależności od interpretacji funkcji  $f(t)$ ) np. terminową stopą zwrotu na jednostkę czasu albo terminową stopą wzrostu na jednostkę czasu.

Jak widać, w przypadku  $|t| \ll \xi (= \tau \Gamma(1 + \alpha))$  mamy do czynienia z klasą uniwersalności scharakteryzowaną przez wykładnik  $1 - \alpha$ , co może być traktowane jak sygnatura dynamicznej przemiany fazowej pierwszego rodzaju, gdyż dla  $0 < \alpha < 1$  pochodna dana lewą stroną wyrażenia (1.3) rozbiega się potęgowo w maksimum (czyli dla  $t = 0$ ), przy czym sama funkcja, jak być powinno, jest w  $t = 0$  ograniczona; tłumaczy to nazwę kształtu: "maksima typu ostrzy" (ang. *cusp-like shape*) często używaną w literaturze (patrz [3] wraz z zawartymi tam odnośnikami). Dzięki temu umiemy odpowiedzieć na jedno z kluczowych pytań inwestorów a mianowicie, pytanie o moment odwrócenia trendu z wzrostowego na spadkowy - ma to miejsce po osiągnięciu przez funkcję  $f(t)$  lokalnego maksimum<sup>15</sup>.

Z powyższego wynika, że lewe zbocza tego typu pików charakteryzują się bardzo silnie przyspieszonym wzrostem w obrębie szczytu (tzn. dla  $|t| \ll \xi$ ) i spowolnionym wzrostem z dala od niego (tzn. dla  $|t| > \tau$ ) a prawe odpowiednio gwałtownym spadkiem w obrębie szczytu a po wyjściu z tego obszaru spadkiem spowolnionym. Tego typu zachowanie, niezwykle użyteczne do opisu rzeczywistych lokalnych maksimum nie tylko na rynkach finansowych, przejawia jedynie funkcja Mittag-Lefflera, **co stanowi kluczową obserwację zawartą w niniejszej pracy.**

W zasadzie, byłaby możliwa obserwacja (dla wystarczająco szerokiego okna czasowego danych empirycznych), przejścia od prawa KWW do prawa Nuttinga, jednakże rozważane okna obejmujące piki danych empirycznych są (z tego punktu widzenia) zbyt wąskie co uniemożliwia zaobserwowanie asymptotycznego zachowania indeksu opisanego przez to prawo potęgowe.

Niedebye'owska relaksacja (powyżej podałam jej dwa charakterystyczne przykłady - trzeci najważniejszy tylko wskazałam a omawiam poniżej) może być wynikiem np. istnienia w układzie złożonym wielu silnie sprzężonych i różnie relaksujących podukładów, co może prowadzić do retardacji lub, ogólnie mówiąc, pojawienia się w układzie pamięci a zatem, np. w przypadku dynamiki stochastycznej lub procesów stochastycznych, do niemarkowskiego charakteru relaksacji.

---

<sup>15</sup>W rzeczywistości, ze względu na awersję do ryzyka lub wpływ skończonych rozmiarów układu (ang. *finite size effect* - skończonych w sensie np. jego kapitalizacji) odwrócenie trendu może nastąpić wcześniej; w takiej sytuacji maksimum pików na rys.1.9 mówi o maksymalnie oddalonej chwili, w jakiej nastąpi odwrócenie trendu - będzie jeszcze o tym mowa w części II.

### 1.6.3 Trzeci rodzaj relaksacji niedebye'owskiej: funkcja Mittag-Lefflera

Funkcją, która odgrywa dominującą rolę w zagadnieniu fraktalnej relaksacji omawianej w niniejszej pracy jest **funkcja Mittag-Lefflera** [46], którą można wyrazić w postaci następującego szeregu (patrz także Dodatek D):

$$E_\alpha \left( - \left( \frac{|t|}{\tau} \right)^\alpha \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(|t|/\tau)^\alpha)^n}{\Gamma(1 + \alpha n)}. \quad (1.4)$$

Funkcja ta jest naturalnym uogólnieniem funkcji eksponens, którą otrzymuje się przyjmując w wyrażeniu (1.4) wykładnik  $\alpha = 1$ ; ponadto, dla  $|t| \ll \tau$  przechodzi ona w rozciągnięty eksponens (1.1). Dla  $0 < \alpha < 1$  oraz  $|t| \gg \tau$  charakteryzuje się granicą daną wyrażeniem (1.2). Dla czasów pośrednich funkcja ML przejawia także własność spowolnionej relaksacji (w słabym sensie, patrz rys.1.9) co jest ważne, gdyż w rzeczywistości empiryczne dane giełdowe dotyczą (jeżeli chodzi o lokalne piki) tylko krótkich i pośrednich czasów przy czym, jak zobaczymy, zachowanie funkcji ML pozwala właśnie na opisanie ich kształtu.

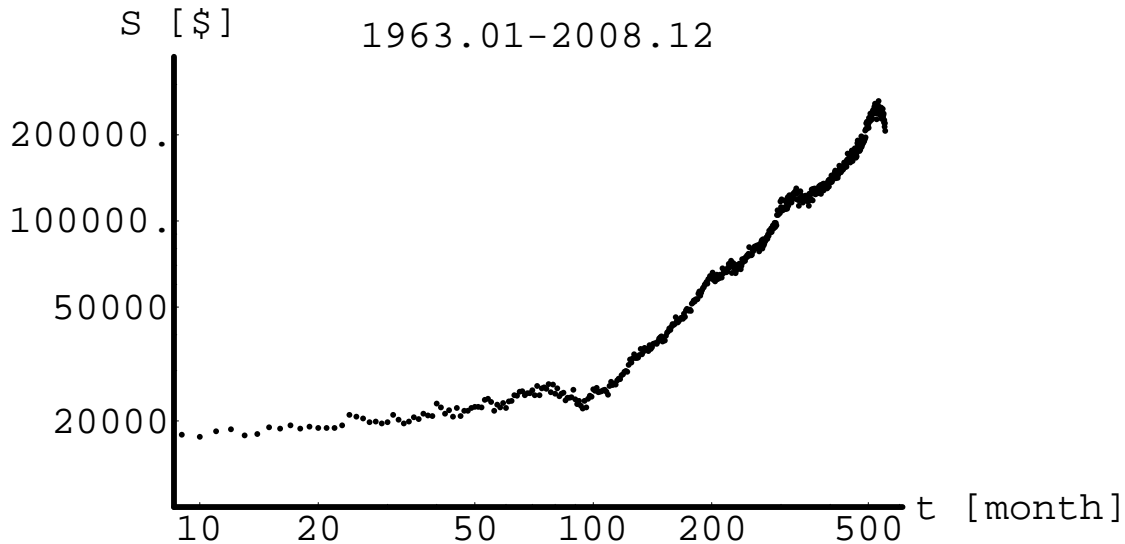
### 1.6.4 Funkcja Mittag-Lefflera na rynku nieruchomości

Przykładowo, na rysunku 1.12 przedstawiono (w skali  $\log - \log$ ) wartości mediany cen transakcyjnych domów i parcel<sup>16</sup> w Stanach Zjednoczonych w okresie styczeń 1963 - grudzień 2008 r. (czarne punkty). Jak widać, wyróżnić można tutaj dwa obszary, które dadzą się (w przybliżeniu) opisać dwoma różnymi prawami potęgowymi. Wydaje się, że bezpośrednim powodem przejścia od jednego prawa potęgowego do drugiego było powołanie w roku 1970 (odpowiada to na wykresie punktom leżącym kilka miesięcy poniżej  $t = 100$ ) Federalnego Centrum Kredytów Hipotecznych (ang. *Federal Home Loan Mortgage Corporation*, FHLMC) popularnie zwanego 'Freddie Mac', które w zasadniczy sposób zmieniło sytuację na rynku kredytów hipotecznych. Zmiana ta doprowadziła w efekcie do stopniowego, systematycznego poszerzania spektrum społecznego mającego dostęp do rynku kredytów hipotecznych.

W niniejszym podrozdziale zajmuję się jedynie czasokresem po roku 1970 a dokładniej rzecz biorąc, widoczną na wspomnianym rysunku "subtelną strukturą" dekorującą prawo potęgowe - można ją podzielić na cztery oddzielne obszary przedstawione na rysunkach 1.13 - 1.16. Jak pokazują poniżej, dane empiryczne w każdym z tych obszarów z osobna dadzą się opisać właśnie za pomocą funkcji Mittag-Lefflera o stopniowo zmniejszającym się wykładniku kształtu  $\alpha$  (pomimo, że jak widać, w

---

<sup>16</sup>Co oznacza, iż są to takie ceny, dla których liczba domów i parcel z ceną niższą jest równa analogicznej liczbie z ceną wyższą.



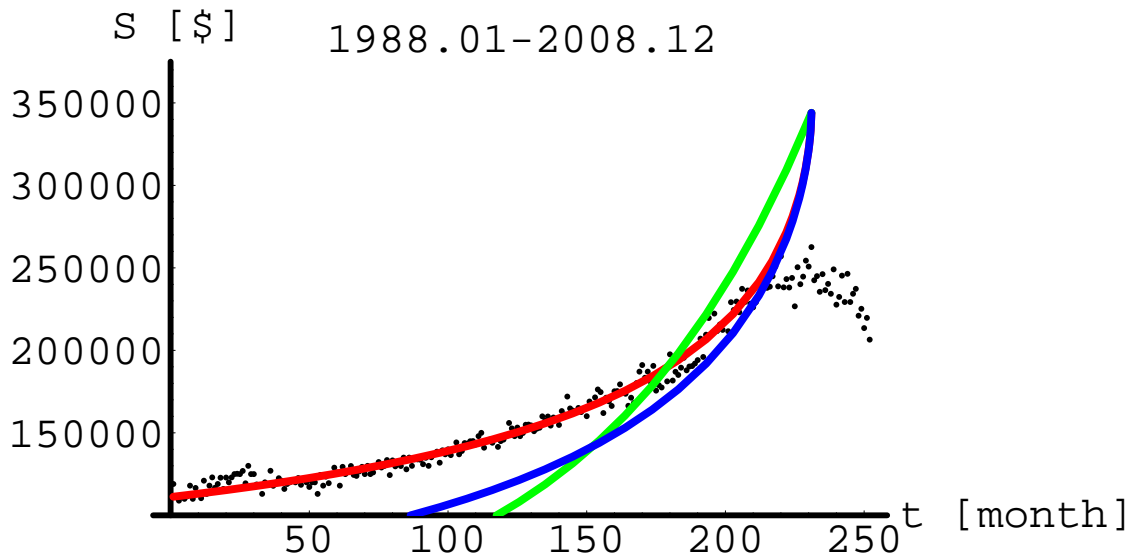
Rysunek 1.12: Wartości mediany cen transakcyjnych domów i parcel ( $S$ ) w Stanach Zjednoczonych w okresie styczeń 1963 - grudzień 2008 r. (czarne punkty) przedstawione w skali  $\log - \log$ . Widoczne są dwa zakresy, które mogą być z grubsza opisane prawami potęgowymi.

znacznie szerszym przedziale zależność od czasu ma charakter potęgowej). Wydaje się, że tego typu zjawisko nie ogranicza się tylko do rynku nieruchomości.

Na rysunku 1.13 porównano przebieg funkcji Mittag-Lefflera (czerwona krzywa) z danymi empirycznymi (czarne punkty) dotyczącymi wartości mediany cen transakcyjnych domów i parcel ( $S$ ) w Stanach Zjednoczonych w okresie styczeń 1988 - grudzień 2008 r. **Otrzymana zgodność jest jednym z kluczowych wyników niniejszej pracy**, gdyż wskazuje na przydatność funkcji Mittag-Lefflera jako narzędzia nadającego się do opisu rynkowych danych makroekonomicznych ograniczonych do horyzontów czasowych nie przekraczających czasu aktywności zawodowej pojedynczego pokolenia (krzywa zamieszczona na wcześniejszym rys.1.12 dotyczy czasokresu czterdziestopięcioletniego a więc wielopokoleniowego).

Dodajmy jeszcze, że maksimum funkcji ML (czyli  $t_c$ ) przypada tutaj na marzec 2007 roku, pokrywając się z punktem określającym zmianę empirycznego trendu  $t_{MAX}$  (czyli tutaj  $t_c = t_{MAX}$ ), natomiast wartości charakteryzujących ją parametrów wynoszą:  $\alpha = 0.60$ ,  $\tau = 95$  miesięcy. Zmiana trendu z wznoszącego na opadający jest tutaj bezpośrednią pochodną załamania się rynku kredytów hipotecznych w USA oraz, związanego z tym, spadkiem cen nieruchomości. Jak widać, **zmiana trendu ma miejsce powyżej punktu, w którym szybkość wzrostu (pochodna) funkcji ML zrównuje się z analogiczną szybkością wzrostu funkcji eksp-**

nens (porównaj rysunki 1.13, 1.10 i 1.9) - wydaje się, że tkwi w tej obserwacji aspekt ogólniejszy, pozwalający na dokładniejsze oszacowanie rzeczywistej chwili zmiany trendu hossy/bessa także dla innych wskaźników i rynków.

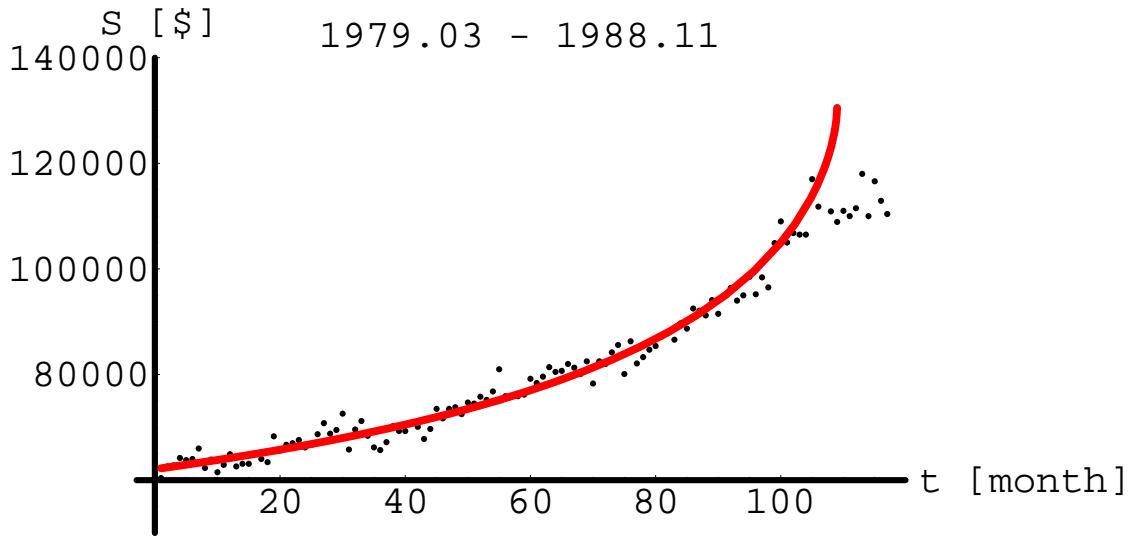


Rysunek 1.13: Porównanie przebiegu funkcji Mittag-Lefflera (czerwona krzywa) z danymi empirycznymi (czarne punkty) dotyczącymi wartości mediany cen transakcyjnych domów i parcel ( $S$ ) w Stanach Zjednoczonych w okresie styczeń 1988 - grudzień 2008 r. Maksimum funkcji ML przypada na marzec 2007 roku natomiast wartości charakteryzujących ją parametrów wynoszą:  $\alpha = 0.60$ ,  $\tau = 95$  miesięcy.

Wynik analogiczny do powyższego uzyskałam także dla tego typu danych ale dotyczących:

- ponad dziewięć i półletniego okresu poprzedzającego, czyli marzec 1979 - listopad 1988 r. (patrz rys.1.14).
- ponad pięć i półletniego okresu czerwiec 1973 - marzec 1979 r. (patrz rys.1.15) oraz
- ponad dwu i półletniego okresu luty 1971 - październik 1973 r. (patrz rys.1.16).

Istotną obserwację stanowi fakt, że dla sytuacji kryzysu (patrz rysunki 1.13 i 1.14 oraz tabela 1.2) odległość czasowa  $\Delta t_c$  pomiędzy maksimum funkcji ML (czyli  $t_c$ ) oraz lokalnym maksimum danych empirycznych (czyli  $t_{MAX}$ ) znacząco maleje a wykładnik kształtu przejawia także tendencję malejącą.



Rysunek 1.14: Porównanie przebiegu funkcji Mittag-Lefflera (czerwona krzywa) z danymi empirycznymi (czarne punkty) dotyczącymi wartości mediany cen transakcyjnych domów i parcel ( $S$ ) w Stanach Zjednoczonych w okresie marzec 1979 - listopad 1988 r. Maksimum funkcji ML przypada tutaj na marzec 1988 roku natomiast wartości charakteryzujących ją parametrów wynoszą:  $\alpha = 0.62$ ,  $\tau = 76$  miesięcy.

Należy zaznaczyć, że **głównym celem niniejszej pracy jest analiza wybranych indeksów giełdowych** a nie rynków hipotecznych - tym ostatnim poświęcono uwagę w niniejszym rozdziale tylko dlatego, aby wskazać na bardziej wszechstronną rolę funkcji Mittag-Lefflera.

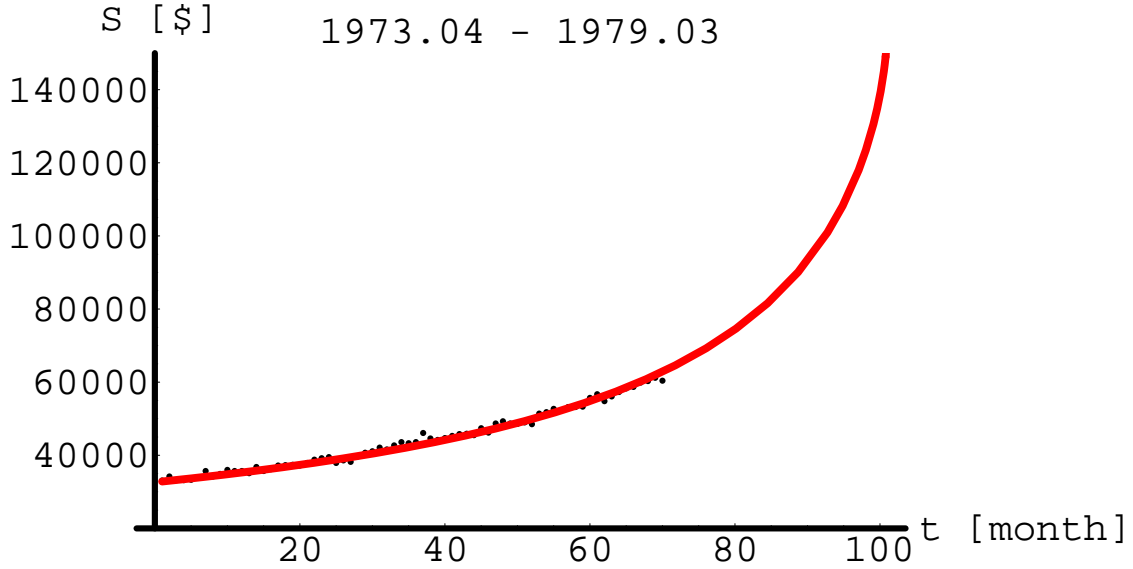
### 1.6.5 Funkcja Mittag-Lefflera a funkcja $q$ -eksponens Tsallisa

W niniejszym rozdziale przedstawiłam przykładowe porównanie przebiegu funkcji Mittag-Lefflera (1.4) z funkcją  $q$ -eksponens Tsallisa szeroko wykorzystywaną do analizy układów złożonych, zdefiniowaną następująco:

$$\exp_q(f(t)) \stackrel{\text{def.}}{=} [1 - (1 - q)f(t)]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (1.5)$$

tutaj  $f(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \beta t$ . Porównanie to przedstawiłam na rys.1.17 natomiast wartości parametrów definiujących poszczególne krzywe (funkcję Mittag-Lefflera - linia czerwona,  $q$ -eksponens Tsallisa - linia zielona i dla kompletności funkcję rozciągnięty eksponens - linia niebieska) zamieściłam w tabeli 1.3.

Jak widać, przez blisko dwie dekady funkcje ML i  $q$ -eksponens niemal pokrywają się (w zdolności rozdzielczej rysunku) jednak dla pośrednich i długich czasów



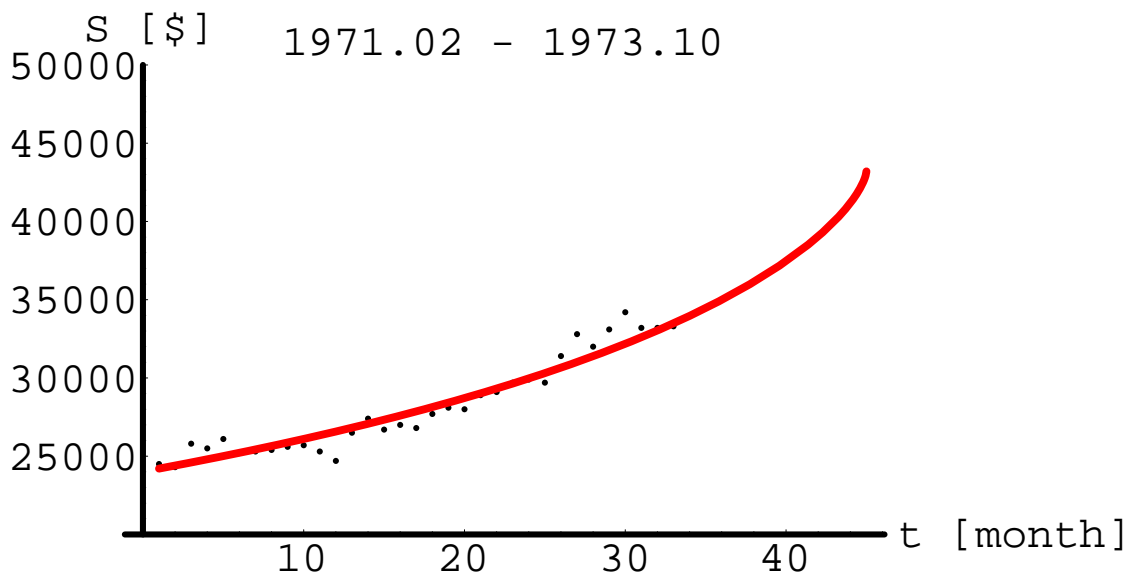
Rysunek 1.15: Porównanie przebiegu funkcji Mittag-Lefflera (czerwona krzywa) z danymi empirycznymi (czarne punkty) dotyczącymi wartości mediany cen transakcyjnych domów i parcel ( $S$ ) w Stanach Zjednoczonych w okresie czerwiec 1973 - marzec 1979 r. Maksimum funkcji ML przypada tutaj na luty 1979 roku natomiast wartości charakteryzujących ją parametrów wynoszą:  $\alpha = 0.65$ ,  $\tau = 30$  miesięcy.

funkcja ML zanika o czynnik wolniej. Zaskoczenie może budzić fakt, że istnieje okno parametrów, w którym niemal przez trzy dekady funkcja  $q$ -eksponens ma przebieg bardzo zbliżony do funkcji SE. Jednak, dla  $t \ll \tau$  różnica pomiędzy  $q$ -eksponensem z jednej strony a funkcjami ML i SE z drugiej drastycznie wzrasta, gdyż obie one posiadają (dla  $\alpha < 1$ ) singularne pochodne od pierwszej poczynając, w przeciwieństwie do  $q$ -eksponensa.

### 1.6.6 Dyskusja pików w kształcie ostrzy i niepełnych ostrzy

Na rys.1.18 przedstawiono dla ilustracji chwilowe maksimum lokalne typu ostrza zdefiniowane za pomocą przykładowych funkcji ML, których parametry (definiujące lewe i prawe zbocza) zamieszczono w tabeli 1.4.

Najczęściej spotykany kształt piku, który nazywam **niepełnym ostrzem**, definiują linie ciągłe do ich przecięcia się, przedstawione na rys.1.19. Tego typu kształt powstaje dlatego, że wzrost nie osiąga nigdy wartości maksymalnej, gdyż nie jest możliwe osiągnięcie nieskończonej stopy zwrotu (jaka miałaby miejsce właśnie w punkcie maksymalnym). Ponadto, awersja do ryzyka (która przecież jest obecna cały czas w trakcie inwestowania), czyli obawa przed odwróceniem się trendu prowadzi



Rysunek 1.16: Porównanie przebiegu funkcji Mittag-Lefflera (czerwona krzywa) z danymi empirycznymi (czarne punkty) dotyczącymi wartości mediany cen transakcyjnych domów i parcel ( $S$ ) w Stanach Zjednoczonych w okresie luty 1971 - październik 1973 r. Maksimum funkcji ML przypada tutaj na listopad 1974 roku natomiast wartości charakteryzujących ją parametrów wynoszą:  $\alpha = 0.69$ ,  $\tau = 90$  miesięcy.

do wcześniejszej wyprzedaży.

W pracy wskazuję, że funkcja ML jest dobrym kandydatem do opisu:

- 1) zjawiska (faktu stylizowanego) zbiorowej dominacji uczucia chciwości (zbiorowej chęci gwałtownego wzbogacenia się) lub ogólniej mówiąc dominacji zjawiska stadnej euforii do inwestowania nad awersją do ryzyka, tuż przed pęknięciem bąbla giełdowego,
- 2) do opisu obszaru pośredniego, gdzie ma miejsce rozejście się funkcji ML i odpowiadającego jej rozciągniętego eksponensa (porównaj odpowiednio linia czerwona i niebieska na rys.1.9) oraz
- 3) do oszacowania rozmiaru obszaru, w którym może zajść odwrócenie trendu wzrostowego na spadkowy.

Zatem,

- a) funkcja ML pozwala na zdefiniowanie spekulacyjnego bąbla giełdowego, jako spowolnionego wzrostu dla czasu  $t(< 0)$ <sup>17</sup> takiego, że  $|t| \geq |t^*|$ , gdzie  $t^*(< 0)$

<sup>17</sup>Czas  $t$  jest liczony tutaj (przypominam) od czasu definiującego położenie maksimum piku w

Tabela 1.2: Wybrane wartości parametrów definiujących funkcje ML przedstawione na rysunkach 1.13 - 1.16 wskazujących na ich tendencję w miarę zbliżania się do krachu.

Czasokres	$\alpha$	$\tau [tm]$	$t_c [tm]$	$\Delta t_c [tm]$
1988.01 - 2008.12	0.60	95	2007.03	0.0
1979.03 - 1988.01	0.62	76	1988.03	2.0
1973.06 - 1979.02	0.65	30	1979.02	32.0
1971.02 - 1973.05	0.69	90	1974.11	16.0

Tabela 1.3: Wartości parametrów definiujących funkcje przedstawione na rys.1.17, przy czym  $A$  jest amplitudą tych funkcji niewidoczną (dla prostoty) we wzorach (1.1), (1.4) i (1.5).

Function	$\alpha$	$q$	$\beta$	$A$	$\tau$	$\xi$
$q$ -eksponens	-	1.20	0.80	1.0	-	-
funkcja SE	0.70196	-	-	1.22430	-	0.80566
funkcja ML	0.70196	-	-	1.22430	0.92293	-

jest rozwiązaniem równania przestępnego (przykładowo, dla lewego zbocza piku określa je na rys.1.9 punkt przecięcia krzywej czerwonej i zielonej):

$$\exp\left(-\frac{1}{[\Gamma(1+\alpha)]^{1/\alpha}} \frac{|t^*|}{\tau}\right) = E_\alpha\left(-\left(\frac{|t^*|}{\tau}\right)^\alpha\right) \quad (1.6)$$

oraz

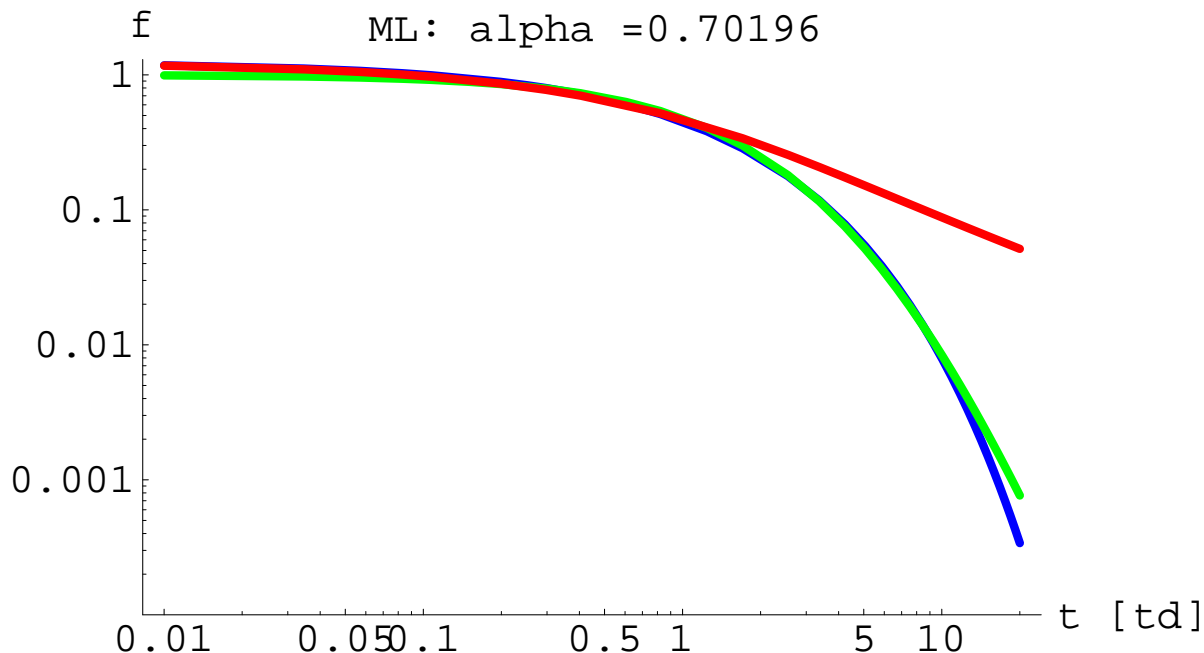
b) przyspieszonego (gwałtownego) wzrostu dla  $|t| < |t^*|$ .

Zauważmy, że jest to tylko jedna z możliwości - alternatywną dają rozważania przeprowadzone wcześniej (w podrozdziale 1.6.1 i paragrafie pt.: "Funkcja Mittag-Lefflera na rynku nieruchomości").

lewo (dla lewego zbocza) i wtedy jest ujemny albo w prawo (dla zbocza prawego) i wtedy jest dodatni.

Tabela 1.4: Parametry funkcji ML definiujące każde ze zboczy maksimum

Zbocze	$\alpha$	$\tau [td]$	$t_{MAX} [td]$
Zbocze wzrastające	0.60	214	1000
Zbocze opadające	0.45	111	1000

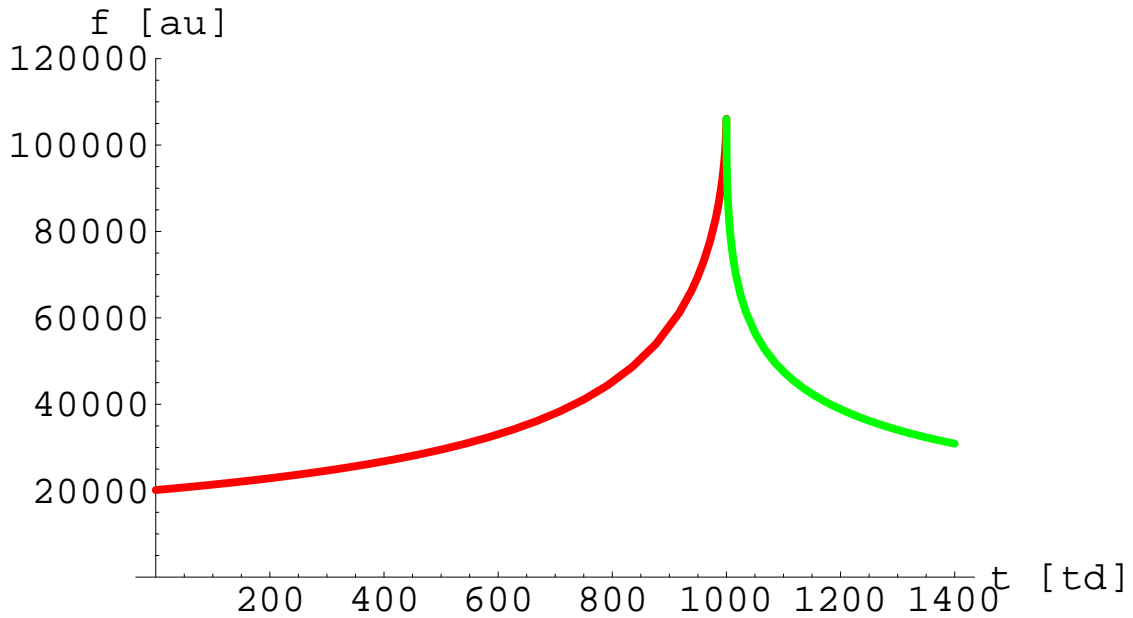


Rysunek 1.17: Porównanie w skali log – log przebiegu funkcji ML (czerwona linia) z funkcją  $q$ -eksponens Tsallisa (zielona linia) oraz rozciągniętym eksponensem (niebieska linia) dla przykładowych wartości parametrów zamieszczonych w tabeli 1.3 (stała  $A$  oznacza amplitudę (czynnik przedwykładniczy)).

Z analizy danych empirycznych przeprowadzonej dla rynku hipotecznego wynika, że

- punkt zwrotny trendu (z wzrostowego na spadkowy) nigdy nie jest ulokowany w obszarze, w którym funkcja ML pokrywa się (z dobrym przybliżeniem) z rozciągniętym eksponensem (patrz linia czerwona i niebieska na rys.1.9). Ponadto,
- punkt ten nigdy nie leży wcześniej od punktu przecięcia funkcji ML z funkcją eksponens (patrz punkt przecięcia linii czerwonej i zielonej na rys.1.9); stąd, oszacowanie możliwego położenia punktu zwrotnego jest natychmiastowe. Można dodać, że
- punkt zwrotny leży w pobliżu punktu zrównania tempa wzrostu funkcji eksponens i ML.

Analogiczne rozważania dla giełd przeprowadziłam w części II, wskazując że powyższe własności nie mają charakteru uniwersalnego.

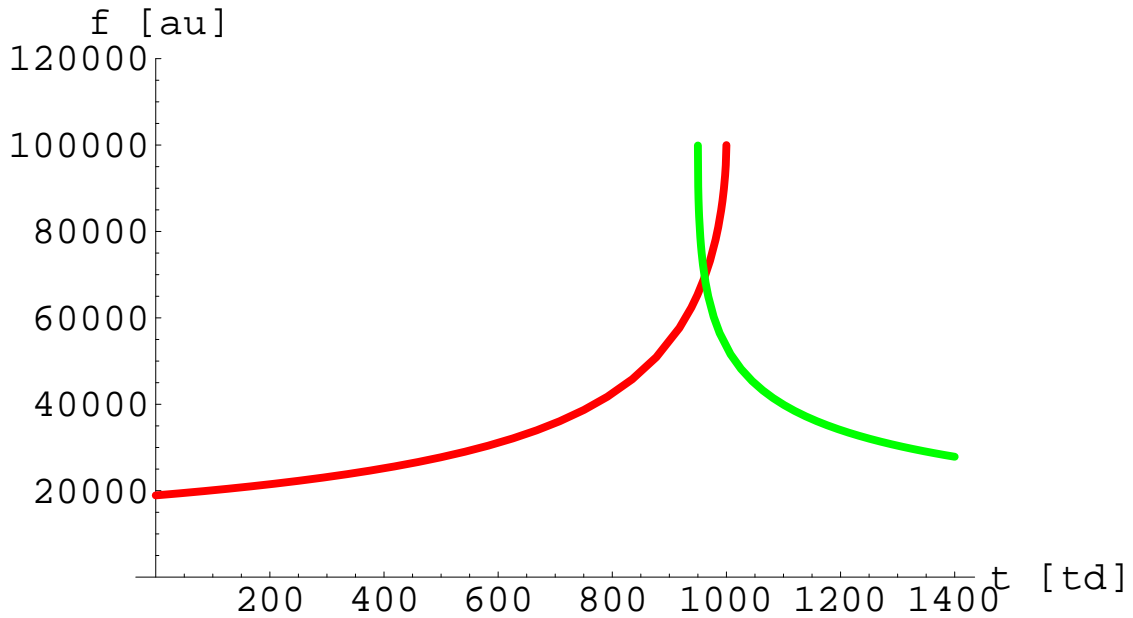


Rysunek 1.18: Chwilowy (lokalny) pik typu ostrza zbudowany z funkcji Mittag-Lefflera (czerwona i zielona linia). Parametry funkcji ML definiujące każde ze zboczy zamieszczono w tabeli 1.4.

Spowolniony wzrost (lewe zbocze piku) może odzwierciedlać uaktywnianie się kolejnych grup inwestorów działających w coraz dłuższych skalach czasowych i operujących coraz większym kapitałem. Natomiast gwałtowny wzrost może już być odpowiedzialny za lawinowy wzrost liczby inwestorów i angażowanego kapitału oraz towarzyszący temu nadzwyczajny wzrost obrotów.

Dla prawego zbocza maksimum gwałtowny spadek na początku (dla  $t < t^*$ ) może świadczyć o lawinowej wyprzedaży walorów a spowolnienie (dla  $t \geq t^*$ ) o sukcesywnej wieloskalowej wyprzedaży. Zagadnienia te są omawiane przeze mnie w dalszej części pracy.

Jeżeli chodzi o formalny związek fizyki z rynkami finansowymi to funkcja ML występuje zarówno w stochastycznym jak i deterministycznym modelowaniu układów nieuporządkowanych czy, mówiąc ogólniej, układów złożonych. Kanonicznym przykładem jest tutaj błędzenie przypadkowe w czasie ciągłym (ang. *Continuous-Time Random Walk Model*, CTRW) użyte w kontekście rynków finansowych [25]-[27], [50] a stworzone początkowo do opisu transportu dziurowego w układach amorficznych. Jeżeli chodzi o deterministyczne modelowanie, to przykładem może być wspomniane już wcześniej fraktalne równanie relaksacji opisujące relaksację materiałów lepko-sprężystych [40, 42, 47], związane z niniejszą pracą.



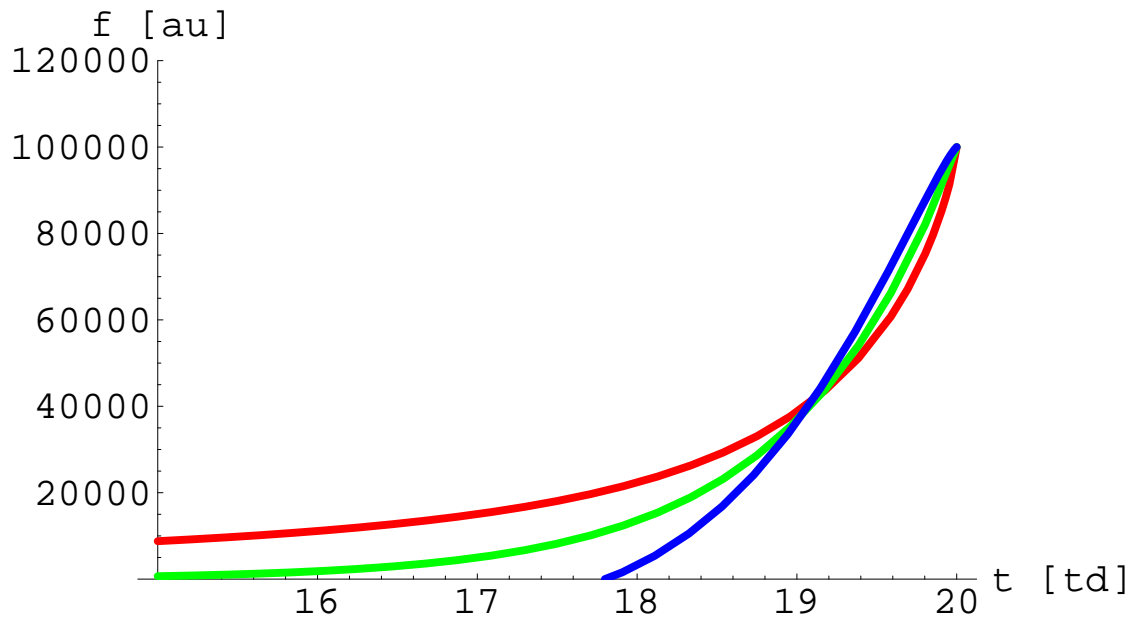
Rysunek 1.19: Chwilowy (lokalny) pik typu niepełnego ostrza zbudowany z przecinających się funkcji Mittag-Lefflera (czerwona i zielona linia). Jedyna różnica w stosunku do rys.1.18 polega teraz na tym, że prawe zbocze jest przesunięte o  $50 td$  w lewo w stosunku do odpowiadającego mu zbocza na rys.1.18.

### 1.6.7 Różne kształty funkcji Mittag-Lefflera

Na rys.1.20 porównałam przebiegi funkcji Mittag-Lefflera dla trzech wartości wykładnika kształtu  $\alpha = 0.8, 1.0, 1.2$ . Dobrze widoczna jest różnica kształtu zwłaszcza pomiędzy linią czerwoną ( $\alpha = 0.8$ ) a niebieską ( $\alpha = 1.2$ ). Linia niebieska w sposób istotny różni się od czerwonej, gdyż w maksimum jej pierwsza pochodna zanika (patrz powiększenie okolicy maksimum tej linii przedstawione na rys.1.21 oraz pierwsze wyrażenie w (1.3) dla  $\alpha > 1$ ) w przeciwieństwie do linii czerwonej, dla której ta pochodna jest rozbieżna (patrz to samo wyrażenie dla  $\alpha < 1$ ). Zatem gdy wykładnik kształtu  $\alpha = 1.2$ , druga pochodna  $d^2 \ln f(t)/d | t |^2$  jest rozbieżna. Porównanie przedstawione na rys.1.20 jest bardzo ważne, gdyż w pracy omawiam dane empiryczne dotyczące zarówno wykładnika kształtu mniejszego, jak i większego od jedności.

### 1.6.8 Uwagi o dokładności obliczeń

Używana w pracy funkcja Mittag-Lefflera jest zdefiniowana za pomocą nieskończonego szeregu (1.4). Dopasowanie takiego szeregu do danych empirycznych jest jak

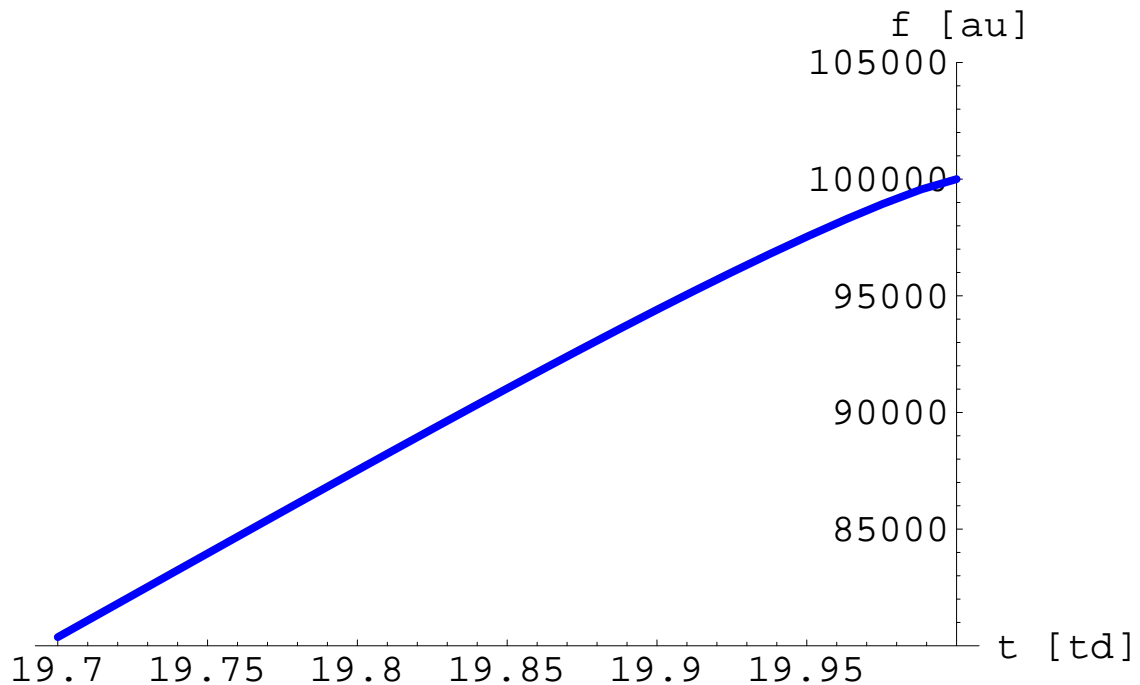


Rysunek 1.20: Porównanie przebiegu funkcji ML dla trzech różnych wartości wykładnika kształtu:  $\alpha = 0.8$  (linia czerwona),  $\alpha = 1.0$  (linia zielona) i  $\alpha = 1.2$  (linia niebieska).

na razie niewykonalne za pomocą żadnej z istniejących aplikacji<sup>18</sup>. Dlatego powstała konieczność używania skończonego szeregu a stąd narodziło się pytanie o minimalną liczbę wyrazów szeregu jaką należy wziąć pod uwagę. Na szczęście istnieje kryterium pozwalające oszacować błąd obcięcia szeregu naprzemiennego, które stwierdza, że suma wszystkich zaniedbanych składników takiego szeregu jest rzędu pierwszego zaniedbanego wyrazu.

Na rys.1.22 przedstawiono właśnie stosunek  $R$  tego pierwszego zaniedbanego wyrazu szeregu do sumy wszystkich składników jakie wzięto pod uwagę; tutaj było to dla porównania 10 wyrazów (linia zielona), 20 wyrazów (linia niebieska) i 30 wyrazów (linia czerwona) dla całego rozważanego przedziału czasu (liczonego w miesiącach) - w dalszym ciągu nazywamy go 'względnym błędem obcięcia'. Jak widać, już 20 wyrazów szeregu zapewnia dokładność rzędu ułamka promila, co w zupełności wystarcza do prowadzenia obliczeń w przypadku danych empirycznych jakimi dysponowaliśmy (ich rozrzut był przynajmniej o dwa do trzech rzędów wielkości większy od błędu obcięcia). Szereg o takiej liczbie wyrazów można dopasować do tych danych np. za

<sup>18</sup>Za pomocą oprogramowania *Mathematica* potrafimy wprowadzić sumować nieskończone szeregi ale niestety (przynajmniej dotychczasowe wersje) nie są w stanie dofitować tego nieskończonego szeregu do danych empirycznych.



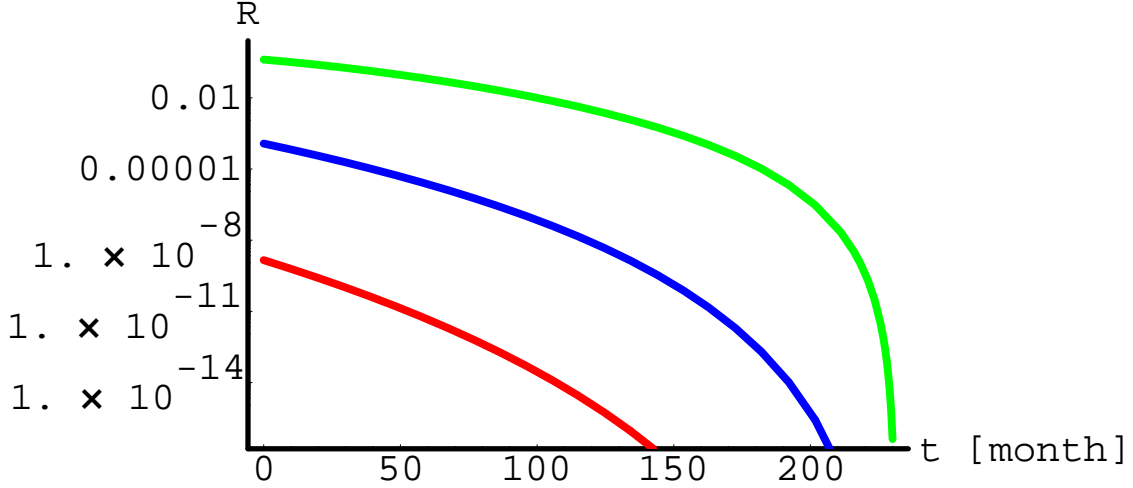
Rysunek 1.21: Przebieg funkcji ML w otoczeniu jej maksimum dla wykładnika kształtu:  $\alpha = 0.8$ . Widoczne jest płaskie wchodzenie tej linii w maksimum (tutaj położenie maksimum  $t_c = 20.0$ ).

pomocą oprogramowania *Mathematica ver. 7.0* - właśnie ono było przeze mnie stosowane. Innymi słowy, dane empiryczne jakimi dysponowaliśmy narzuciły (poprzez ustalenie wartości parametrów) relatywnie szybką zbieżność szeregu w funkcji liczby składników szeregu.

## 1.7 Wzrastające antybąble

Oscylacje logarytmiczno-periodyczne [18], [28]-[32], [51]-[56] pojawiają się zarówno w opisie wielu spekulacyjnych bąbli i krachów na indeksach giełdowych jak też w opisie odbicia tych indeksów od lokalnego dna (patrz Dodatek B). Dotychczas, na rzeczywistych rynkach finansowych zaobserwowano trzy rodzaje tego typu oscylacji:

- (i) spekulacyjne bąble (ang. *speculative bubbles*)
- (ii) spekulacyjne antybąble (ang. *speculative anti-bubbles*) i (zaobserwowane najpóźniej)



Rysunek 1.22: Porównanie przebiegu względnego błędu obciążenia szeregu (1.4) definiującego funkcję ML dla 10 wyrazów (linia zielona), 20 wyrazów (linia niebieska) i 30 wyrazów (linia czerwona); przykładowo wybrano  $\alpha = 0.60$ ,  $\tau = 96$  [tm].

- (iii) wzrastające spekulacyjne antybąble ( ang. *speculative bullish anti-bubbles* czyli odwrotne bąble spekulacyjne (ang. *inverted speculative anti-bubbles*);

Wszystkie je można zdefiniować jedną funkcją daną wzorem:

$$f(y) = f(0) \pm \left( \frac{|y|}{\tau} \right)^\alpha \left[ 1 + A \cos\left( \omega \ln \left( \frac{|y|}{\tau} \right) + \phi \right) \right], \quad (1.7)$$

przy czym  $y \stackrel{\text{def.}}{=} t - t_c$ , gdzie  $t_c$  jest charakterystycznym czasem, od którego rozpoczyna się budowanie (wprzód albo wstecz w czasie) oscylacji logarytmiczno-periodycznych; określa on położenie lokalnego maksimum funkcji  $f$  na osi czasu tylko wtedy gdy  $f(y = 0)$  przyjmuje wartość maksymalną (czyli w przypadku bąbli i antybąbli), natomiast parametr  $\alpha$  jest wykładnikiem kształtu przy czym  $\alpha > 0$  a także średni czas  $\tau > 0$ , częstotliwość  $\omega > 0$  i amplituda  $A > 0$ , podczas gdy faza  $\phi$  może być zarówno dodatnia jak i ujemna.

Jak się okazało (patrz rozdz.2.2), w niniejszej pracy wystarczyło używać tylko trzeciego rodzaju oscylacji, czyli wzrastających antybąbli spekulacyjnych . Stąd, lewe zbocza pików  $a$  i  $B$  (przedstawionych odpowiednio na rys.2.3 i 2.4 zamieszczonych w rozdz.2.2) są zdefiniowane dla  $y \geq 0$  a w równaniu (1.7) został wybrany znak '+' oraz założono, że  $f(y = 0)$  jest minimalną wartością  $f(y)$  w rozważanym przedziale czasowym. Inne zbocza wymienionych pików (oprócz lewego zbocza pików  $A$ ) oraz pozostałe piki omawiane w pracy, są (jak się wydaje) lepiej opisywane

Tabela 1.5: Parametry definiujące przykładowy log-periodyczny, wzrastający antybąbel

$\alpha$	$\tau$ [td]	$t_c$ [td]	$\omega$	$A$	$\phi$
0.55	235	0	5.0	0.5	-20.0

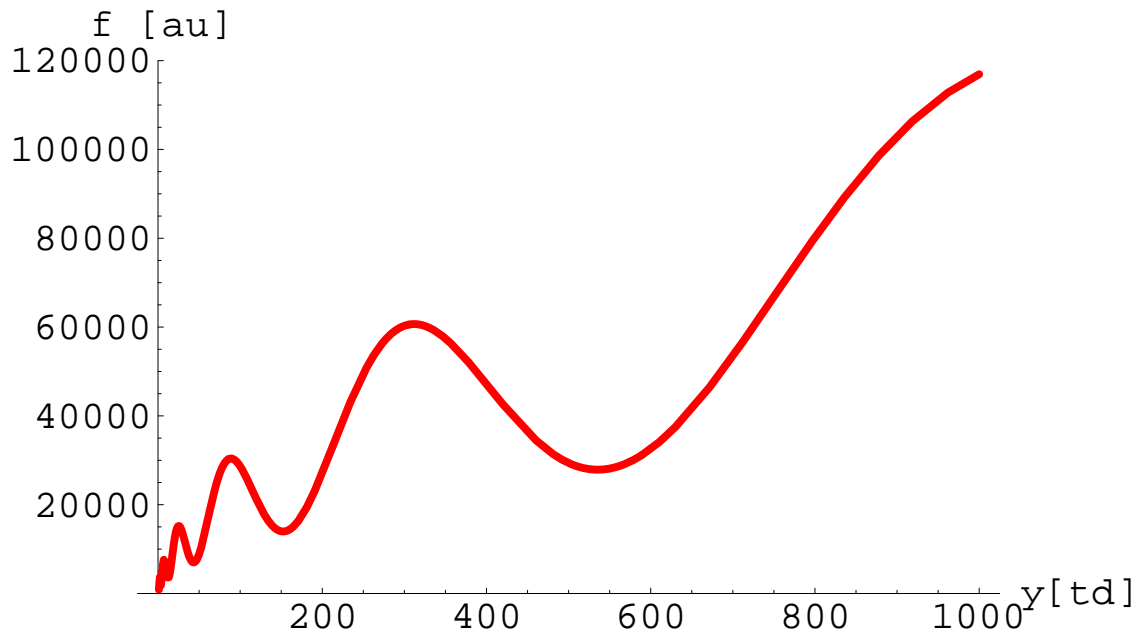
przez przewidywania Reologicznego Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku finansowego (patrz rozdz.2). Zauważmy, że wyrażenia (1.1), (1.4) i (1.7) mają te same rzędy singularności pojawiające się dla znikającego argumentu (odpowiednio  $t$  oraz  $y$ ) i dla takiej samej wartości wykładnika  $\alpha$ , stąd możemy wnioskować, że należą do tej samej klasy uniwersalności; oczywiście, korekta do skalowania jest w każdym z tych przypadków zupełnie inna.

### Przykładowy antybąbel

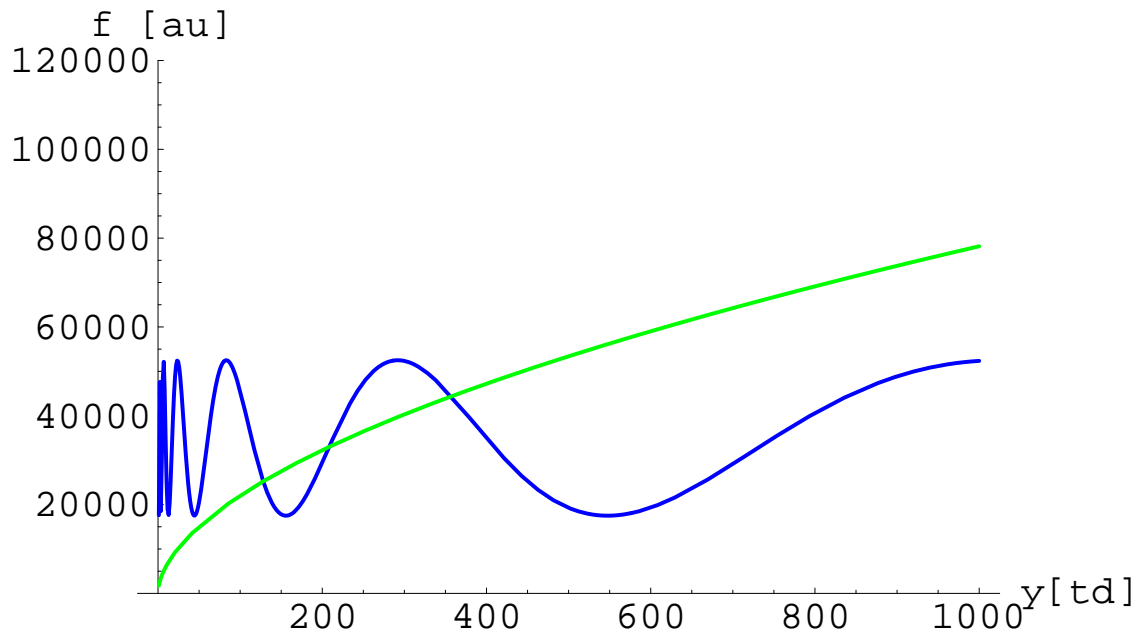
Rysunek 1.23 przedstawia przykładowy przebieg logarytmiczno-periodycznego antybąbla dla wartości wykładnika  $\alpha$  oraz czasu relaksacji  $\tau$  zbliżonych odpowiednio do tych przyjętych dla funkcji Mittag-Lefflera (porównaj tabele 1.4 i 1.5) oraz dla  $t_c = 0$ , czyli zakresu  $y$  takiego samego jak  $t$ .

Ponadto, na kolejnym rys.1.24 porównałam przebieg funkcji danej wzorem (1.7) dla  $A = 0$  (czyli bez części oscylacyjnej, linia zielona) oraz osobno samą część oscylacyjną (linia niebieska). Zauważmy, że funkcja log-periodyczna (1.7) może być, dzięki zmiennej częstotliwości (danej wzorem  $\omega \ln\left(\frac{|y|}{\tau}\right)$ ), dobrym kandydatem do opisywania (w przypadkach (ii) oraz (iii)) słabnącego (a w przypadku (i) narastającego) wahania nastrojów inwestorów w obszarze odbicia giełdy od dna lub w otoczeniu krachu giełdowego (tutaj w pobliżu  $y = 0$ , patrz rys.1.23 i 1.24).

Ponieważ w dalszej części pracy wskazuję, że oba wzmiankowane tutaj podejścia (czyli w ramach RMFDRF i w ramach oscylacji log-periodycznych) mają charakter komplementarny, więc byłoby pożytecznym stworzenie w przyszłości oprogramowania komputerowego, a być może także i ogólniejszego podejścia teoretycznego, zawierającego i wykorzystującego je do pełniejszego modelowania i prognozowania spekulacyjnych bąbli, kryzysów i krachów na rynkach finansowych.



Rysunek 1.23: Logarytmiczno-periodyczny wzrastający spekulacyjny antybąbel dany wyrażeniem (1.7), gdzie wybrano znak '+'; wartości użytych parametrów zostały przedstawione w tabeli 1.5. Widać, że częstotliwość oscylacji maleje w miarę jak czas  $y$  rośnie, czyli w miarę oddalania się od krytycznej chwili  $t_c$  odbicia od dna bessy.



Rysunek 1.24: Część oscylacyjna logarytmiczno-periodycznego spekulacyjnego anty-bąbla (krzywa niebieska). Widać wyraźnie, że częstotliwość oscylacji maleje w miarę oddalania się od chwili krytycznej  $t_c$  odbicia od dna bessy. Dodatkowo zamieszczono wzrastającą część potęgowej funkcji (1.7) (krzywa zielona), tzn. funkcję  $f(y)$  dla amplitudy  $A = 0$ .

## Część II

# Model i porównanie z danymi empirycznymi dotyczącymi giełd



## Rozdział 2

# Reologiczny Model Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego

Wprowadzenie przeze mnie fenomenologicznego, deterministycznego Reologicznego Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego (RMFDR, ang. *Rheological Model of the Fractional Dynamics of Financial Market*) składa się z dwóch części:

- (i) Pierwszej, w której zaproponowano liniowe, zwyczajne równanie różniczkowe pierwszego rzędu; opisuje ono ewolucję indeksu charakteryzującego rynek wyidealizowany w obrębie lokalnych dobrze określonych pików, dla dziennych danych empirycznych na zamknięciu.
- (ii) Drugiej, zawierającej fraktalne uogólnienie tego równania. W części tej zaproponowano sposób przejścia od równania wymienionego w punkcie (i) do tzw. fraktalnego równania różniczkowego zawierającego operatory różniczkowania ułamkowego - zatem, nie ma już ono charakteru lokalnego, uwzględniając np. pamięć długookresową, której wkład do rozwiązania ma, z dobrym przybliżeniem, charakter niejawny. W taki sposób przejawia się tutaj dążenie rynku do degradacji ewentualnego arbitrażu, gdyż istnienie pamięci w jawnej postaci może doprowadzić do jego pojawienia się albo wzmocnienia. Równanie to posłuży do opisu m.in. dynamiki warszawskich indeksów giełdowych WIG i WIG20 w obrębie lokalnych dobrze określonych pików, czyli do opisu zasadniczych elementów rynku rzeczywistego dla dziennych danych empirycznych na zamknięciu.
- (iii) Dla porównania, rozwiązanie wspomnianego w punkcie (ii) równania zastosuję do opisu dynamiki wybranych indeksów giełdowych, takich jak na przykład DAX, DJIA, S&P500 i NASDAQ, dla aktualnie trwającego kryzysu na wybranych giełdach światowych: Frankfurckiej GPW, NYSE (ang. *New York Stock*

*Exchange*) i NASDAQ (ang. *National Association of Securities Dealers Automated Quotations*).

Powyższe podejście oparte jest w zasadniczej mierze na strategii dotyczącej badań prowadzonych w ramach współczesnej reologii poświęconych (zaobserwowanej jeszcze w latach 30-tych zeszłego stulecia [48]) nieekspozycyjnej (niedebeyeowskiej) relaksacji materiałów plastycznych (lepkosprężystych) takich jak np. biopolimery (patrz prace [40]-[44]). Strategia ta stanowi podstawę Fraktalnego Modelu Ciała Stałego (Plastycznego) (FMCS, ang. *Fractional Model of Solid*). Istnieje wiele wersji FMCS [41] opartych zarówno na różnych sposobach fraktalizacji równań jak też na różnego typu połączeniach elementów mechanicznych, takich jak sprężyny i amortyzatory, stanowiących przecież podstawowe elementy mikroskopowe różnych mechanicznych struktur makroskopowych ciał plastycznych rozpatrywanych w ramach reologii.

Podkreśliśmy, że **przejście od punktu (i) do (ii) oznacza, że dokonane zostało przejście od układu wyidealizowanego do złożonego (realistycznego)**, gdzie pamięć, a w naszym przypadku także wpływ przyszłych oczekiwań na teraźniejszość, odgrywają zasadniczą rolę. Opisane są one za pomocą potęgowo zanikających jąder całkowych we wspomnianych równaniach fraktalnych. Użycie takiego podejścia pozwoliło mi opisać (z dobrym przybliżeniem):

- wyraźnie ukształtowane cztery piki A, a, B, C przedstawione na pełnym wykresie dziennych notowań WIG (od początku jego istnienia), jaki został zamieszczony na rys.1.5 oraz
- ostatni pik WIG20, czyli pik związany z aktualnie panującym światowym kryzysem gospodarczym, a także
- ostatnie piki dobrze widoczne w dziennych notowaniach indeksów DAX (patrz rys.1.6), DJIA (patrz rys.1.1, 1.3 i 1.7), S&P500 (rys.1.8) i NASDAQ (patrz rys.1.4).

## 2.1 Ewolucja indeksu: rynek wyidealizowany

Rozważania przedstawione w tym podrozdziale, a w szczególności kluczowe równanie (2.12), dotyczą jedynie punktu (i) z poprzedniej strony, określającego wyjściowy etap modelu. Składają się one z dwóch części:

- a) z pierwszej, w której wprowadziłam i dyskutowałam relację pomiędzy kluczowymi wielkościami modelu oraz
- b) drugiej, w której analizowałam ich dynamikę;

obie przygotowują do przedstawienia zasadniczej części modelu określonego w punkcie (ii) z poprzedniej strony.

### 2.1.1 Relacja pomiędzy kluczowymi wielkościami modelu

Zasadnicze założenie modelu<sup>1</sup> mówi, że

$Z_1$ ) na rynkach wschodzących (do jakich wciąż zalicza się Warszawską Giełdę Papierów Wartościowych) dominującą rolę odgrywają gracze giełdowi bazujący na analizie technicznej (ang. *technical traders*), zwani dalej 'graczami technicznymi', a nie na fundamentalnej (ang. *fundamental traders*) dalej zwani 'fundamentalistami'. Co więcej, analogiczna sytuacja ma miejsce także dla rynków starych, dobrze ukształtowanych takich jak np. giełda nowojorska (NYSE) na Wall Street czy młodsza od niej giełda tokijska (TSE), ale tylko w obszarach narastających i pękających spekulacyjnych bąbli (baniek) giełdowych, gdzie decyzje muszą być podejmowane szybko (np. w skali minutowej czy nawet sekundowej).

W sytuacji omawianej w niniejszej pracy oznacza to, że gracze techniczni śledzą na bieżąco notowania interesujących ich indeksów oraz obroty na akcje tworzące dany indeks (gdyż wielkości te są dostępne na bieżąco dzięki elektronicznemu systemowi obrotów<sup>2</sup>) i na tej podstawie ustalają własną strategię działania składając zgodnie z nią zlecenia kupna lub sprzedaży akcji. Wynika stąd, że chwilowa wartość nadwyżki zleceń  $U(t)$ <sup>3</sup> może zależeć tylko od tych dwóch składowych dynamicznych:

- a) chwilowej, względnej wielkości danego indeksu,  $X(t) - X_{BG}$ , gdzie nieujemna wielkość  $X_{BG}$  jest niezależną od czasu minimalną wartością (tłem) indeksu dla rozważanego lokalnego maksimum oraz
- b) chwilowej, względnej wielkości obrotów  $V(t) - V_{BG}$ , gdzie analogicznie jak powyżej,  $V_{BG}$  jest niezależną od czasu minimalną wartością (tłem) obrotów dla rozważanego lokalnego maksimum na rozważanym indeksie.

---

<sup>1</sup>Zasadnicze założenia modelu są numerowane jako  $Z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , dotycząc zarówno punktu (i) jak i (ii).

<sup>2</sup>Na Warszawskiej GPW działa system *WARSET* opracowany w oparciu o ten stworzony przez giełdę paryską, który jest używany w sumie już przez osiemnaście giełd na świecie.

<sup>3</sup>Gdy wartość  $U(t)$  jest dodatnia wtedy mamy do czynienia z chwilową nadwyżką popytu nad podażą a  $U(t)$  nosi nazwę nadwyżki popytowej (ang. *excess demand*, ED). Gdy  $U(t)$  jest w danej chwili ujemne wtedy mamy do czynienia z sytuacją odwrotną, czyli nadwyżki podaży nad popytem a  $U(t)$  nazywa się chwilową nadwyżką podażową (ang. *excess supply*, ES). Dla znikającej wartości  $U(t)$  mówimy o chwilowej równowadze popytowo-podażowej.

Jak widać, wartość  $U(t)$  może być traktowana jak (cząstkowa) miara chwilowej aktywności tej części rynku, która dotyczy danego indeksu, przy czym znak dodatni  $U(t)$  mówi o tym, że mamy do czynienia z przewagą kupna czyli lewym zboczem lokalnego maksimum (w przypadku braku fluktuacji i oscylacji) a ujemny, że ma miejsce wyprzedaż akcji tworzących ten indeks czyli z prawym zboczem (także przy braku fluktuacji i oscylacji). W dalszym ciągu zakładamy, i jest to nasze drugie zasadnicze założenie, że

$Z_2)$  zależność chwilowej nadwyżki zleceń od chwilowej, względnej wielkości danego indeksu i obrotów na nim, jest biliniowa co jest zgodne z panującym 'duchem liniowości' (prostoty) podejść ekonomicznych;

zatem,

$$U^J(t) = a_0^J [X^J(t) - X_{BG}^J] + b_0^J [V^J(t) - V_{BG}^J], \quad J = L, P, \quad (2.1)$$

gdzie

$$U^J(t) \stackrel{\text{def.}}{=} U_+^J(t) - U_-^J(t), \quad (2.2)$$

jest różnicą pomiędzy chwilowym całkowitym popytem<sup>4</sup>  $U_+^J(t) \geq 0$  na akcje tworzące dany indeks a ich całkowitą chwilową podażą<sup>5</sup>  $U_-^J(t) \geq 0$ , natomiast  $a_0^J, b_0^J$ , są niezależnymi od czasu współczynnikami ustalonymi dla każdego zbocza (lewego,  $L$ , albo prawego,  $P$ ) danego piku z osobna. Zakładam w dalszym ciągu, że horyzont czasowy  $\Delta t$  (czyli krok dyskretyzacji czasu) to w moim przypadku jeden dzień transakcyjny (1 *td*), a więc  $t$  zlicza dni transakcyjne.

Nieco dokładniej rzecz ujmując, wielkości  $U_+^J(t)$  i  $U_-^J(t)$  oznaczają złożone wartości ofert, odpowiednio kupna i sprzedaży akcji w liczbie  $N_{\pm}^m(t)$  ważone aktualnie proponowaną przez inwestorów (graczy giełdowych) ceną  $p_{\pm}^m(t)$ ,

$$U_{\pm}(t) = \sum_{m=1}^{M_{\pm}(t)} N_{\pm}^m(t) p_{\pm}^m(t), \quad (2.3)$$

gdzie  $m$  indeksuje rodzaj oferty. Należy zaznaczyć, że w dalszym ciągu nie zajmuję się już mikroskopową strukturą uwzględniającą szczegółowo różne rodzaje zleceń, ich wielkości oraz uwarunkowania, czyli nie analizuję księgi zleceń (ang. *order book*), gdyż nie są one w zasadzie dostępne dla graczy giełdowych. Zatem, indeks  $m$  występujący w równaniu (2.3) numeruje jedynie spółki (w liczbie  $M_{\pm}(t)$ ), których akcje

---

<sup>4</sup>Zwykle chwilowy popyt oznacza się przez  $D(t)$  (ang. *demand*), jednakże w naszym przypadku wygodniejsze jest używanie  $U_+^J(t)$ ,  $J = L, P$ .

<sup>5</sup>Zwykle chwilową podaż oznacza się przez  $S(t)$  (ang. *supply*), jednakże w naszym przypadku wygodniejsze jest używanie  $U_-^J(t)$ ,  $J = L, P$ .

znajdują się aktualnie w ofercie (kupna albo sprzedaży). Podkreślimy, że wszystkie występujące w równaniu (2.1) oraz wszędzie dalej wielkości są podawane na zamknięciu sesji nie uwzględniając dogrywki (w tym sensie należy rozumieć termin 'aktualnie').

Wolumen obrotów na akcje tworzące dowolny indeks definiuje się następująco:

$$V^J(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \min[U_+^J(t), U_-^J(t)], \quad (2.4)$$

gdyż jest to chwilowa wielkość zrealizowanych transakcji. W dalszym ciągu wygodniej będzie posługiwać się przekształconą postacią równania (2.1):

$$X^J(t) - X_{BG}^J = A_0^J U^J(t) + B_0^J [V^J(t) - V_{BG}^J], \quad (2.5)$$

która wiąże indeks nadwyżką popytowo-podażową oraz z obrotami na nim, przy czym współczynniki  $A_0^J = 1/a_0^J$ ,  $B_0^J = -b_0^J/a_0^J$ ,  $J = L, P$ , a ich dobór musi uwzględniać fakt, że zarówno  $X^J(t) - X_{BG}^J$  jak i  $V^J(t) - V_{BG}^J$  są zawsze wielkościami nieujemnymi, natomiast  $U^J(t)$  może być zarówno dodatnie jak i ujemne. Zwróćmy jeszcze uwagę na ważny fakt, że zrównanie się popytu z podażą (tzn. stan równowagi popytowo-podażowej rynku), czyli znikanie  $U$  nie oznacza, że względna wartość indeksu lub ceny akcji  $X - X_{BG}$  znika, gdyż jest ona także proporcjonalna do względnej wielkości obrotów  $V - V_{BG}$ <sup>6</sup>. Dopiero znikanie obu tych wielkości wymusza zerowanie się indeksu. Zauważmy, że równanie (2.5) możnaby traktować jak (liniowe) rozszerzone prawo podaży i popytu w zastosowaniu do giełdy; rozszerzenie to polega na uwzględnieniu wpływu obrotów na wielkość indeksu.

### Wpływ historii i przyszłości na nadwyżkę zleceń

Równanie (2.1) jest jednak zbyt uproszczone aby opisać realną aktywność graczy, gdyż nie uwzględnia faktu, że dysponują oni na bieżąco bogatszą informacją w postaci całego przebiegu indeksu i towarzyszących mu obrotów (a nie tylko ich aktualnymi wartościami) i dopiero na takiej podstawie budują swoją aktywność, np. jedni ekstrapolują te wielkości, inni stosują bardziej wyrafinowane metody korzystając z różnych modeli prognostycznych a jeszcze inni zdają się po prostu na siebie. Aby to bogactwo indywidualnych strategii (przynajmniej z grubsza) uwzględnić należy właśnie wspomniane równanie rozszerzyć, włączając do niego nie tylko efekt pamięci ale także jawnie wpływ przyszłych, oczekiwanych wartości indeksu i obrotów; należy to zrobić w taki sposób aby nie złamać fundamentalnej zasady obowiązującej na wszystkich giełdach mówiącej o ich dążeniu do likwidacji zysku bez ryzyka (za-

---

<sup>6</sup>Nie jest tutaj brana pod uwagę sytuacja, w której następuje nagle, administracyjne wstrzymanie obrotu akcjami w stanie zrównowazenia rynku.

sada degradacji arbitrażu<sup>7</sup>) - jak to przeprowadzić będę w stanie pokazać dopiero omawiając punkt (ii) z pierwszej strony niniejszego rozdziału.

To co powiedziano powyżej pozwala już na zaproponowanie ogólniejszej postaci równania (2.1),

$$\begin{aligned}
U^J(t) &= a_0^J [X^J(t) - X_{BG}^0] + b_0^J [V^0(t) - V_{BG}^0] \\
&+ \sum_{k=1}^{K(t)} \{a_k^{-J} [X^J(t - k\Delta t) - X_{BG}^J] + b_k^{-J} [V^J(t - k\Delta t) - V_{BG}^J]\} \\
&+ \sum_{n=1}^{N(t)} \{a_n^{+J} [X^J(t + n\Delta t) - X_{BG}^J] + b_n^{+J} [V^J(t + n\Delta t) - V_{BG}^J]\},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

gdzie współczynniki  $a_0^J, b_0^J$  dotyczą aktualnej chwili,  $a_k^{-J}, b_k^{-J}, k = 1, \dots, K$ , wcześniejszych a  $a_n^{+J}, b_n^{+J}, n = 1, \dots, N$ , późniejszych chwil. Jak widać równanie (2.6) jest skomplikowane (pomimo, że jest równaniem wieloliniowym), gdyż zawiera zarówno jawny wpływ przeszłości jak i przyszłości na aktualną aktywność graczy giełdowych a znalezienie zbioru wartości współczynników  $\{a, b\}$  oraz zależności indeksów  $K, N$  od czasu jest praktycznie niemożliwe. Dodam, że nawet gdyby pominięto jawny wpływ przyszłych wartości zmiennych  $X$  i  $V$  na terażniejszość, to rozwinięcie (2.6) byłoby wciąż, z praktycznego punktu widzenia, niemożliwe do rozwiązania. Zatem, na razie rozważam sytuację uproszczoną, natomiast przepis pozwalający urealnić w sposób przybliżony to wyidealizowane podejście zgodnie z powyższymi wskazaniem podam w paragrafie 2.1.5. Będzie to kluczowy krok pracy oparty na analogii do materiałów lepkosprężystych (plastycznych).

### 2.1.2 Wyidealizowana dynamika indeksu

Celem rozważenia wyidealizowanej dynamiki (ewolucji) indeksu  $X(t)$ , równanie (2.5) musi zostać uzupełnione o dodatkowe równanie różniczkowe, które wyprowadzone zostało poniżej. Ponieważ jedynymi wielkościami dynamicznymi jakie są bezpośrednio dostępne graczom są obroty  $V(t)$  i indeks  $X(t)$  więc sensownym jest pytanie w jaki sposób ich znajomość w danej chwili  $t$  wpływa na ich wartość w kolejnej chwili  $t + \Delta t$ ? Ponieważ rozważania prowadzę w ramach teorii liniowej więc bez zmniejszania ogólności można przyjąć, że kombinacja liniowa  $V(t + \Delta t)$  i  $X(t + \Delta t)$  w chwili  $t + \Delta t$  daje się wyrazić przez jakąś kombinację liniową  $V(t)$  i  $X(t)$  w chwili  $t$  (gdyż

---

<sup>7</sup>Jest to zasada słabsza od najczęściej przyjmowanej a mówiącej po prostu o braku jakiegokolwiek arbitrażu na giełdach, gdyż dopuszcza chwilowy, krótkotrwały arbitraż o charakterze fluktuacyjnym.

każda z tych wielkości z osobna daje się wyrazić przez tego typu kombinację), zatem

$$\begin{aligned} V^J(t + \Delta t) - V_{BG}^J + e^J [X^J(t + \Delta t) - X_{BG}^J] = \\ = c_0^J [V^J(t) - V_{BG}^J] + d_0^J [X^J(t) - X_{BG}^J], \quad J = L, P, \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie  $e^J$ ,  $c_0^J$ ,  $d_0^J$  są niezależnymi od czasu współczynnikami; stąd po prostych przekształceniach otrzymujemy, że

$$\frac{\Delta V^J(t)}{\Delta t} = C_0^J [V^J(t) - V_{BG}^J] + D_0^J [X^J(t) - X_{BG}^J] + E^J \frac{\Delta X^J(t)}{\Delta t}, \quad (2.8)$$

przy czym  $C_0^J = \frac{c_0^J - 1}{\Delta t}$ ,  $D_0^J = \frac{d_0^J - e^J}{\Delta t}$ ,  $E^J = -e^J$ . W dalszym ciągu przybliżamy w powyższym równaniu oba ilorazy różnicowe przez odpowiadające im pochodne co prowadzi do następującego równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach:

$$\frac{dV^J(t)}{dt} = C_0^J [V^J(t) - V_{BG}^J] + D_0^J [X^J(t) - X_{BG}^J] + E^J \frac{dX^J(t)}{dt}, \quad (2.9)$$

wiążącego indeks z obrotami na nim.

### Wpływ przeszłości i przyszłości na dynamikę

Podobnie jak w paragrafie 2.1.1, należy stwierdzić, że wyjściowe równanie (2.7) nie jest wystarczającym do opisu dynamiki realnego indeksu gdyż brakuje w nim wyrazów związanych zarówno z historią obu obserwowanych wielkości jak też z ich przyszłymi wartościami. Uwzględnienie tego prowadzi do następującego uogólnienia równania (2.7):

$$\begin{aligned} V^J(t + \Delta t) - V_{BG}^J &+ e^J [X^J(t + \Delta t) - X_{BG}^J] \\ &= c_0^J [V^J(t) - V_{BG}^J] + d_0^J [X^J(t) - X_{BG}^J] \\ &+ \sum_{k=1}^{K(t)} \{c_k^{-J} [V^J(t - k\Delta t) - V_{BG}^J] + d_k^{-J} [X^J(t - k\Delta t) - X_{BG}^J]\} \\ &+ \sum_{n=1}^{N(t)} \{c_n^{+J} [V^J(t + n\Delta t) - V_{BG}^J] + d_n^{+J} [X^J(t + n\Delta t) - X_{BG}^J]\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

a stąd, po prostych przekształceniach, do następującego równania różniczkowego będącego uogólnieniem równania (2.8):

$$\frac{dV^J(t)}{dt} = E^J \frac{dX^J(t)}{dt} +$$

$$\begin{aligned}
& + C_0^J[V^J(t) - V_{BG}^J] + D_0^J[X^J(t) - X_{BG}^J] \\
& + \sum_{k=1}^{K(t)} \{c_k^{-J}[V^J(t - k\Delta t) - V_{BG}^J] + d_k^{-J}[X^J(t - k\Delta t) - X_{BG}^J]\} \\
& + \sum_{n=1}^{N(t)} \{c_n^{+J}[V^J(t + n\Delta t) - V_{BG}^J] + d_n^{+J}[X^J(t + n\Delta t) - X_{BG}^J]\},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

gdzie  $C_0^J = \frac{c_0^J - 1}{\Delta t}$ ,  $D_0^J = \frac{d_0^J - e^J}{\Delta t}$ ,  $C_k^{-J} = c_k^{-J}$ ,  $D_k^{-J} = d_k^{-J}$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $E^J = -e^J$ ,

Oczywiście, rozwiązanie zarówno powyższego równania jak też równania (2.6) jest niecelowe ze względu na zbyt dużą liczbę niewiadomych. Dlatego w dalszej części pracy posłużę się analogią do fizycznego modelu materiału lepkosprężystego co pozwoli ominąć tę trudność a zarazem uwzględnić w sposób przybliżony przedstawione efekty, tzn. wpływ przeszłości oraz przyszłości na terażniejszość. Zatem, omówienie tej analogii stanowi niezbędny element niniejszej pracy, który zostanie przedstawiony w podrozdz.2.1.5.

### 2.1.3 Analogia do materiału lepkosprężystego

Na razie zajmę się analizą równań (2.5) i (2.9) eliminując z nich zmienną  $V^J(t) - V_{BG}^J$ . W rezultacie (po prostych przekształceniach) otrzymuję, że

$$U^J(t) + \tau_0^J \frac{dU^J(t)}{dt} = G_0^J \tau_0^J \frac{dX^J(t)}{dt} + G_e^J [X^J(t) - X_{BG}^J], \quad J = L, P, \tag{2.12}$$

gdzie współczynniki

$$\begin{aligned}
\tau_0^J & \stackrel{\text{def.}}{=} -1/C_0^J \\
G_0^J & \stackrel{\text{def.}}{=} (1 - B_0^J E^J)/A_0^J \\
G_e^J & \stackrel{\text{def.}}{=} (1 + B_0^J D_0^J/C_0^J)/A_0^J;
\end{aligned} \tag{2.13}$$

przyjmuję, że wszystkie one są nieujemne a ich znaczenie omawiam poniżej.

Przy okazji zauważmy, że równanie (2.12) stanowi uogólnienie równania

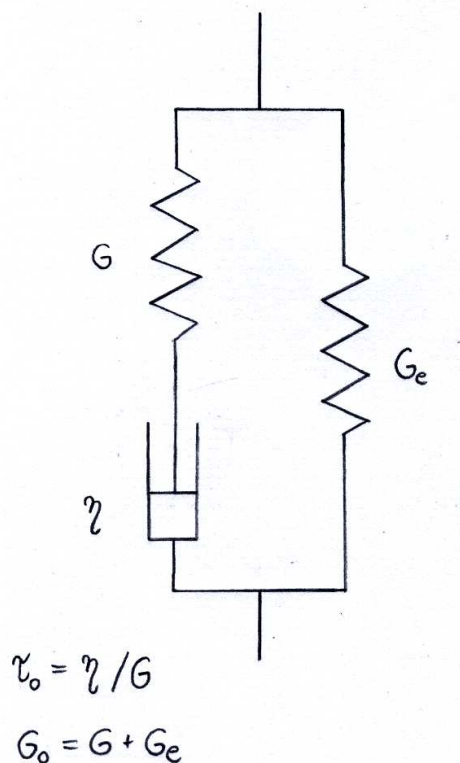
$$\frac{dX^J(t)}{dt} = \frac{1}{\lambda^J} U^J(t), \tag{2.14}$$

powszechnie używanego w tradycyjnej ekonomii, gdzie  $\lambda^J (\equiv G_0^J \tau_0^J) > 0$  jest tzw. głębokością rynku; im głębokość ta jest większa tym różnica popytowo-podażowa może być większa nie prowadząc do wzrostu ceny. Uogólnienie to, jak widzieliśmy, uwzględnia (tutaj w sposób niejawny) zależność od wielkości obrotów a tym samym lepiej nadaje się do opisu sytuacji (o ogromnej zmienności), z jaką mamy do czynienia w obszarze bańki i krachu.

## Reologiczny model Zenera ciała plastycznego

Należy podkreślić, że równanie (2.12) jest analogonem podstawowego równania reologicznego (ang. *Rheological Constitutive Equation, RCE*) Standardowego Modelu Zenera Ciała Stałego (Plastycznego) (2.15), uwzględniającego jego charakter lepko-sprężysty [44, 40, 47]. Właśnie kombinacja sprężystości i lepkości pozwala na opisanie plastycznego charakteru materiału. W dalszej części pracy będę się opierała właśnie na tej analogii.

Na rys.2.1 przedstawiono standardową, mechaniczną realizację tego modelu w postaci połączonych równolegle: 1) elementu Maxwella (lewe ramię składające się z połączonych w szereg amortyzatora  $\eta$  i sprężyny  $G$ ) odpowiedzialnego za plastyczność materiału oraz 2) elementu sprężystego  $G_e$  (prawe ramię). W modelu tym



Rysunek 2.1: Reologiczny Model Zenera Ciała Plastycznego (opis oznaczeń podano w tekście).

relacja między chwilowym całkowitym naprężeniem ( $\sigma(t)$ ) a chwilowym całkowitym odkształceniem ( $\varepsilon(t)$ ) jest dana poniższym liniowym równaniem różniczkowym

Tabela 2.1: Analogia między rynkiem papierów wartościowych a reologią

Giełda papierów wartościowych	Ciało stałe
Indeks giełdowy $X(t) - X_{BG}^J$	odkształcenie $\varepsilon(t)$
Nadwyżka zleceń $U(t)$	naprężenie $\sigma(t)$

pierwszego rzędu,

$$\sigma(t) + \tau_0 \frac{d\sigma(t)}{dt} = G_0 \tau_0 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + G_e \varepsilon(t), \quad (2.15)$$

gdzie  $\tau_0$  jest czasem relaksacji elementu Maxwella, czyli jest to czas po jakim nastąpi przejście od sprężystego stanu materiału do plastycznego,  $G_0 = G + G_e$  jest jego modułem plastyczności a  $G$  i  $G_e$  są modułami sprężystości Younga charakteryzującymi sprężyny (patrz rys.2.1). Wyprowadzenie powyższego równania, bazujące na odpowiedniej kombinacji prawa sprężystości Hooke'a (C.1) dla idealnego ciała stałego oraz prawa Newtona (C.2) dla idealnego płynu o współczynniku lepkości  $\eta$ , zamieszczono w Dodatku C.

Jak widać, równanie (2.12) zostało zapisane w postaci umożliwiającej bezpośrednie porównanie z równaniem (2.15) - obie odpowiadające sobie wielkości dynamiczne podano w tabeli 2.1. Warto dodać, że obroty we Reologicznym Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego pełnią rolę analogiczną do temperatury absolutnej w Standardowym Modelu Ciała Plastycznego, przy czym analogia ta jest tym pełniejsza, że obroty (tak jak i temperaturę) można traktować jak wielkość intensywną. Intensywność obrotów zawiera się w tym, że można je obserwować dla każdej spółki notowanej na giełdzie z osobna; oczywiście, możemy mówić też o obrotach np. na indeksach (wtedy jest to wielkość, którą należy definiować jako sumę obrotów na spółkach tworzących dany indeks, ważonych udziałami tych spółek w indeksie).

Równanie (2.15) pozwala znaleźć zależne od czasu naprężenie ciała jako odpowiedź na jego nagłe wydłużenie - to wymuszone naprężenie relaksuje tutaj wykładniczo w czasie; podobnie rzecz się ma gdy rozwiązując powyższe równanie wyznaczamy relaksację wydłużenia jako odpowiedź na nagle przyłożone naprężenie - relaksacja ta ma także charakter wykładniczy. Jednakże dla wielu polimerów (a zwłaszcza biopolimerów) wspomniane relaksacje mają charakter potęgowy dlatego **pojawiło się pytanie, na które znaleziono pozytywną odpowiedź, o możliwość uogólnienia powyższego równania tak aby było ono w stanie odtworzyć oba rodzaje relaksacji a przejście od jednej do drugiej było tylko kwestią zmiany wartości odpowiednich parametrów.**

Postawione powyżej pytanie o uogólnienie równania (2.15) dotyczy także analogicznego uogólnienia równania (2.12). W niniejszych rozważaniach, opierając się

na analogii, idziemy drogą wskazaną przez współczesną reologię. Mianowicie, równanie całkowe (2.16) (otrzymane bezpośrednio z powyższego równania (2.12), patrz podrozdz.2.1.5) jest właśnie tym, które jest uogólniane do postaci fraktalnej.

Opisana powyżej wygodna, mechaniczna podstawa modelu Zenera [41, 48] składająca się, *de facto*, ze sprężyn i amortyzatorów tworzących prostą strukturę, odzwierciedla

- istnienie aspektu związanego zarówno z idealnym ciałem stałym (sprężystość)
- jak i idealnym płynem (lepkość);

oba aspekty są w stanie odtworzyć plastyczny charakter materiału. Jednakże struktura ta (jak wspomniałam) jest zbyt uproszczona aby opisać takie lepkosprężyste (plastyczne) materiały jak np. biopolimery. Na szczęście, fraktalny model ciała stałego (przedstawiony w rozdziale 2.1.5), którego mechaniczna reprezentacja jest dana hierarchicznym ustawieniem (najczęściej) nieskończonej liczby sprężyn i amortyzatorów - patrz przykładowy rys.C.3<sup>8</sup>, jest już wystarczająca [41, 48] do opisu niedebyeowskiej relaksacji. Relaksacja ta została zaobserwowana w dobrze znanym eksperymencie polegającym na (dynamometrycznym) pomiarze naprężenia przy ustalonym, nagłym odkształceniu. W tym przybliżeniu **sprężyny możemy traktować jako analogon czysto emocjonalnego, irracjonalnego, niczym nie skrupowanego postępowania inwestorów<sup>9</sup>, czyli po prostu analogon euforii wywołanej przez chciwość, podczas gdy amortyzator może być analogonem czysto racjonalnego zachowania czyli awersji do ryzyka (tzn. strachu)**. Taka interpretacja może przyczynić się do konstrukcji "mechanicznego" modelu opisującego istotne aspekty rzeczywistego rynku papierów wartościowych wskazując, na przykład, na wpływ struktury sprężeń pomiędzy inwestorami na wieloskalową dynamikę indeksów giełdowych.

#### 2.1.4 Hipoteza Rynku Plastycznego

W tym miejscu można postawić pytanie o hipotezę rynku finansowego, w ramach której formułujemy nasz model. Najbardziej popularne hipotezy funkcjonowania rynku sformułowane dotychczas [21] to:

- (1) Hipoteza Rynku Efektywnego (HRE, ang. *Efficient Market Hypothesis*),

---

<sup>8</sup>Odkryto, że różne hierarchiczne struktury sprężyn i amortyzatorów mogą prowadzić do tego samego fraktalnego równania relaksacji ([41] wraz z referencjami). W kontekście giełdy papierów wartościowych oznacza to, że musimy poradzić sobie z bifurkacjami struktury zainwestowanego kapitału, która zależy jakoś od różnych strategii przyjętych przez inwestorów.

<sup>9</sup>Termin 'aktywność automatyczna' zwana też 'nietłumioną aktywnością' (ang. *affected driven activity*) lub pokrewne [57] są w tym kontekście często używane w psychologii.

- (2) Hipoteza Rynku Fraktalnego (HRF, ang. *Fractal Market Hypothesis*),
- (3) Hipoteza Rynku Niejednorodnego (HRNJ, ang. *Heterogeneous Market Hypothesis*).

Co więcej, można też mówić o Hipotezie Rynku Log-periodycznego (HRLP, ang. *Log-Periodic Market Hypothesis*) jako dopełnieniu HRF oraz o Hipotezie Rynku Multifraktalnego (HRM, ang. *Multifraktal Market Hypothesis*) jako szczególnie wyrazistym przypadku HRNJ.

Hipotezę w ramach której budujemy nasz model (dotyczącą tylko obszaru narastających oraz pękających baniek spekulacyjnych) można by nazwać Hipotezą Rynku Plastycznego (HRP, ang. *Plastic Market Hypothesis*). Hipoteza ta bazuje na sformułowanych powyżej założeniach  $Z_1$  i  $Z_2$  i dotyczy zarówno dynamiki opisywanej przez funkcję wykładniczą jak też przez uogólnioną funkcję wykładniczą typu Mittag-Lefflera. **Ważnym celem tej pracy jest wykazanie, na drodze empirycznej, zgodności deterministycznego Reologicznego Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego, a w tym Hipotezy Rynku Plastycznego, z Hipotezą Rynku Efektywnego.**

### 2.1.5 Hipoteza transformacyjna: przejście do rynku rzeczywistego

Rozważania przedstawione w tym i w kolejnym rozdziale (w szczególności równanie (2.20)) dotyczą zasadniczego punktu (ii) przedstawionego na początku rozdz.2.

Zatem, kolejnym krokiem jest wyrażenie równania (2.12) w równoważnej mu postaci całkowej, koniecznej do dalszej analizy,

$$\begin{aligned}
X^J(t) - X^J(0) &= -\frac{1}{\tau_1^J} {}_0D_t^{-1}[X^J(t) - X_{BG}^J] + \frac{1}{G_0^J} \frac{1}{\tau_0^J} {}_0D_t^{-1}U^J(t) \\
&+ \frac{1}{G_0^J} [U^J(t) - U^J(0)], \quad J = L, P,
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

gdzie  $\tau_1^J = \tau_0^J G_0^J / G_e^J$ ; w dalszym ciągu możemy przyjąć, że  $\tau_1 > 0$  gdyż badamy zjawisko relaksacji (w czasie wprzód lub wstecz). W powyższym równaniu została użyta definicja odwrotnej pochodnej pierwszego rzędu; ogólniejsza definicja pochodnej rzędu  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) dana jest użyteczną formułą Cauchy'ego,

$$\begin{aligned}
{}_tD_t^{-n} f(t) &\stackrel{\text{def.}}{=} \int_{t_0}^t dt_{n-1} \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_{n-2} \dots \int_{t_0}^{t_1} f(t'_0) dt'_0 \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{t_0}^t dt' (t - t')^{n-1} f(t').
\end{aligned}
\tag{2.17}$$

Istnieje kilka definicji fraktalnego różniczkowania i całkowania [49]. W tej pracy korzystam jedynie z fraktalnego rachunku Riemanna-Liouville'a (RL). Fraktalne całkowanie RL,  ${}_t D_t^{-\alpha} f(t)$  rzędu  $\alpha$  ( $\Re \alpha > 0$ ) funkcji  $f(t)$  jest bezpośrednim uogólnieniem wyrażenia (2.17), gdzie wykładnik  $n$  został zastąpiony (w ogólności) liczbą zespoloną  $\alpha$  [49], tzn.

$${}_t D_t^{-\alpha} f(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t dt' (t-t')^{\alpha-1} f(t'). \quad (2.18)$$

Powyższa definicja umożliwia wprowadzenie fraktalnej operacji różniczkowo-całkowej, zwanej potocznie ułamkowym różniczkowaniem (patrz Dodatek C), odgrywającej zasadniczą rolę we współczesnej reologii gdyż umożliwia zbudowanie mechanicznych odpowiedników materiałów plastycznych

Dodajmy, że wykorzystywanie pochodnych ułamkowych w ekonometrii nie jest niczym nowym [76] (oraz odnośniki literaturowe tamże) - występują one wtedy, gdy istotną rolę odgrywa długa pamięć. Modele, które je stosują należą do grupy modeli typu ARIFMA (ang. *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*). Jednakże, modele te mają charakter stochastyczny (probabilistyczny - wykorzystujący m.in. procedury typu średniej ruchomej) podczas gdy **model przedstawiony w niniejszej pracy ma charakter deterministyczny gdyż dotyczy trendu - na tym m.in. polega jego oryginalność**. Podkreślmy, że determinizm ten dotyczy tylko trendu w obrębie dobrze wykształconych pików; wykorzystuje on fakt, iż nie jest możliwym odróżnienie ogromnej fluktuacji (ang. *giant fluctuation*) jaka mogła mieć miejsce w układzie od jego systematycznego zachowania przejawiającego się m.in. w postaci (deterministycznego) trendu budującego dany pik.

Fraktalne uogólnienie równania (2.16) przeprowadzono tutaj analogicznie jak to zostało zrobione dla materiałów lepkosprężystych, mianowicie przez dokonanie następujących zamian (zakładając w dalszym ciągu, że oba wykładniki kształtu ( $\alpha^J, \beta^J$ ) są liczbami rzeczywistymi):

$$\begin{aligned} (\tau_1^J)^{-1} {}_t D_t^{-1} X^J(t) &\Rightarrow (\tau_1^J)^{-\alpha^J} {}_t D_t^{-\alpha^J} X^J(t), \quad \alpha^J > 0 \\ (\tau_0^J)^{-1} {}_t D_t^{-1} U^J(t) &\Rightarrow (\tau_0^J)^{-\beta^J} {}_t D_t^{-\beta^J} U^J(t), \quad \beta^J > 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ułamkowe (w ogólności) wykładniki  $\alpha^J$  i  $\beta^J$ ,  $J = L, P$ , są ważnymi parametrami, tzw. wykładnikami kształtu. Dzięki powyższemu podstawieniu równanie (2.16) przybiera poszukiwaną postać:

$$\begin{aligned} X^J(y) - X^J(0) &= -(\tau_1^J)^{-\alpha^J} {}_0 D_y^{-\alpha^J} X^J(y) + \frac{1}{G_0^J} (\tau_0^J)^{-\beta^J} {}_0 D_y^{-\beta^J} U^J(y) \\ &+ \frac{1}{G_0^J} [U^J(y) - U^J(0)], \quad \alpha^J, \beta^J > 0, \quad J = L, P, \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdzie zmienna niezależna:

$$y = \begin{cases} t_c - t, & \text{dla retrospektywnych relaksacji: } t \leq t_c \\ t - t_c, & \text{dla prospektywnych relaksacji: } t \geq t_c, \end{cases} \quad (2.21)$$

a wielkość  $X^J(0)$  oznacza maksymalną wartość indeksu (czyli dla  $t = t_c$ ), znaną z warunków początkowych<sup>10</sup>. Teraz (dla prostoty) przez zmienną  $X$  rozumiemy wcześniej używaną zmienną względną  $X - X_{BG}$ .

Jak widać, równanie (2.20) jest równaniem całkowym, które opisuje dwa **niezależne zbocza** lokalnych pików indeksu. Ze względu na to, że oba zbocza danego piku traktowane są jako niezależne, również parametry występujące w równaniu (2.20) są w ogólności różne dla różnych zboczy. Równanie (2.20) jest analogonem równania (25) zawartego w pracy [40], przy czym tutaj poszukujemy rozwiązania  $X^J(y)$  (będącego odpowiednikiem  $\varepsilon(t)$ ), przyjmując jako zadaną funkcję  $U^J(y)$  (która jest odpowiednikiem  $\sigma(t)$ ) a nie odwrotnie (oczywiście równanie (2.20) zezwala na obie możliwości podobnie jak równanie (25)). Podkreślmy, że równanie (2.20) zostało wyprowadzone na zupełnie innej drodze niż wspomniane równanie (25). Ogólniejszy charakter równania (2.20) tkwi w ogólniejszej postaci zmiennej  $y$  (zauważmy, że w równaniu (25) zamiast zmiennej  $y$  występuje czas  $t$ ); pozwala to na

- znajdowanie rozwiązań opisujących także ewolucję retrospektywną (wstecz w czasie),
- otrzymywanie rozwiązań (zarówno pro- i retrospektywnych) w postaci zamkniętej w obecności np. tłumionych dudnień; tego typu niejednorodność różni się zasadniczo od funkcji stałej użytej we wspomnianym równaniu (25) - **przyjęto tam stałe, nieznikające wydłużenie** przy czym, jak wskazałam, relaksacji podlega tam naprężenie.

Dla prospektywnych relaksacji ( $J = P$ ), pierwszy składnik po prawej stronie równania (2.20) jest wrażliwy tylko na przeszłość, o czym świadczy zawarte w nim algebraiczne jądro całkowite, i jest obecny nawet jeżeli ma miejsce zrównoważenie podaży i popytu ( $U^P(0) = 0$ ). Drugi składnik po prawej stronie równania (2.20), także zawierający jądro pamięci, opisuje (ogólnie rzecz biorąc) sumaryczny wpływ rynku finansowego na wartość indeksu a dokładniej tylko wpływ przeszłych wartości nadmiarowej podaży na jego aktualną wartość; trzeci składnik pokazuje jej chwilowy wpływ na ten indeks. **Zależność na zboczu prawym tylko od przeszłości (a więc nieuwzględnianie tutaj przyszłych oczekiwań) jest roboczą hipotezą (typu brzytwy Okhama), którą weryfikuję w oparciu o dane empiryczne.**

---

<sup>10</sup>Innymi słowy, dokonana została następująca zamiana zmiennych niezależnych (w stosunku do wyprowadzeń w pracy [40]):  $t \Rightarrow y$ ,  $t_0 \Rightarrow y_0 = 0$ .

Dla zбочy wznoszących ( $J = L$ ) sytuacja jest inna, gdyż wtedy równanie (2.20) przedstawia retrospektywną relaksację, czyli relaksację dla czasu biegnącego wstecz. W tym przypadku dominującą rolę odgrywają zarówno przyszłe wartości indeksu jak też nadwyżki podaźowej  $U^L(y)$  oraz jej aktualna wartość. **Jest to uproszczona hipoteza, którą (tak jak wspomnianą powyżej) także weryfikuję w opraciu o dane empiryczne.**

Zauważmy że ze swobodnym, fraktalnym równaniem relaksacji (prospektywnym lub retrospektywnym), czyli równaniem jednorodnym na funkcje  $X^J(y)$  (zawierającym tylko pierwszy składnik po prawej stronie równania (2.20)), mamy do czynienia w następujących trzech przypadkach<sup>11</sup>:

- gdy nadwyżka  $U^J(y)$  znika, czyli zachodzi równowaga podaźowo-popytowa,
- gdy współczynnik  $1/G_0^J$  znika lub
- gdy  $U^J(y)$  jest proporcjonalne do  $X^J(y)$ .

Wtedy, rozwiązanie  $X^J(y)$  jest proporcjonalne do funkcji Mittag-Lefflera - patrz równanie (D.1) oraz jego rozwiązanie (D.2) przedstawione w Dodatku D; w Dodatku E uzyskałam rozwiązanie równania (2.20) w opraciu o transformatę Laplace'a.

Dla wykładników kształtu  $0 < \alpha^J, \beta^J < 1$ , równanie (2.20) można także przedstawić w postaci niejednorodnego, różniczkowo-całkowego równania relaksacji (pro lub retrospektywnej) różniczkując je ,

$$\begin{aligned} \frac{dX^J(y)}{dy} &= -(\tau_1^J)^{-\alpha^J} {}_0D_y^{1-\alpha^J} X^J(y) + \frac{1}{G_0^J} (\tau_0^J)^{-\beta^J} {}_0D_y^{1-\beta^J} U^J(y) \\ &+ \frac{1}{G_0^J} \frac{dU^J(y)}{dy}, \quad J = L, P, \end{aligned} \quad (2.22)$$

gdzie różniczkowo-całkowe operatory Riemanna-Liouville'a mają następującą postać:

$$\begin{aligned} {}_0D_y^{1-\alpha^J} X^J(y) &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{d}{dy} \left( {}_0D_y^{-\alpha^J} X^J(y) \right), \\ {}_0D_y^{1-\beta^J} U^J(y) &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{d}{dy} \left( {}_0D_y^{-\beta^J} U^J(y) \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Równanie (2.22) można rozwiązać na innej drodze (działając wprost) niż ta podana w Dodatku E, wykorzystując ogólne własności operatora różniczkowo-całkowego RL [46]. Podkreślmy, że niedebyeowską relaksację w reologii opisuje się także za pomocą swobodnego (jednorodnego), fraktalnego równania relaksacji; z tego punktu

---

<sup>11</sup>Czwarty przypadek, dotyczący rozwiązania przybliżonego, został podany w podrozdziale 2.1.7.

widzenia równanie (2.22) jest ogólniejsze, gdyż jest równaniem niejednorodnym pozwalającym np. na uwzględnienie, tak potrzebnych w analizie rynków finansowych, oscylacji (rozwiązania) - w naszym przypadku oscylacje te wchodzą do rozwiązania w sposób addytywny.

### 2.1.6 Ułamkowa pochodna Caputo a przypadek równych wykładników kształtu

W Dodatku E.1 wyraziłam równanie (2.20) za pomocą ułamkowej pochodnej Caputo w następującej postaci<sup>12</sup>:

$$\frac{d^{\alpha^J} X^J(y)}{dy^{\alpha^J}} = -(\tau_1^J)^{-\alpha^J} X^J(y) + \frac{1}{G_0^J} \frac{d^{\alpha^J} U^J(y)}{dy^{\alpha^J}} + \frac{1}{G_0^J} (\tau_0^J)^{-\alpha^J} U^J(y) \quad J = L, P, \quad (2.24)$$

dla przypadku równych wykładników kształtu tzn.  $0 < \alpha^J = \beta^J < 1$ ,  $J = L, P$ . Przypomnę, że ułamkowa pochodna Caputo jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$\frac{d^{\alpha^J} f(y)}{dy^{\alpha^J}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^y dy' \frac{f^{(1)}(y')}{(y - y')^{\alpha^J}}, \quad (2.25)$$

przy czym  $f^{(1)}$  oznacza pierwszą pochodną zwyczajną funkcji  $f$  (tutaj  $f \equiv X^J, U^J$ ,  $J = L, P$ ). Jak widać, pochodna Caputo ma także charakter globalny (gdyż w jej definicji zawarte jest całkowanie) a nie lokalny.

Właśnie postać równania (2.24) usprawiedliwia używaną w niniejszej pracy nazwę "relaksacja fraktalna". Dodam, iż praktycznie rzecz biorąc, w pracy nie wychodzę poza wspomniane przybliżenie równych wykładników kształtu (tzn.  $\alpha^J = \beta^J$ ,  $J = L, P$ ).

### 2.1.7 Rozwiązanie fraktalnego zagadnienia początkowego

Konkretna postać funkcji  $U^J(y)$  potrzebna do rozwiązania równania (2.20) została narzucona oscylacyjnym w czasie charakterem indeksu (patrz dane przedstawione np. na wykresach 2.2-2.4). Stąd, nasze fraktalne zagadnienie początkowe (2.20) zostało rozwiązane przy założeniu, że

$$U^J(y) = \frac{U^J(0)}{2} \exp(-a^J y) [\exp(i(\omega^J - \Delta\omega^J) y) + \exp(i(\omega^J + \Delta\omega^J) y)] \quad J = L, P, \quad (2.26)$$

---

<sup>12</sup>Użyłam tutaj oryginalnej notacji C. Tsallisa z pracy [74]. Używanie tylko w tym podrozdziale oraz w Dodatku E.1 oznaczenia, które jest formalnie identyczne z pochodną ułamkową, pozwala uniknąć nieporozumienia.

czyli, że nadmiarowa podaż (ang. *excess supply*) lub popyt (ang. *excess demand*) jest, w ogólności, rządzona przez dwie częstotliwości (o ile byłaby taka potrzeba, to uogólnienie na większą ich liczbę nie nastrecza żadnych formalnych trudności<sup>13</sup>, gdyż równanie (2.22) jest liniowe); częstotliwość  $\omega^J$  i różnica częstotliwości  $\Delta\omega^J$  są wartościami nieujemnymi natomiast amplituda  $U^J(0)$  może być zarówno dodatnia jak też ujemna a nawet może znikać. Zauważmy, że z dudnieniami mamy do czynienia wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Delta\omega^J \ll \omega^J$ .

W Dodatku E przedstawiłam metodę rozwiązania liniowego, niejednorodnego równania całkowego (2.20) oraz uzyskałam jego jawne rozwiązanie dla przypadku  $\alpha^J = \beta^J$ ,  $J = L, P$ . Mianowicie, wykorzystując transformatę Laplace'a ułamkowego operatora całkowego RL (patrz Dodatek E wyrażenie (E.1)) uzyskuje się, po prostych algebraicznych przekształceniach, transformatę Laplace'a równania (2.20). Następnie, poprzez wstawienie transformaty Laplace'a wyrażenia (2.26) do tak przekształconego równania i zastosowanie odwrotnej transformaty Laplace'a (czyli przechodząc do zmiennej czasowej), uzyskuje się rozwiązanie z którego wyodrębnia się poszukiwaną część rzeczywistą (patrz wyrażenie (E.15) w Dodatku E).

Można oszacować (nawet w oparciu o bezpośrednią obserwację danych empirycznych), że w rozważanych przez nas sytuacjach zarówno częstotliwość  $\omega^J$  jak też różnica częstotliwości  $\Delta\omega^J$  są znacznie mniejsze od jedności<sup>14</sup>. Wynika stąd, że obie części jawnie retardowane ścisłego, rzeczywistego rozwiązania (E.15) (tzn. trzeci składnik proporcjonalny do  $\omega^J$  i czwarty proporcjonalny do  $\Delta\omega^J$ ) są do zanedbania, gdyż wielkości ich pozostałych czynników są rzędu  $X_1^J$  (patrz druga definicja w (2.28)). Oznacza to, że jawne retardowanie nadwyżki podaźowej lub popytowej nie zmienia charakteru dynamiki indeksu zarówno tuż przed jak i tuż po krachu. Zatem, rozwiązanie dane równaniem (E.15) można uprościć do następującego wyrażenia:

$$\Re X^J(y) \approx (X_0^J + X_1^J) E_\alpha \left( - \left( \frac{y}{\tau_1^J} \right)^{\alpha^J} \right) - X_1^J \cos(\omega^J y) \cos(\Delta\omega^J y),$$

$$J = L, P, \quad (2.27)$$

gdzie wszystkie współczynniki i parametry są rzeczywiste oraz

$$X_0^J \stackrel{\text{def.}}{=} X^J(0),$$

$$X_1^J \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left( \frac{\tau_0^J}{\tau_1^J} \right)^{-\alpha^J}.$$

$$(2.28)$$

---

<sup>13</sup>Dodam, że we wszystkich porównaniach z danymi empirycznymi czynnik tłumiący  $\exp(-\alpha^J)$ ,  $J = L, P$ , przyjęto dla uproszczenia równy 1 (czyli położono  $\alpha^J = 0$ ,  $J = L, P$ ).

<sup>14</sup>Częstotliwość jest mierzona tutaj w  $td^{-1}$ , gdzie  $td$  oznacza jeden dzień transakcyjny.

Jak widać, wielkości  $X_0^J$  oraz  $G_0^J$ ,  $U^J(0)$ ,  $\tau_0^J$  i  $\tau_1^J$  budują odpowiednio dwa kalibrujące współczynniki multiplikatywne  $X_0^J + X_1^J$  oraz  $X_1^J$  i tym samym mają pośrednio wpływ na proporcje pomiędzy oboma istotnie różnymi składnikami: pierwszym opisującym relaksację a drugim oscylacje. Oczywiście, gdy  $y = 0$  rozwiązanie (2.27) redukuje się, jak trzeba w zagadnieniu początkowym, do wartości wyjściowej  $X_0^J$ . Dodajmy, że ogromny błąd wyznaczenia współczynnika  $X_0^J$  (który, na szczęście, nie niszczy dobroci dopasowania, patrz tabela 2.11) jest związany z kształtem funkcji Mittag-Lefflera  $E_\alpha$  (patrz paragraf 1.6.3), odpowiedzialnym za to, że nawet niewielkie odsunięcie się od położenia maximum piku (w chwili  $t_c$ ) powoduje drastyczną zmianę wartości  $X^J(y)$ . Inaczej mówiąc, wynika to po prostu z braku ograniczenia na nachylenie zbocza piku. Wpisuje się to także w zasadę braku arbitrażu na giełdzie, o czym jest szerzej mowa w dalszej części.

Kluczowym parametrem odpowiedzialnym za kształt funkcji relaksacji jest wykładnik kształtu  $\alpha^J$ ,  $J = L, P$ . Właśnie ułamkowa, pozytywna wartość tego parametru oznacza

- istnienie w układzie długookresowej pamięci wpływającej w sposób skumulowany na własności układu lub
- długoterminowej prognozy uwzględniającej wpływ na układ przyszłych oczekiwań dotyczących wartości indeksu i nadwyżki popytowo-podażowej.

Jedyną funkcją opisującą relaksację (zarówno prospektywną jak i retrospektywną) jest obecna w pierwszej składowej rozwiązania (2.27) funkcja Mittag-Lefflera  $E_\alpha(\dots)$ , gdzie parametr  $\tau_1$  pełni rolę analogiczną do czasu relaksacji dla funkcji wykładniczej. Oczywiście, druga składowa w tym rozwiązaniu zawierająca iloczyn cosinusów, opisuje tylko oscylacje (a w tym np. dudnienia o ile  $0 < \Delta\omega^J \ll \omega^J$ ) i może mieć wpływ na znikanie relaksacji tylko w szczególnym przypadku, gdy  $X_0^J = -X_1^J$ ; w przeciwnym razie współczynniki kalibrujące nie mają wpływu na kształt funkcji opisującej relaksację indeksu. Jednakże sytuacja znikania współczynnika  $X_0^J + X_1^J$  nie była przeze mnie obserwowana (patrz wyniki przedstawione w dalszych podrozdziałach tego rozdziału), czyli ewentualne znikanie tego współczynnika należałoby traktować jako wyjątkowe.

### 2.1.8 Uwagi o równowadze popytowo-podażowej

Z rozwiązania (2.27) wynika ważny wniosek mówiący, że nawet znikanie nadwyżki popytowo-podażowej (czyli przypadek równowagi popytowo-podażowej, która zachodzi gdy  $U^J(0) = 0$ ) nie ma wpływu na typ relaksacji układu opisany funkcją ML; **relaksację wstecz lub wprzód w czasie w przypadku zachodzenia równowagi popytowo-podażowej możnaby nazwać spontanicznym efektem stadnym**

Tabela 2.2: Odpowiedniości pomiędzy wybranymi parametrami rynku papierów wartościowych a niektórymi parametrami termodynamicznymi

Rynek papierów wartościowych	Termodynamika
Indeks giełdowy $X$	Długość $L$
$y = t - t_c$	$y = T - T_c$
Stopa wzrostu na jednostkę czasu $\frac{d \ln X}{dy}$	Wsp. rozszerzalności liniowej $\left(\frac{\partial \ln L}{\partial T}\right)_p$

wynikającym (jakoś) z pozytywnego sprzężenia zwrotnego zachodzącego w obrębie dobrze wykształconych pików. Tego typu sytuacja jest analogonem stanu płynięcia materiału plastycznego, gdzie tuż przed jego zerwaniem (co może być analogonem krachu na giełdzie) wzrost jego wydłużenia nie wymaga już istnienia jakiegokolwiek naprężenia - płynięcie materiału ma charakter samoczynny (swobodny) w obecności dużych i wciąż rosnących obrotów. Jest to zasadnicza własność wprowadzonej wcześniej w tej pracy Hipotezy Rynku Plastycznego.

Dodajmy, że stan płynięcia materiału plastycznego jest wynikiem istnienia zjawiska histerezy dla takiego materiału, tzn. zależność wydłużenia od naprężenia jest opisana pętlą histerezy. Niestety, badanie analogonu zjawiska histerezy na giełdzie nie było możliwe ze względu na brak dostępu do księgi zleceń (ang. *book of orders*).

### 2.1.9 Usprawiedliwienie używania terminu "przemiana fazowa na giełdzie"

Dalsze przydatne odpowiedniości między parametrami występującymi na giełdzie i parametrami termodynamicznymi podane są w tabeli 2.2 (gdzie oczywiście  $T$  oznacza temperaturę,  $T_c$  to temperatura przejścia a  $p$  oznacza ciśnienie).

Przedstawiona w tabeli 2.2 odpowiedniość pomiędzy temperaturą i czasem wymaga wyjaśnienia. Zwykle (np. w badaniach zjawisk rozproszonych w materii skondensowanej) wprowadza się formalną odpowiedniość pomiędzy temperaturą a czasem pomnożonym przez jednostkę urojoną; rezygnując tutaj z mnożenia czasu przez jednostkę urojoną przenosimy ją na współczynniki równania. Innymi słowy, najogólniejsze równanie fraktalnej relaksacji powinno zawierać współczynniki zespolone a tym samym stanowić także fraktalne uogólnienie równania relaksacji (B.8) - właśnie rozwiązaniem tego ostatniego jest funkcja logarytmiczno-periodyczna<sup>15</sup>. Można dodać, że to uogólnione fraktalne równanie relaksacji (UFRR) jest jednocze-

<sup>15</sup>Uwaga ta została poczyniona tutaj dzięki sugestii prof. S. Drożdża sformułowanej na 4 Ogólnopolskim Sympozjum Fizyki w Ekonomii i Naukach Społecznych, jakie odbyło się w Rzeszowie w maju tego roku.

śnie uogólnieniem równania, którego rozwiązaniem jest funkcja q-eksponens Tsallisa [74]. Zatem, UFRR powinno dać, w zależności od przyjętych parametrów (a w tym od rzędu pochodnej fraktalnej), jako rozwiązania funkcję Mittag-Lefflera, funkcję logarytmiczno-periodyczną lub funkcję q-eksponens Tsallisa.

Dodam, że wcześniej chwilową wielkość obrotów (w ramach pików) wiązałam z fluktuującą temperaturą a dokładniej wielkość  $|V(t) - V(t_c)|$  wiązałam z  $|T - T_c|$  dla każdego z boczka z osobna. Było to możliwe dzięki obserwacji, że na każdym ze zboczy z osobna wielkość  $|V(t) - V(t_c)|$  jest (abstrahując od fluktuacji) monotoniczną funkcją czasu  $|t - t_c|$ . Oczywiście, własność ta dotyczy tylko dobrze wykształconych pików.

W niniejszej pracy nie rozważam termodynamiki fraktalnego ciała stałego (co jest interesujące samo w sobie), a jedynie **zwracam uwagę na wybrane analogie występujące pomiędzy giełdą a termodynamiką. Kluczowa jest tutaj odpowiedniość między stopą wzrostu liczoną na jednostkę czasu a współczynnikiem rozszerzalności liniowej.** Potęgowa rozbieżność tych współczynników pozwala traktować dynamiczną przemianę fazową jako analogon przemiany fazowej (pierwszego rodzaju) materiału plastycznego; przemiana taka jest możliwa do zaobserwowania (z dobrym przybliżeniem) na giełdzie papierów wartościowych. Właśnie odpowiedniość pomiędzy wspomnianymi współczynnikami usprawiedliwia używanie terminu "przemiana fazowa" w odniesieniu do giełdy.

## 2.2 Porównanie z giełdowymi danymi empirycznymi i wnioski

Rozwiązanie (2.27) daje oryginalną odpowiedź na praktyczne pytanie dotyczące matematycznego opisu kształtu wybranych lokalnych pików indeksu giełdowego, czyli (tutaj) wszystkich opadających i niektórych zboczy wznoszących. Te pozostałe zbocza wznoszące, czyli zbocza pików  $a$  i  $B$  WIGu (patrz rys.1.5), są opisane przez dobrze znane oscylacje logarytmiczno-periodyczne zdefiniowane równaniem (1.7); w naszym przypadku są to tzw. wznoszące antybańble.

Przed przystąpieniem do analizy danych empirycznych należy podkreślić, że nie były one detrendowane za pomocą wykładniczej, pozbawionej ryzyka (pozarynkowej) stopy wzrostu ponieważ jest ona rzędu inflacji, będąc niemal skompensowaną przez nią. Jej wpływ mógłby się ewentualnie ujawnić dopiero w okresie kilkudziesięcioletnim; jednakże, tak długi okres czasu nie był przedmiotem mojego zainteresowania.

Jak już wcześniej wspomniałam, rozwiązanie (2.27) składa się z dwóch istotnie różnych części:

- 1) monotonicznej, dotyczącej zarówno wzrastających jak i opadających zboczy, opisaney przez funkcje ML (pierwsza składowa we wzorze (2.27)) i
- 2) części oscylacyjnej (druga składowa) uwzględniającej tutaj tylko dwie (np. bliższe) częstotliwości. Jedna z tych częstotliwości mogłaby być związana z aktywnością wiodącego inwestora (lub grupy inwestorów) a druga z pozostałymi, naśladowującymi go inwestorami (lub grupami inwestorów).

Podkreślmy, w nawiązaniu do punktu 1), że wszystkie rozważane w pracy lokalne w czasie piki, za wyjątkiem ostatniego piku indeksu DJIA (o czym jest mowa w podrozdz.2.2.6), są lewo- lub prawostronnie ostrymi<sup>16</sup>; dla takich pików lewo- lub prawostronna pochodna jest rozbieżna w  $y = 0$  (patrz równanie (2.27) oraz własności (1.1) i (1.3) funkcji Mittag-Lefflera (1.4)). Dzieje się tak, ponieważ otrzymany z dopasowania wykładnik kształtu jest dodatni i mniejszy od jedności,  $0 < \alpha < 1$ , co jest wymagane przez pierwszą relację w wyrażeniu (1.3). Podkreślmy jednak, że piki jednostronnie ostre mogą mieć drugie zbocze opisane wykładnikiem kształtu, którego wartość jest większa od jedności, tak jak to ma np. miejsce dla aktualnie trwającej bessy - zagadnienie to omawiam w dalszej części (patrz np. paragraf pt.: "Aktualna bessy na WIGu").

Zauważmy, że czysto fraktalna, swobodna relaksacja jest opisana fraktalnym równaniem relaksacji, powstałym przez przyjęcie w równaniu (2.20), że współczynnik  $1/G_0^J = 0$  lub funkcja  $U^J(y) = 0$  bądź też, że funkcja  $U^J(y)$  jest proporcjonalna do  $X^J(y)$ . Takie uproszczone, jednorodne równanie jest uogólnieniem standardowego równania relaksacji (zdefiniowanego przez wykładnik  $\alpha = 1$ ), którego rozwiązanie ma postać funkcji ML (1.4). Właśnie z tego fraktalnego równania relaksacji można odczytać (o czym wcześniej wspominaliśmy) obecność efektu długookresowej pamięci<sup>17</sup> bądź też wpływu przyszłych oczekiwań na terażniejszość.

## 2.2.1 Pobieźna analiza pików $A$ , $a$ i $B$ WIGu

W podrozdziale tym przedstawiam

- dopasowanie lewego zbocza piku  $A$  funkcją eksponens, natomiast prawego funkcją daną wyrażeniem (2.27),
- dopasowanie lewego zbocza piku  $a$  funkcją logarytmiczno-periodyczną, natomiast prawego funkcją (2.27),

---

<sup>16</sup>Została tutaj rozszerzona definicja ostrego maksimum podana np. w pracy [3], na maksimum jednostronnie ostre.

<sup>17</sup>Dowodzi się, że taka pamięć może być zdefiniowana za pomocą operatorów rzutowych w ramach znanego formalizmu Zwanziga-Mori.

Tabela 2.3: Najważniejsze parametry opisujące pik  $A$  na WIGu

Zbocze	$\alpha$	$\tau_1$ [td]	$t_c$ [td]	$\omega$ [td <sup>-1</sup> ]	$\Delta\omega$ [td <sup>-1</sup> ]
Zbocze wzrastające	1.00	58	320	–	–
Zbocze opadające	0.41	176	316	0.18	0.009

- analogiczne jak dla piku  $a$ , dopasowanie dla piku  $B$ .

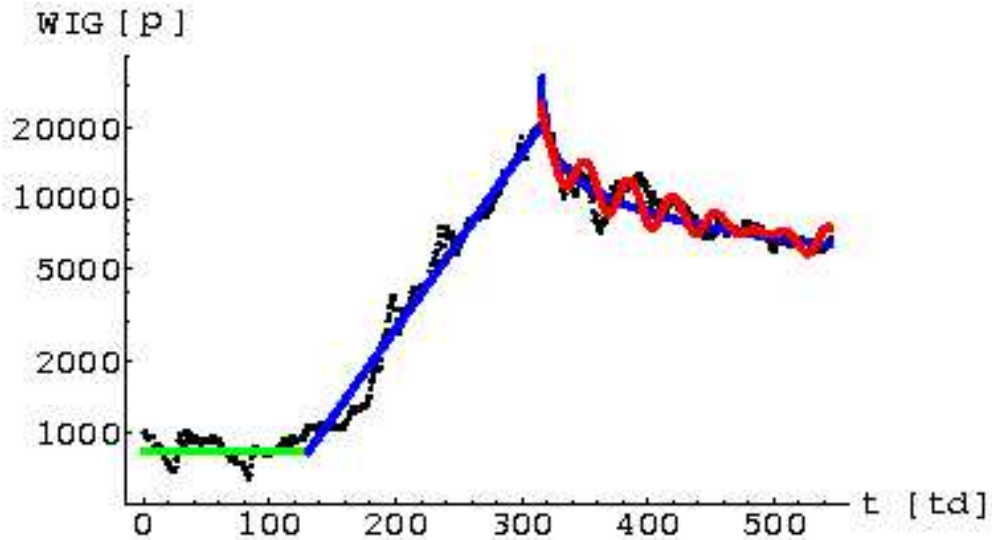
Jest to analiza o charakterze wstępnym - przykładową, znacznie pełniejszą analizę przeprowadziłam dla piku  $C$  (czyli ostatniego piku na WIGu), gdyż jest on najlepiej wykształcony i największy oraz szczególnie interesujący bowiem dotyczy przecież aktualnie trwającego światowego kryzysu gospodarczego.

### Krótką analiza piku $A$

Na rys.2.2 przedstawiłam lokalny pik  $A$  dziennych notowań giełdowych indeksu WIG na zamknięciu (czarne punkty oznaczają, jak zwykle, dane empiryczne, patrz także rys.1.5) w skali półlogarytmicznej. Pik ten obejmuje okres od powstania giełdy czyli od 16 kwietnia 1991 roku do 31 marca 1995; prezentowane dane składają się z 541 punktów empirycznych (sesji giełdowych). Jeżeli chodzi o lewe zbocze piku to zielona linia oznacza poziom odniesienia, natomiast niebieska pokazuje eksponen-cjalny wzrost indeksu. Krzywa oscylująca (obrazująca superpozycję funkcji ML oraz dudnień) dopasowana do prawego zbocza została otrzymana z równania (2.27). Natomiast, monotonicznie opadająca krzywa (niebieska) na prawym zboczu to funkcja ML dana wzorem (1.4). Wartości odpowiednich parametrów (oprócz parametrów kalibrujących) opisujących wszystkie przedstawione krzywe zamieściłam w tabeli 2.3. Widać, że otrzymane dopasowanie jest zadowalające, **wskazując na możliwość opisu lokalnych pików za pomocą funkcji ML odpowiednio udekorowanej dudnieniami**. Istnienie dudnienia można interpretować jako wypadkową częstotliwość inwestycji większości graczy podążających za częstotliwością wiodącą kapitałowego lidera giełdy, czyli echo tej wiodącej częstotliwości.

### Uzupełniająca analiza na przykładzie piku $a$

Kolejny, lokalny pik  $a$  (patrz rys.1.5) przedstawiłam osobno na rys.2.3 (czarne punkty to, jak zwykle, dane empiryczne). Jest to ewolucja dziennych notowań indeksu WIG na zamknięciu (w skali półlogarytmicznej) poczynszyszy od 790 dnia transakcyjnego (traktowanego jako początek tego piku) do 1125 dnia transakcyjnego (koniec piku). Tym samym, szereg czasowy składa się z 336 punktów obejmujących horyzont czasowy od 01.04.1996 do 06.08.1997. Wzrastająca krzywa log-periodyczna została



Rysunek 2.2: Lokalny pik  $A$  dziennych notowań giełdowych indeksu WIG w skali półlogarytmicznej o horyzoncie czasowym obejmującym okres od powstania giełdy, czyli od 16 kwietnia 1991 roku, do 31 marca 1995. Zielona linia oznacza poziom odniesienia, niebieska pokazuje eksponencjalny wzrost indeksu. Krzywa oscylująca dopasowana do prawego zbocza została otrzymana z równania (2.27). Opadająca krzywa na prawym zboczu to funkcja ML dana wzorem (1.4).

Tabela 2.4: Główne parametry opisujące wzrastające logarytmiczno-periodyczne oscylacje pików  $a$  na WIGu

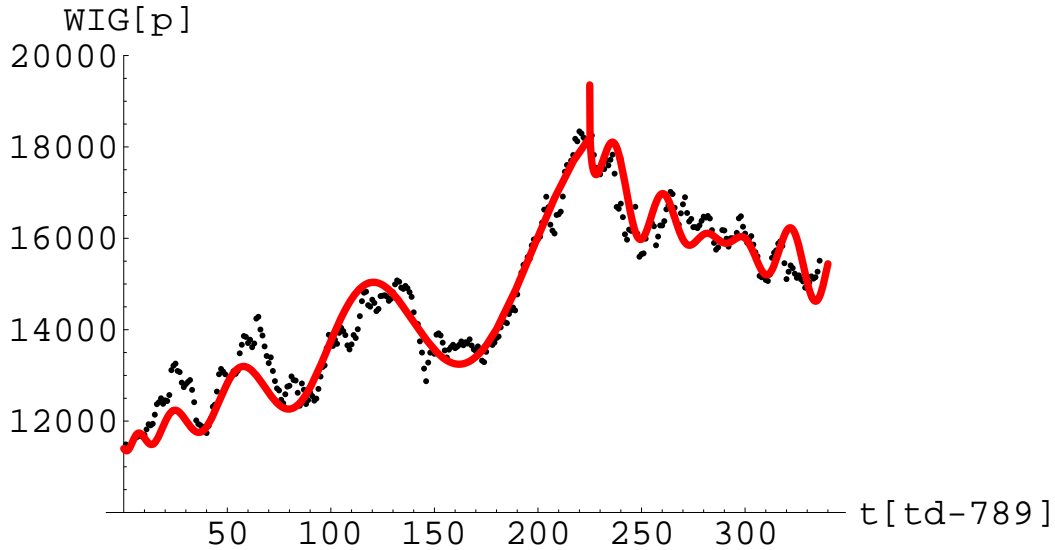
$\alpha$	$\tau$ [td]	$t_c$ [td]	$A$ [p]	$\omega$ [td <sup>-1</sup> ]	$\phi$ [td <sup>-1</sup> ]
1.02	0.057	-12.0	0.43	9.8	-19.1

otrzymana na podstawie równania (1.7), podczas gdy krzywa relaksująca została dopasowana na podstawie równania (2.27); odpowiednie parametry (za wyjątkiem kalibrujących) zamieszczone zostały w tabelach 2.4 i 2.5.

Analogicznie jak w przypadku pików  $A$ , można powiedzieć, że **prawe zbocze pików  $a$  daje się opisać w sposób zadowalający krzywą ML udekorowaną dudnieniami**.

### Pomocnicza analiza pików $B$

Dla kompletności rozważań, na rys.2.4 przedstawiłam pik  $B$  (analogicznie jak poprzednio, czarne punkty reprezentują dane empiryczne, patrz także rys.1.5). Jest to ewolucja dziennych notowań giełdowych WIGu datowanych od 1380 dnia transak-



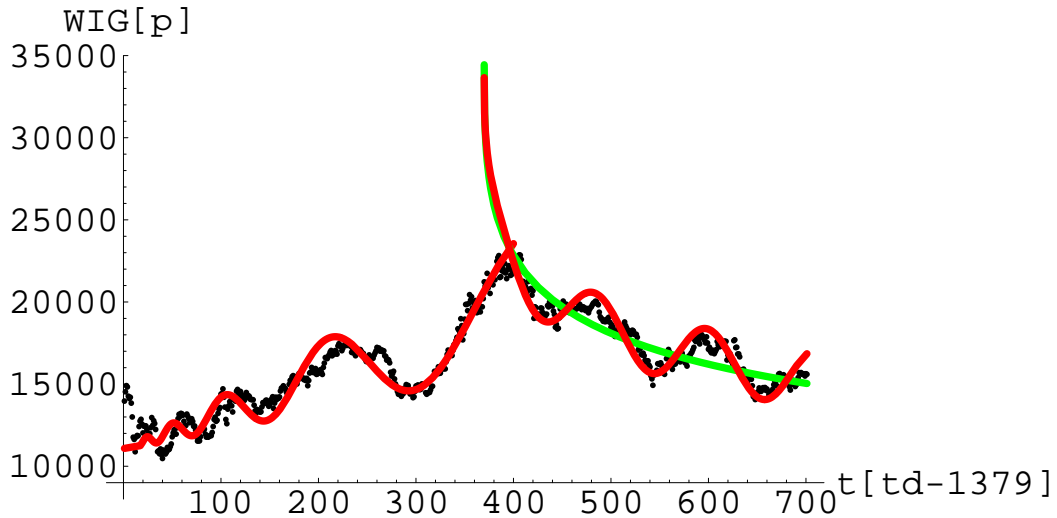
Rysunek 2.3: Lokalny pik  $a$  dziennych notowań indeksu WIG (w skali półlogarytmicznej) począwszy od 790 dnia transakcyjnego (uznawanego za początek tego piku) do 1125 dnia transakcyjnego (koniec piku); dane empiryczne obejmują horyzont czasowy od 1996.04.01 do 1997.08.06. Wznosząca krzywa log-periodyczna została dopasowana na podstawie równania (1.7), podczas gdy krzywa relaksująca na podstawie (2.27); odpowiednie parametry zamieszczone zostały w tabelach 2.4 i 2.5.

Tabela 2.5: Główne parametry opisujące opadające zbocze piku  $a$

$\alpha$	$\tau_1$ [td]	$t_c$ [td]	$\omega$ [td <sup>-1</sup> ]	$\Delta\omega$ [td <sup>-1</sup> ]
0.25	6830	245	0.26	0.025

cyjnego (początek lokalnego maksimum) do 2080 dnia przyjętego za koniec przedziału czasowego tego piku; prezentowany szereg czasowy składa się z 701 danych empirycznych obejmujących horyzont czasowy od 17.08.1998 do 01.06.2001. Krzywa (czerwona) opisująca oscylacje (ale nie dudnienia) prawego zbocza jest zdefiniowana równaniem (2.27) podczas gdy wzrastająca krzywa log-periodyczna (lewe zbocze) została narysowana na podstawie równania (1.7). Zasadnicze parametry opisujące przedstawione krzywe (czyli oprócz parametrów kalibrujących) zamieściłam w tabelach 2.6 i 2.7.

Ponownie widoczna jest zadowalająca zgodność przewidywań teoretycznych dla obu zboczy z danymi empirycznymi. Można powiedzieć, że **przedstawione powyżej zgodności wraz z omawianymi poniżej a także z podanymi wcześniej dla rynku hipotecznego, usprawiedliwiają zastosowanie Reologicz-**



Rysunek 2.4: Lokalny pik  $B$ : ewolucja dziennych notowań giełdowych indeksu WIG datowanych od 1380 dnia transakcyjnego (początek piku, 17.08.1998) do 2080 dnia uznanego za koniec przedziału czasowego tego piku (01.06.2001). Krzywa opisująca oscylacje prawego zbocza jest opisana równaniem (2.27) podczas gdy wzrastająca krzywa log-periodyczna została otrzymana na podstawie równania (1.7). Kluczowe parametry opisujące krzywe zostały przedstawione w tabelach 2.6 i 2.7.

Tabela 2.6: Główne parametry opisujące log-periodyczne zbocze piku  $B$

$\alpha$	$\tau$ [td]	$t_c$ [td]	$A$ [p]	$\omega$ [td <sup>-1</sup> ]	$\phi$ [td <sup>-1</sup> ]
1.02	0.054	-2.0	0.46	8.93	-23.6

**nego Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego do opisu ewolucji wybranych indeksów giełdowych w ramach określonych horyzontów czasowych** dla giełdy, obejmujących pojedyncze dobrze wykształcone piki utworzone z dziennych danych giełdowych na zamknięciu. (Branie danych na zamknięciu jest nieco wygodniejsze niż na otwarciu, gdyż unika się w ten sposób zniekształcającego "efektu włączeniowego" w postaci nagłego wzrostu początkowej aktywności giełdy.)

Poniżej przedstawiam pogłębioną (w porównaniu z powyższymi rozważaniami) analizę ostatniego maksimum zarówno na WIGu i WIG20 jak też na indeksie giełdy średniej (DAX) i indeksach giełd dużych (DJIA, S&P500 oraz NASDAQ)<sup>18</sup>. **Wiele uwagi poświęcam zwłaszcza odpowiedzi na pytanie: w jaki sposób pogodzić podejście deterministyczne (jakie daje wprowadzony w pracy Re-**

<sup>18</sup>Warszawską Giełdę Papierów Wartościowych należy uznać za małą, gdyż handel zaledwie pięcioma największymi spółkami generuje blisko 60% wielkości obrotów.

Tabela 2.7: Główne parametry opisujące opadające zbocze piku  $B$

$\alpha$	$\tau_1$ [td]	$t_c$ [td]	$\omega$ [td <sup>-1</sup> ]
0.39	367	370	0.055

Tabela 2.8: Charakterystyczne czasy określające rozpiętość piku  $C$  (patrz rysunki 1.5 i 2.11) oraz odpowiadające im numery punktów empirycznych.

	$t_{BEGIN}$ [td]	$t_{LAST}$ [td]
Data	06.02.2004	15.05.2009
Numer punktu	2750	4073

**ologiczny Model Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego) z Hipotezą Rynku Efektywnego.**

## 2.2.2 Dyskusja ostatniego piku WIGu

W niniejszym podrozdziale omawiam szczegółowo największy a zarazem najlepiej ukształtowany ostatni pik na WIGu (patrz pik  $C$  na rys.1.5), zbudowany z notowań dziennych (otrzymanych, jak zwykle, z danych empirycznych na zamknięciu), jaki jest związany z aktualnie panującym światowym kryzysem gospodarczym. Daty określające subiektywnie wybrany początek,  $t_{BEGIN}$ , oraz chwilę zakończenia zbierania danych,  $t_{LAST}$ , (która nie stanowi końca bessy) zamieściłam w tabeli 2.8. Najpierw omawiam lewe zbocze piku, czyli najdłuższą hossę na WIGu w jego całej historii, a następnie (niezależnie) zbocze prawe, gdyż nawet na pierwszy rzut oka widać (podobnie jak poprzednio) jak bardzo różnią się między sobą.

### Długoterminowa hossa na WIGu

Lewe zbocze piku  $C$  zostało przedstawione osobno na rys.2.5, który omawiam poniżej. Zatem,

- jak zwykle, czarne punkty oznaczają dzienne dane empiryczne (na zamknięciu sesji). Ponadto,
- zamieszczona na tym rysunku czerwona krzywa ciągła pochodzi z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych przy braku dudnień (czyli przy założeniu, że  $\Delta\omega = 0$ ), oprócz tego

- dla porównania naniesiono także przewidywanie dostarczone przez tzw. rozciągnięty eksponens (ciągła krzywa niebieska), w który przechodzi funkcja ML gdy  $y \rightarrow 0$ ;

obie krzywe teoretyczne poprowadzono dla tych samych wartości parametrów i współczynników modelu<sup>19</sup> zamieszczonych w tabelach 2.10 i 2.11.

Górna granica  $t_c$ <sup>20</sup> obszaru skalowania jest wyznaczona przez ostatni punkt po prawej stronie (patrz wykres na rys.2.5), będący wspólnym punktem obu krzywych teoretycznych. Jak wynika z rozważań zawartych w paragrafie 1.6, położenie tego końcowego punktu  $t_c$  może być stosunkowo prosto wyznaczone (zagadnienie wyznaczenia błędu  $t_c$  jest omawiane poniżej) dzięki spełnionym przez niego warunkom, które można odczytać bezpośrednio z wykresu. Mianowicie,

- wartość indeksu  $X(t = t_c)$  jest skończona,
- nachylenie wykresu w punkcie  $t_c$  jest pionowe, czyli pochodna  $\frac{dX(t)}{dt}$  rozbiega się przy  $t \rightarrow t_c$  od lewej strony. W tym sensie **można traktować przejście od fazy wznoszącego trendu do opadającego jak analogon przemiany fazowej pierwszego rodzaju, czyli nieciągłej.**

Zwróćmy uwagę na fakt, że wspomniana powyżej analogia do przemiany fazowej pierwszego rodzaju ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy  $0 < \alpha < 1$ ; dla  $1 < \alpha < 2$  mamy do czynienia z analogonem przemiany fazowej drugiego rodzaju, (patrz paragraf pt.: "Aktualna bessa na WIGu") a dla  $\alpha > 2$  można mówić o przemianach fazowych wyższych rzędów (niezwykle rzadko obserwowanych w naturze).

Co do dolnej granicy  $t_{LOW}$  obszaru skalowania, to możliwe jest podanie tylko jej szacunkowej wartości, gdyż granica ta nie ma ostrego charakteru. W tym celu na rys.2.6 przedstawiono wykres zależności wielkości  $\Delta(y) \stackrel{\text{def.}}{=} (ML(y) - SE(y))/SE(y)$  od  $y$  (czerwona krzywa ciągła). Można uznać, że wielkość ta jest mała, gdy  $|\Delta(y)| < 0.05$  (brany jest tutaj pod uwagę tylko obszar najbliższy punktowi  $t = t_c$ , czyli obszar na prawo od linii przerywanej). Ponieważ linia przerywana została poprowadzona przy warunku  $|\Delta(y)| = 0.05$  dając  $t = 847 [td]$ , więc można przyjąć, że poszukiwany zakres zmiennej  $y$  wynosi  $0 < y < 45 (= 892 - 847)$ . Stąd, z grubsza rzecz biorąc można uznać, że  $y_{LOW} \approx 45$ , tzn.  $t_{LOW} \approx 847$ . Na tak otrzymaną wartość  $t_{LOW}$  należy patrzeć jedynie jak na wielce prawdopodobną, zdając sobie sprawę z jej znacznej niepewności wynikającej zarówno z szacunkowego charakteru powyższego kryterium jak też z niepewności  $t_c$  (patrz błąd wielkości  $t_c$  podany w tabeli 2.10) - ma to, jak się wydaje, swoje głębsze uzasadnienie, które może wynikać z zasady braku arbitrażu na giełdzie; do zagadnienia tego powracam w podrozdziale 2.2.3.

<sup>19</sup>Oczywiście, funkcja rozciągnięty eksponens wykorzystuje mniejszą liczbę parametrów.

Tabela 2.9: Charakterystyczne punkty wraz z odpowiadającymi im datami dla wzrastającego zbocza piku  $C$ .

	$t_c$ [td]	$t_{LOW}$ [td]	$t_{MAX}$ [td]	$t_{LAST}$ [td]
Numer punktu	892	847	860	1324
Data	22.08.2007	19.06.2007	06.07.2007	18.05.2009

Oszacowany w powyższy sposób zakres obszaru skalowania wraz z położeniem empirycznego punktu zwrotnego,  $t = t_{MAX}$ , (który wyznacza empiryczną granicę między trendem wznoszącym i opadającym) a także ostatni empiryczny punkt piku<sup>21</sup>,  $t = t_{LAST}$ , zamieszczono w tabeli 2.9 wraz z odpowiadającymi im datami. Dysponując tymi wielkościami **możemy zdefiniować krach na giełdzie jako taki stan rynku, w którym punkt zwrotny  $t_{MAX}$  leży** (z dokładnością do błędu dopasowania) **w obszarze skalowania**, czyli

- gdy  $t_{LOW}^L \leq t_{MAX} \leq t_c^L$ , jak to ma miejsce w omawianym przypadku, bądź też
- gdy  $t_c^P \leq t_{MAX} \leq t_{LOW}^P$ , jak to ma miejsce w przypadku dla WIG20 (patrz podrozdz.2.2.4)

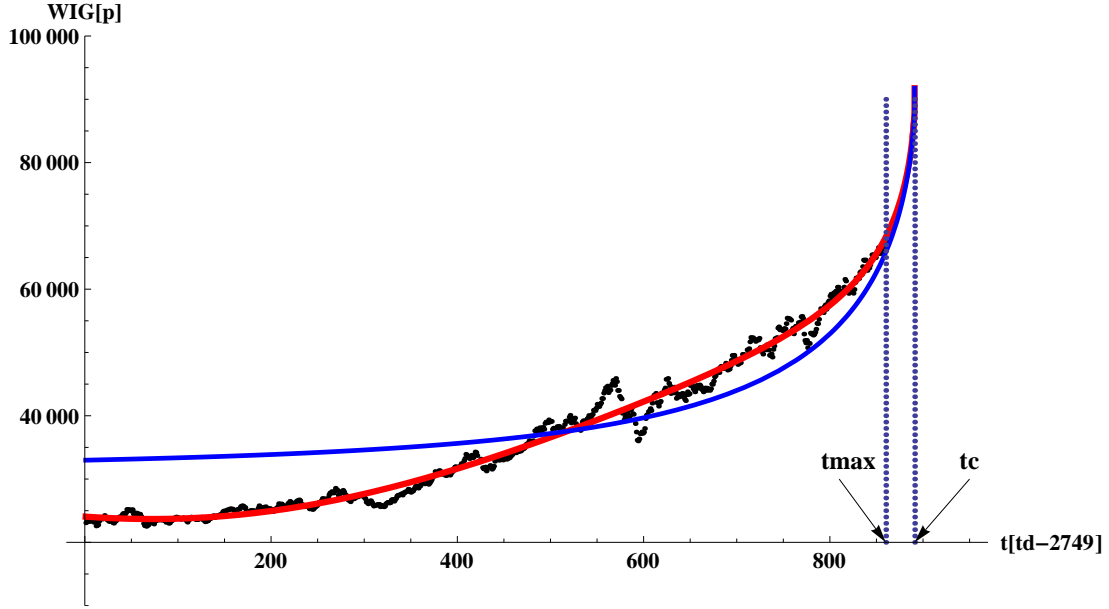
Zauważmy, że tutaj czas  $t_{MAX} < t_c^L$ , co może być spowodowane przede wszystkim awersją inwestorów (zwłaszcza niedużych) do ryzyka. W przypadku WIG20 sytuacja jest inna, gdyż dla tego indeksu  $t_{MAX} = t_c^P$ , znajdując się tym samym w przedziale  $t_c^P \leq t_{MAX} \leq t_{LOW}^P$ . Przedział ten stanowi obszar skalowania dla przemiany fazowej wstecz w czasie (pierwszego rodzaju gdyż  $\alpha < 1$ , patrz tabela 2.16), czyli dla przejścia bessa - hossy; przemiana taka może być analizowana tylko *post factum*.

Wyniki zamieszczone w tabelach 2.10 i 2.11 budzą refleksje bowiem dwa parametry istotne dla uzyskania profitu (tutaj  $\tau_1^L$  oraz  $X_0^L + X_1^L$ ) są, praktycznie rzecz biorąc, niepoznawalne gdyż ich błędy są większe od wartości samych parametrów. W taki sposób właśnie przejawia się, w przypadku modelowania o charakterze deterministycznym, dążenie giełdy do uniemożliwienia wystąpienia na niej arbitrażu (czyli zysku bez ryzyka). Zagadnienie to jest omawiane przeze mnie w dalszym ciągu, np. w podrozdz.2.2.3.

Kolejny wykres przedstawiony na rys.2.7 dostarcza zaskakującej obserwacji sugerującej, że może mieć miejsce analogia przemiany fazowej zachodzącej także na

---

<sup>21</sup>Jest to ostatni, uwzględniony przeze mnie punkt empiryczny piku co nie oznacza, że jest on ostatnim punktem bessy - punkt ten wyznacza po prostu dzień w którym musiałam zakończyć pobieranie danych giełdowych ze względu na konieczność zakończenia spisywania rozprawy doktorskiej.



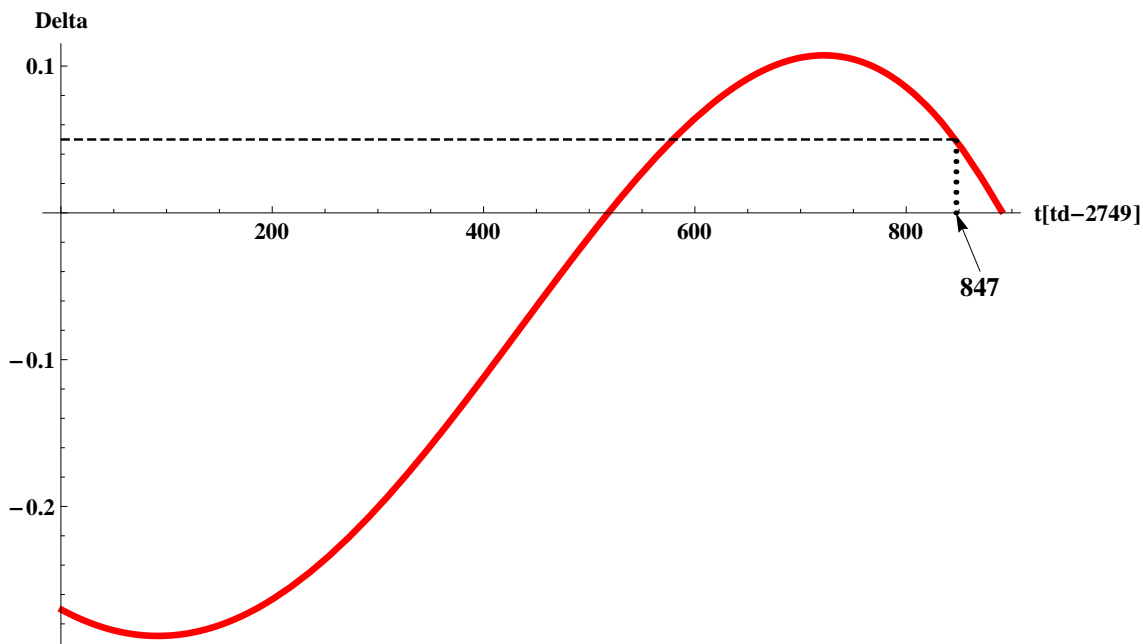
Rysunek 2.5: Lewe zbocze lokalnego piktu  $C$  (patrz także wykres na rys.1.5): ewolucja dziennych notowań giełdowych WIGu datowanych od 2750 dnia transakcyjnego (subiektywnie wybrany początek lokalnego piktu  $C$  traktowany tutaj dla prostoty jako punkt 0) do 3609 sesji uznawanej za empiryczny koniec tego zbrocza a zarazem wyznaczającej położenie maksimum piktu ( $t = t_{MAX}$ ). Wspomniane notowania składają się z 860 punktów empirycznych o horyzoncie czasowym od 06.02.2004 do 06.07.2007. Dopasowana do zbrocza krzywa ciągła (czerwona) została otrzymana ze wzoru (2.27) przy założeniu braku dudnień ( $\Delta\omega = 0$ ). Wartości parametrów uzyskane z tego dopasowania wraz z ich błędami zamieszczone zostały w tabeli 2.10. Przewidywania funkcji SE (krzywa niebieska, patrz wzór (1.1)) otrzymane zostały dla tych samych wartości parametrów  $\alpha$ ,  $\tau_1$  i  $X_0$  co przewidywania funkcji ML (krzywa czerwona). Końcowy punkt obu krzywych teoretycznych (dla  $t = t_c$ ) przypada na 22.08.2007, czyli 892 dzień transakcyjny.

Tabela 2.10: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbrocza piktu  $C$  przedstawionego na rys.2.5 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = L$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9986$ .

Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$t_c$	892 [td]	73 [td]
$\tau_1$	105 [td]	420 [td]
$\alpha$	0.57	0.23
$\omega$	0.0041 [td <sup>-1</sup> ]	0.0005 [td <sup>-1</sup> ]

Tabela 2.11: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbocza piku C, w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.10.

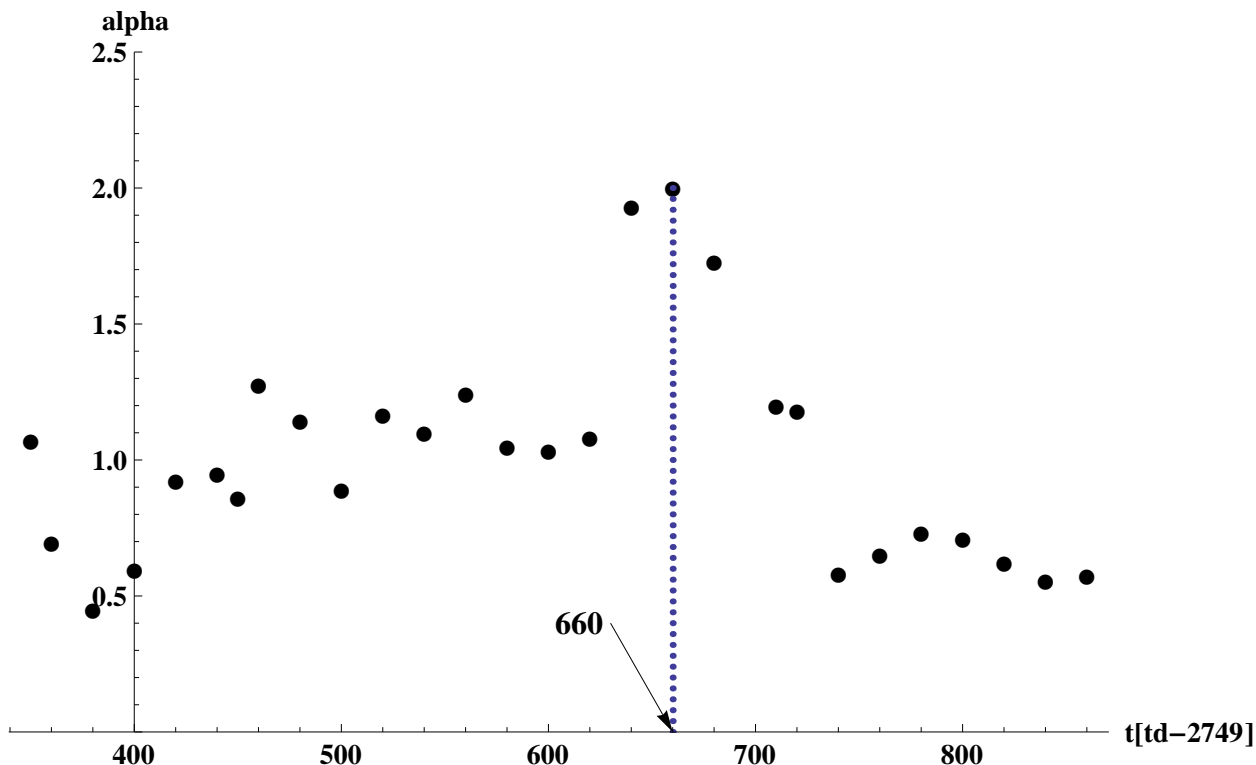
Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	60081	85273
$X_1$	-8659	2352



Rysunek 2.6: Zależność wielkości  $\Delta$  od czasu dla lewego zbocza piku C.

poziomie wykładnika kształtu a nie tylko na poziomie samej funkcji (w tym przypadku indeksu WIG). Przemiana taka oznaczałaby przejście od przemiany przynajmniej trzeciego rodzaju (gdyż jak widać tutaj  $\alpha > 2$ ) do przypadku występowania jedynie przemian pierwszego rodzaju ( $0 < \alpha < 1$ ). Innymi słowy, taka przemiana przemian ("nadprzemiana") zachodziłaby w zbiorze przemian fazowych.

Ponadto, wykres zamieszczony na rys.2.8 wskazuje, że (poczynając, mniej więcej, od punktu  $t = 350$ ) układ stał się krytyczny (pierwszego lub wyższych rzędów), gdyż możliwe stało się wyznaczenie dla niego kolejnych wartości  $t_c$ , przy czym w każdej chwili można byłoby się spodziewać spontanicznej zmiany trendu, gdyż wykres nie faworyzuje żadnej z nich - jest to ponownie zgodne z paradygmatem rynku mówiącym o braku arbitrażu na giełdzie. Potwierdza to także wykres przedstawiony na rys.2.9 wskazujący, że wielkość  $t_c - t_{MAX}$  przejawia znaczny rozrzut wokół trendu



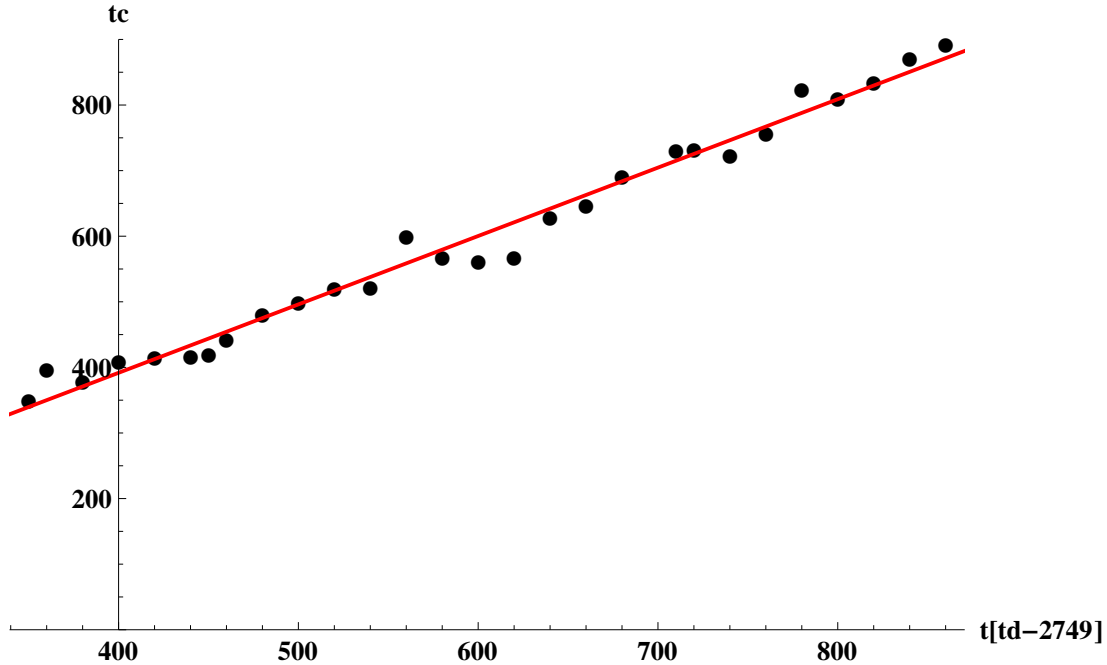
Rysunek 2.7: Zależność wykładnika  $\alpha$  od długości szeregu czasowego dla lewego zbocza piku  $C$  (rozrzut punktów określa zarazem szacunkowo ich błąd).

horyzontalnego, uniemożliwiając tym samym wcześniejsze wyznaczenie ostatecznej (granicznej) wartości  $t_c$ .

Oczywiście, nie każda zmiana trendu prowadzi do krachu. **Moja analiza aktualnej sytuacji na WIGu sugeruje, że pojawienie się krachu na tym indeksie związane jest z przemianą fazową pierwszego rodzaju, czyli z przemianą o charakterze nieciągłym.**

### Aktualna bessa na WIGu

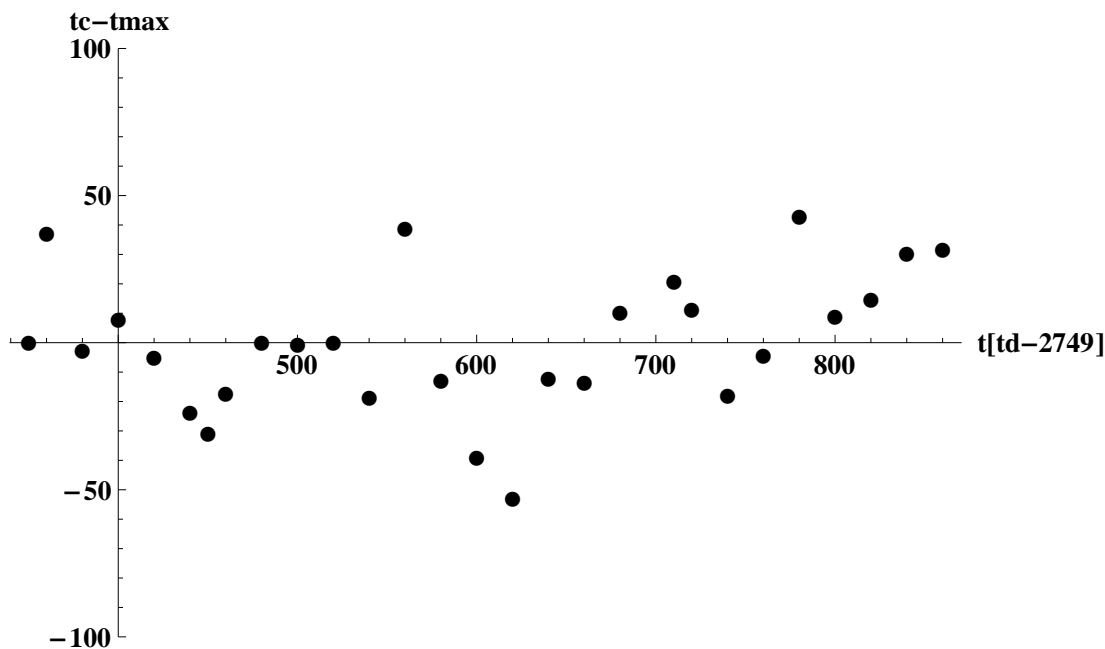
Na rys.2.10 przedstawiłam dopasowanie przewidywania wzoru (2.27), do danych empirycznych tworzących prawe zbocze piku  $C$ . Parametry tego dopasowania zestawiałam w tabelach 2.12 i 2.13. Parametr  $t_c^P = 810$  (związany z tym zboczem) nie został w nich zamieszczony gdyż stanowi, przyjęty przeze mnie, początek lewego zbocza piku  $C$  (nie jest on parametrem znalezionym w drodze dopasowania chociaż dla takiego wyboru dopasowanie przewidywań wzoru (2.27) do danych empirycznych było najlepsze); jest to 3559 punkt empiryczny WIGu licząc od jego pierwszego no-



Rysunek 2.8: Zależność  $t_c$  od długości szeregu czasowego dla lewego zbocza piku  $C$  (rozrzut punktów określa zarazem szacunkowo ich błąd). Z dopasowania otrzymano, że parametr kierunkowy prostej wynosi  $a = 1.04 \pm 0.15$  a jej przesunięcie  $b = -25.34 \pm 0.15$ .

towania, czyli 24.04.2007). Jak widać, prawe zbocze piku  $C$  jest silnie oscylujące w porównaniu ze zboczem lewym, gdyż dodatkowo zawiera dudnienia, tzn. we wzorze (2.27) przyjął, że  $\Delta\omega \neq 0$ . Widać dobrą zgodność przewidywań teoretycznych z danymi empirycznymi, przy czym tutaj wykładnik kształtu  $\alpha = 1.562$  (czyli jest on większy od 1, w przeciwieństwie do analogicznego wykładnika związanego ze zboczem lewym, patrz odpowiednio tabela 2.10).

Dodajmy, iż w związku z tym, że wykładnik  $\alpha$  jest tutaj większy od 1 a mniejszy od 2, przemiana fazowa liczona wstecz w czasie a zachodząca w punkcie  $t_c^P$  (a ściślej rzecz biorąc, jej analogon) jest teraz rzędu drugiego czyli ma charakter ciągły. Zatem, można twierdzić, że różnica w dynamice obu zboczy piku  $C$  jest istotna a co za tym idzie odpowiedzialne za to mechanizmy mogą się od siebie różnić w sposób zasadniczy (np. może mieć miejsce jakieś przebudowanie sieci powiązań pomiędzy inwestorami prowadzące do różnych typów relaksacji - niestety, jak na razie nie jestem w stanie połączyć tego z określonymi wartościami wykładników kształtu).

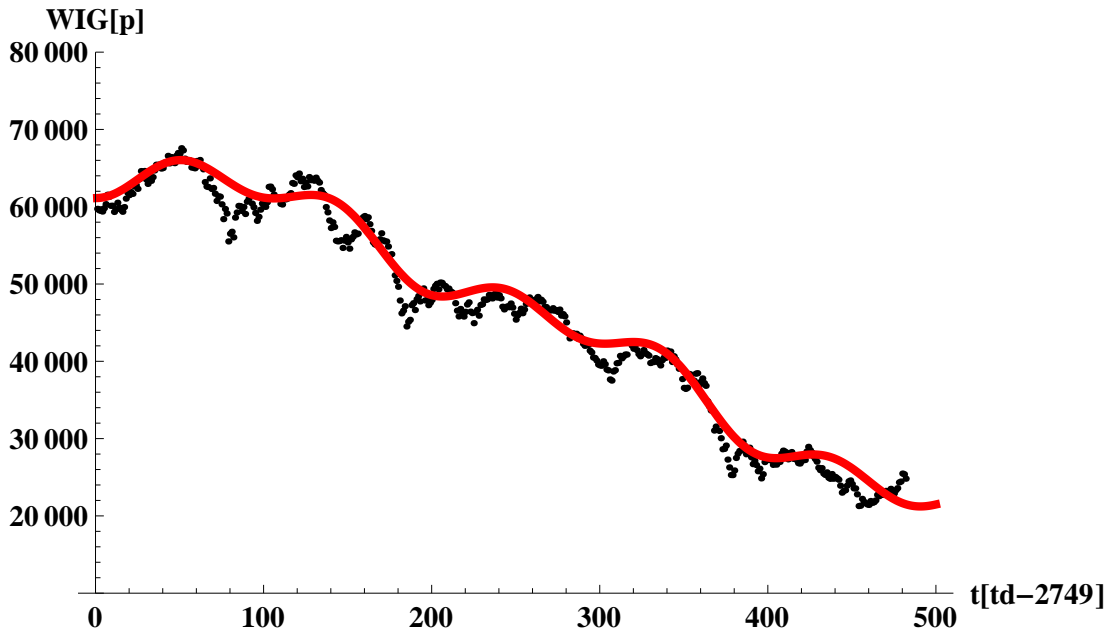


Rysunek 2.9: Zależność wielkości  $t_c - t_{MAX}$  od długości szeregu czasowego dla lewego zbocza piku  $C$ . Jak widać, rozrzut punktów wokół trendu horyzontalnego jest znaczny, uniemożliwiając tym samym wcześniejsze wyznaczenie ostatecznej wartości  $t_c$ .

### Oszacowanie *post factum* obszaru zmiany trendu

Na rys.2.11 zestawiałam pełne dopasowanie przewidywań wzoru (2.27) do danych empirycznych dotyczących całego piku  $C$  (czyli dopasowanie do obu zboczy piku). Ułatwia to przeprowadzenie uzupełniającego oszacowania typu *post factum*, pozwalającego na komplementarne zdefiniowanie obszaru, w którym znajduje się empiryczny punkt zwrotny trendu (czyli punkt  $t_{MAX}$  znaleziony np. dla lewego zbocza piku  $C$ , patrz paragraf pt.: "Długoterminowa hossa na WIGu" a tam tabela 2.9).

Zasadniczą obserwacją w tym przypadku, umożliwiającą przeprowadzenie tego oszacowania jest fakt, że istnieje obszar wspólny (nazwijmy go obszarem niepewności) biorący udział w dopasowaniach obu zboczy piku. Obszar ten rozciąga się od empirycznego punktu numer 3559 ( $= 4073 - 515 + 1$ ) przyjętego za początek prawego zbocza piku  $C$  ( $t = t_c^P$ ), do punktu  $t_c^L (= 2750 + 892 - 1 = 3641$ ), stanowiącego teoretyczny koniec lewego zbocza piku, czyli 22.08.2007) zawierając 83 punkty. Zatem, wyznaczony w ten sposób obszar niepewności jest tutaj blisko dwukrotnie szerszy od obszaru skalowania (który zawiera 45 punktów, patrz paragraf pt.: "Długoterminowa hossa na WIGu" a tam tabela 2.9). **Właśnie istnienie obszaru niepewności**



Rysunek 2.10: Prawe zbocze lokalnego pików  $C$  (patrz także wykres na rys.1.5): ewolucja dziennych notowań giełdowych WIGu datowanych od 3559 dnia transakcyjnego (subiektywnie wybrany początek prawego zbocza pików  $C$  traktowany tutaj dla uproszczenia jako punkt 0) do 4073 sesji. Notowania te składają się z 515 punktów empirycznych o horyzoncie czasowym od 24.04.2007 do 18.05.2009. Krzywa ciągła (czerwona) dopasowana do tego zbocza została otrzymana ze wzoru (2.27) uwzględniającego także dudnienia ( $\Delta\omega \neq 0$ ). Wartości parametrów uzyskane z tego dopasowania wraz z ich błędami zamieszczone zostały w tabelach 2.12 i 2.13.

wokół maksimum pików jest kolejnym sposobem eliminacji (albo przynajmniej wyraźnego ograniczenia) możliwości arbitrażu przez giełdę.

Dodatkowo, na rys.2.11 zamieszczono krótkoterminową prognozę ekstrapolując nieco wykres teoretyczny poza zakres danych empirycznych. Jest to ogólny, prosty sposób uzyskiwania prognoz w ramach RMFDRF. Jak widać, **nie jest niestety przewidywane żadne spowolnienie tendencji spadkowej WIGu w trzecim kwartale tego roku.**

### 2.2.3 Duże błędy cząstkowe a brak arbitrażu - dalsze uwagi

Jak już to sygnalizowaliśmy wcześniej, chociaż uzyskane dopasowania przewidywanych wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla różnych pików mają zadowalającą dobroć ( $R^2 \approx 0.999$ ) a ponadto, prawie wszystkie istotne parametry modelu dopasowane są ze stosunkowo małym błędem, to istnieje przynajmniej jeden istotny

Tabela 2.12: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza piku  $C$  przedstawionego na rys.2.10 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = P$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9985$ .

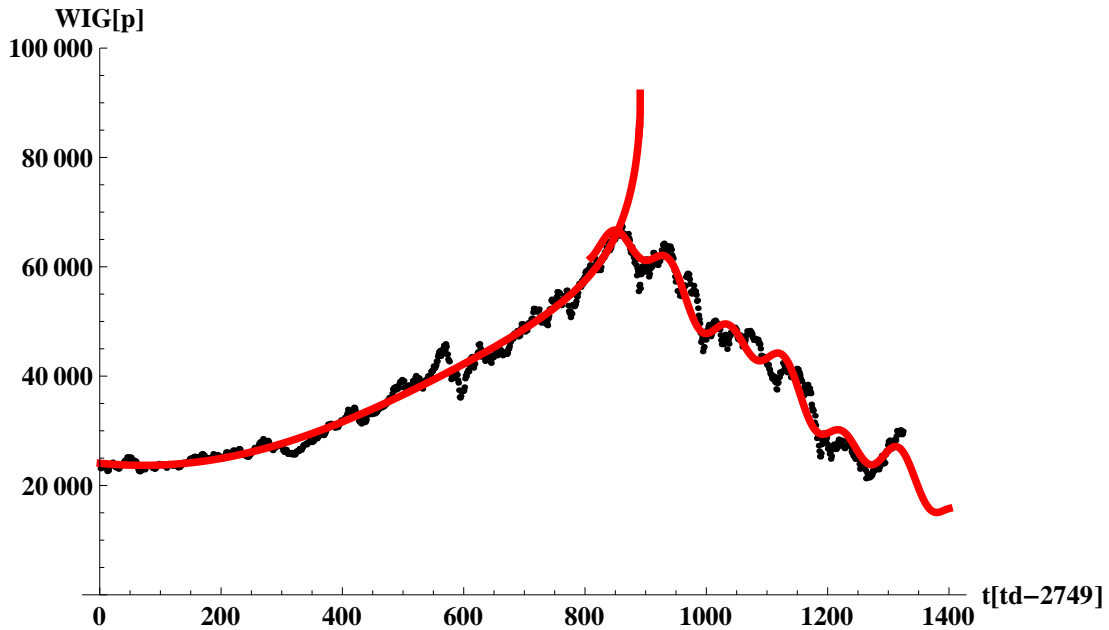
Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$\tau_1$	272 [td]	20 [td]
$\alpha$	1.562	0.025
$\omega$	0.0431 [td <sup>-1</sup> ]	0.0005 [td <sup>-1</sup> ]
$\Delta\omega$	0.0065 [td <sup>-1</sup> ]	0.0004 [td <sup>-1</sup> ]

Tabela 2.13: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza piku  $C$ , w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.10.

Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	41963	334
$X_1$	-2528	269

parametr modelu, który jest niepoznawalny (patrz tabele 2.10 i 2.11). W przeciwnym razie model pozwoliłyby uzyskać zysk bez ryzyka bowiem uzyskalibyśmy dla lewego zbocza piku  $C$  wartości parametrów np.  $t_c$  i  $t_{LOW}$  z zadowalającą dokładnością. Stąd, wiedzielibyśmy, że krach na giełdzie pojawi się nie później niż w chwili  $t_c$  i nie wcześniej niż w chwili  $t_{LOW}$ . Tym samym bylibyśmy w stanie określić bez ryzyka stosunkowo wąski przedział czasu, w którym z pewnością będzie miało miejsce odwrócenie trendu. Wychodząc chwilę wcześniej z giełdy osiągnęlibyśmy zysk z naszej inwestycji finansowej bez ryzyka. Właśnie **bardzo duży błąd przynajmniej jednego parametru istotnego dla zaistnienia arbitrażu uniemożliwia jego pojawienie się**. Zauważmy, że jest to jedna z możliwych dróg uniknięcia arbitrażu dla modelu typu deterministycznego - inną, zbliżoną przedstawiam w podrozdz.2.2.4. Zatem, rozważany w pracy model deterministyczny nie dopuszcza istnienia zjawiska arbitrażu, jak być powinno (co już było sugerowane przeze mnie wcześniej, patrz podrozdział 2.2.2).

Zaznaczmy, że bardzo duże błędy cząstkowe (niektórych) parametrów nie oznaczają jeszcze, na skutek występującego tutaj ich skorelowania (zarówno pozytywnego jak i negatywnego), bardzo dużego błędu wielkości sumarycznej  $X$ . Oczywiście, uwagi te dotyczą nie tylko indeksu WIG ale mają charakter ogólny (dotycząc także niektórych, analizowanych poniżej, indeksów giełdowych).

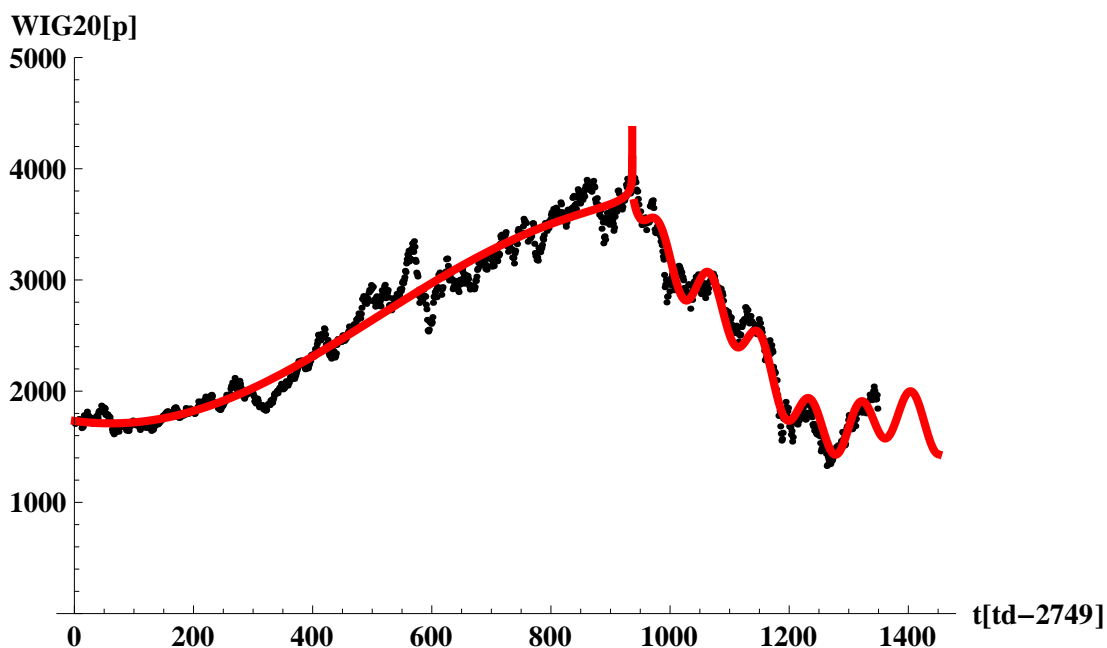


Rysunek 2.11: Lokalny pik  $C$  (patrz także wykres na rys.1.5) z naniesionymi dopasowaniami przedstawionymi na dwóch wcześniejszych rysunkach 2.5 i 2.10; co więcej, dopasowanie prawgo zbocza zostało ekstrapolowane, stanowiąc tym samym prognozę krótkoterminową.

## 2.2.4 Analiza ostatniego piku na WIG20

Na rys.2.12 przedstawiłam dopasowanie przewidywań wzoru (2.27) do danych empirycznych dotyczących ostatniego piku utworzonego z dziennych notowań na zamknięciu WIG20. Widać, że dopasowanie (zwłaszcza zbocza prawego) jest całkiem dobre. Zatem, należy przypuszczać, że względnie krótkie przedłużenie krzywej teoretycznej poza zakres danych empirycznych może stanowić wiarygodną, krótkoterminową (np. kwartalną) prognozę dynamiki tego indeksu. Jeżeli chodzi o lewe zbocze to uderzający jest fakt pojawienia się w przewidywaniu teoretycznym, nagłego, singularnego wzrostu (punktem osobliwym jest  $t = t_c^L = 937$ , patrz tabela 2.14, co odpowiada dacie 25.10.2007). Możliwość, takiego wzrostu jest zaskakująca dlatego, że zachodzi w przeciągu relatywnie bardzo krótkiego czasu. Odpowiedzialną za taki efekt mogłaby być w sytuacji realnej np. jakaś niezwykle istotna informacja typu egzogenicznego o powszechnym zasięgu.

Wspomniane powyżej dopasowanie ma jednak inny charakter niż dla WIG, co łatwo zauważyć porównując odpowiadające sobie parametry otrzymane z obu fitów (patrz tabele 2.10 i 2.14 oraz 2.12 i 2.16). Dodam, że teoretyczny lewy brzeg prawego zbocza czyli parametr  $t_c^P$  przyjąłam równy 940 (dzień sesji licząc od początku piku,



Rysunek 2.12: Ostatni, związany z aktualnie panującym kryzysem, pik WIG20 (zakres danych empirycznych: od sesji 2440 w dniu 09.02.2004 do sesji 3787 w dniu 22.06.2009, czyli obejmujący 1348 sesji) z naniesionymi dopasowaniami otrzymanymi ze wzoru (2.27). Zauważmy, że dopasowanie prawgo zbocza zostało nieco przedłużone dając prognozę krótkoterminową wskazującą na wyhamowanie tempa spadku indeksu.

Tabela 2.14: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbocza ostatniego piku WIG20 przedstawionego na rys.2.12 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = L$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9978$ .

Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$t_c$	937 [td]	1 [td]
$\tau_1$	9967 [td]	155981 [td]
$\alpha$	0.134	0.138
$\omega$	0.00361 [td <sup>-1</sup> ]	0.00003 [td <sup>-1</sup> ]

Tabela 2.15: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbocza ostatniego piku WIG20, w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.14.

Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	1957	977
$X_1$	-890	21

Tabela 2.16: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza ostatniego piku WIG20 przedstawionego na rys.2.12 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = P$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9970$ .

Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$t_c$	940 [td]	0 [td]
$\tau_1$	218 [td]	31 [td]
$\alpha$	0.861	0.018
$\omega$	0.0472 [td <sup>-1</sup> ]	0.0001 [td <sup>-1</sup> ]
$\Delta\omega$	0.0269	0.0001

Tabela 2.17: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza ostatniego piku WIG20, w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.16.

Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	3145	49
$X_1$	-421	19

co odpowiada dacie 29.10.2007, gdyż dawało to najlepsze dopasowanie).

Porównanie to pozwala stwierdzić, że (podobnie jak dla WIGu) jeżeli nawet jeden z istotnych parametrów (w tym przypadku  $t_c$ ) został wyznaczony z dużą dokładnością to inny istotny parametr może być nawet niepoznawalny (co oznacza, przypomnijmy, że jego błąd dopasowania przewyższa samą wartość; chodzi tutaj o czas relaksacji  $\tau_1$ ). Sugeruje to **istnienie zasady nieoznaczoności parametrów modelu**, którą możnaby traktować jako finansowy (luźny) analogon zasady nieoznaczoności Heisenberga w fizyce kwantowej. Wynika z tego, że pomiędzy (przynajmniej niektórymi istotnymi) parametrami modelu powinna istnieć negatywna korelacja, co potwierdza jawna postać macierzy korelacji jaką uzyskuje się ze wspomnianego dopasowania. W taki sposób może przejawiać się dążenie giełdy do uniemożliwienia zaistnienia arbitrażu. Oczywiście, rodzi to pytanie natury ogólnej (na które nie podejmuję się odpowiedzieć w niniejszej rozprawie) o poznawalność rzeczywistości giełdowej i transparentność mechanizmów jakie nią rządzą.

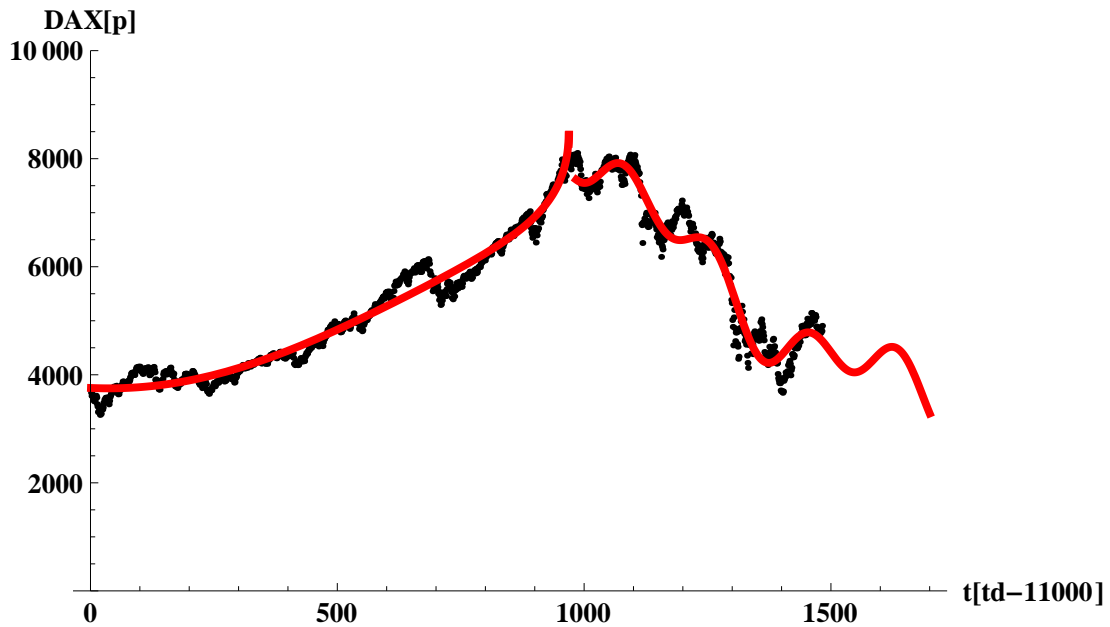
Zwróćmy jeszcze uwagę na szczególny kształt krzywej teoretycznej opisującej lewe zbrocze piku (patrz rys.2.12). Jej łagodne wznoszenie kończy się nieoczekiwanym, nagłym wzrostem. Tego typu zachowanie indeksu jest szczególnie niebezpieczne dla inwestorów giełdowych, gdyż nie pozostawia im czasu na przygotowanie się. Może ono być wynikiem nagłego wzrostu aktywności pojedynczego, wiodącego inwestora giełdowego. Tego rodzaju przebieg krzywej budzi także refleksję natury ogólniejszej a mianowicie, **teoretycznie rzecz biorąc możliwe są krachy giełdowe bez jakiegokolwiek wcześniejszego ostrzeżenia**.

## 2.2.5 Analiza ostatniego piku DAX

Na rys.2.13 przedstawiłam dopasowanie przewidywań wzoru (2.27) do danych empirycznych, przykładowo, dla ostatniego piku indeksu DAX, czyli zakresu danych empirycznych od sesji 11001 z dnia 04.09.2003 do sesji 12482 w dniu 01.07.2009 obejmującego 1482 sesje. Przy czym, lewe zbrocze obejmuje zakres 04.09.2003 - 13.07.2007 (czyli 985 sesji) a prawe 12.07.2007 - 01.07.2009 (czyli od 984 do 1482 sesji). Dodam, że  $t_c^P$  przyjąłam równe  $t_c^L - 1 = 968$  sesji licząc od początku piku, gdyż dawało to najlepsze dopasowanie, tzn.  $t_c^L$  i  $t_c^P$  są niemal równe (podobna sytuacja ma miejsce dla WIG20, chociaż tam  $t_c^P = t_c^L + 3$ ).

Jak widać, dopasowanie jest zadowalające zwłaszcza dla zbrocza lewego (patrz także tabele 2.18 i 2.19 oraz 2.20 i 2.21). Dla obu zbroczy odstępstwa od przewidywań teorii można traktować jak rozrzut o charakterze statystycznym - rozrzutem tym nie zajmuję się w niniejszej pracy.

Warto zwrócić uwagę na istotne podobieństwo pomiędzy ostatnimi pikami na indeksach DAX i WIG. Mianowicie, lewe zbrocza obu pików należą do tej samej



Rysunek 2.13: Ostatni, związany z aktualnie panującym kryzysem, pik indeksu DAX (czarne punkty) z naniesionymi dopasowaniami (linie czerwone) otrzymanymi ze wzoru (2.27). Zauważmy, że dopasowanie prawgo zbocza zostało nieco przedłużone stanowiąc tym samym szacunkową, krótkoterminową prognozę.

Tabela 2.18: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbocza ostatniego piku DAXa przedstawionego na rys.2.13 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = L$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9985$ .

Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$t_c$	969 [td]	1 [td]
$\tau_1$	426 [td]	391 [td]
$\alpha$	0.52	0.03
$\omega$	0.00362 [td <sup>-1</sup> ]	0.00004 [td <sup>-1</sup> ]

Tabela 2.19: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbocza ostatniego piku DAXa, w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.18.

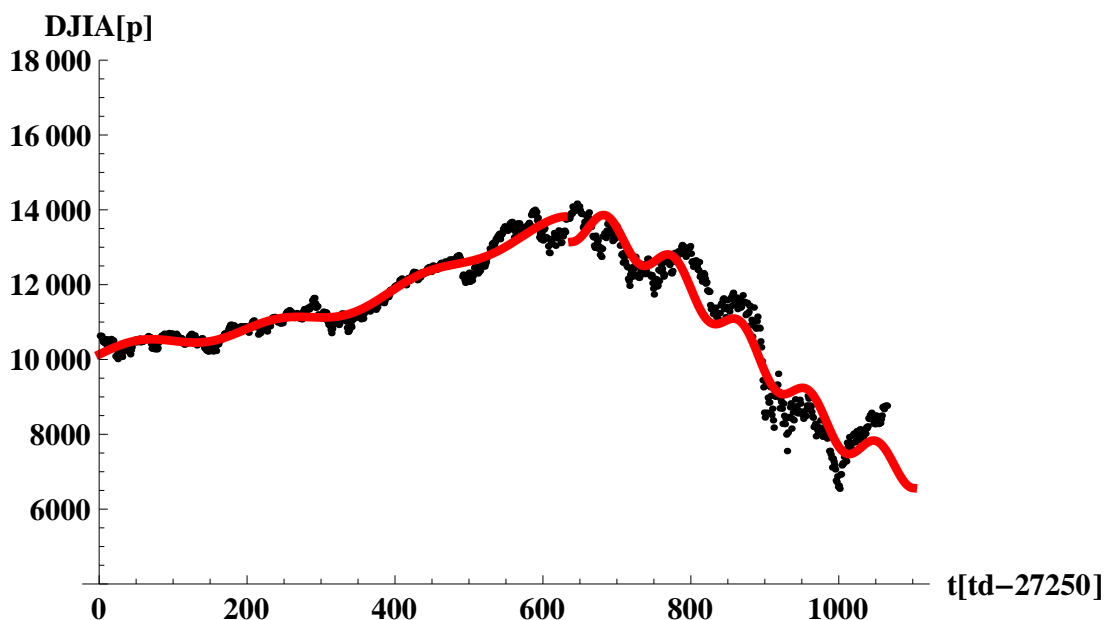
Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	4698	82
$X_1$	-763	35

Tabela 2.20: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza ostatniego piku DAXa przedstawionego na rys.2.13 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = P$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9977$ .

Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$\tau_1$	426 [td]	72 [td]
$\alpha$	1.12	0.03
$\omega$	0.0089 [td <sup>-1</sup> ]	0.0001 [td <sup>-1</sup> ]
$\Delta\omega$	0.0246 [td <sup>-1</sup> ]	0.0001 [td <sup>-1</sup> ]

Tabela 2.21: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza ostatniego piku DAXa, w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.20.

Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	5464	70
$X_1$	-847	36



Rysunek 2.14: Ostatni, związany z aktualnie panującym kryzysem, pik DJIA (czarne punkty) z naniesionymi dopasowaniami (linie czerwone) otrzymanymi ze wzoru (2.27). Zauważmy, że dopasowanie prawgo zbocza zostało nieco przedłużone stanowiąc tym samym szacunkową, krótkoterminową prognozę.

klasy uniwersalności, gdyż (z dokładnością do błędów dopasowań) ich wykładniki kształtu są sobie równe (patrz tabele 2.10 i 2.18). Oznaczać to mogło silne powiązanie obu giełd w trakcie trwania ostatniej hossy. Ponadto, oba wykładniki kształtu dla prawych zboczy są większe od 1 a mniejsze od 2, co wskazuje na analogon przemiany fazowej (wstecz w czasie) tego samego, drugiego rodzaju.

## 2.2.6 Analiza ostatniego piku DJIA

Na rys.2.14 przedstawiłam dopasowanie przewidywań wzoru (2.27) do danych empirycznych, przykładowo, dla ostatniego piku indeksu DJIA, czyli zakresu danych empirycznych od sesji 27251 z dnia 16.03.2005 do sesji 28315 w dniu 09.06.2009 (obejmując 1065 sesji). Jak widać, dopasowanie jest zadawalające (zwłaszcza dla zbocza prawego), przy czym w otoczeniu maksimum piku prognozowany trend (linia czerwona) jest nieciągły. Nieciągłość trendu nie jest niczym zaskakującym, zwłaszcza w świetle powszechnie stosowanej MF-DFA (ang. *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis*), gdzie tego typu zachowanie trendu jest przecież jej charakterystyczną cechą. Wspomniana nieciągłość może być rezultatem dużych fluktuacji, jakie mają miejsce w najbliższym otoczeniu maksimum piku. Z kolei fluktuacje te mogą wyni-

Tabela 2.22: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbocza ostatniego piku DJIA przedstawionego na rys.2.14 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = L$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9996$ .

Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$t_c$	627 [td]	3 [td]
$\tau_1$	333 [td]	38 [td]
$\alpha$	1.29	0.02
$\omega$	0.0107 [td <sup>-1</sup> ]	0.0002 [td <sup>-1</sup> ]
$\Delta\omega$	0.0220 [td <sup>-1</sup> ]	0.0002 [td <sup>-1</sup> ]

Tabela 2.23: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbocza ostatniego piku DJIA, w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.22.

Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	3486	40
$X_1$	-332	28

kać ze znacznej niepewności inwestorów co do oceny sytuacji w jakiej znajduje się rynek. Wydaje się, że właśnie ta niepewność skutkuje brakiem singularności stopy wzrostu na jednostkę czasu w punkcie odwrócenia trendu, zarówno dla lewego jak i prawego zbocza (gdyż w obu przypadkach  $\alpha > 1$ , patrz tabele 2.22 i 2.24). Singularne jest dopiero tempo stopy wzrostu (gdyż  $\alpha < 2$ ). Dodajmy, że rozważane fluktuacje stanowią tutaj jedyną "obronę" lewego zbocza giełdy przed pojawieniem się na nim arbitrażu, gdyż wszystkie parametry uzyskane z dopasowania obarczone są stosunkowo niewielkim błędem w przeciwieństwie do zbocza prawego, gdzie czas relaksacji jest parametrem niepoznawalnym (patrz tabele 2.22 i 2.24). Dodam, że teoretyczny lewy brzeg prawego zbocza, czyli parametr  $t_c^P$ , przyjąłam równy 640 dzień sesji licząc od początku piku, co odpowiada dacie 01.10.2007.

Uzyskane wyniki pozwalają na sformułowanie ważnej hipotezy roboczej a mianowicie, **krach wyższego rzędu jaki ma miejsce na giełdach światowych przenosi się na giełdy regionalne w postaci wzmocnionej, czyli krachu niższego rzędu**. Stąd wynika, że giełdy mniejsze charakteryzują się mniejszą wartością wykładników kształtu tzn. łatwiej jest na nich zaobserwować przemianę fazową, gdyż jest ona niższego rzędu (porównaj wykładniki kształtu indeksów WIG i DJIA oraz WIG20 i S&P500). Innymi słowy, giełdy mniejsze łatwiej jest doprowadzić do stanu

Tabela 2.24: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza ostatniego piku DJIA przedstawionego na rys.2.14 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = L$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9971$ .

Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$\tau_1$	165 [td]	191 [td]
$\alpha$	1.938	0.575
$\omega$	0.030 [td <sup>-1</sup> ]	0.070 [td <sup>-1</sup> ]
$\Delta\omega$	0.040 [td <sup>-1</sup> ]	0.070 [td <sup>-1</sup> ]

Tabela 2.25: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza ostatniego piku DJIA, w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.24.

Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	4010	110
$X_1$	-866	81

krytycznego.

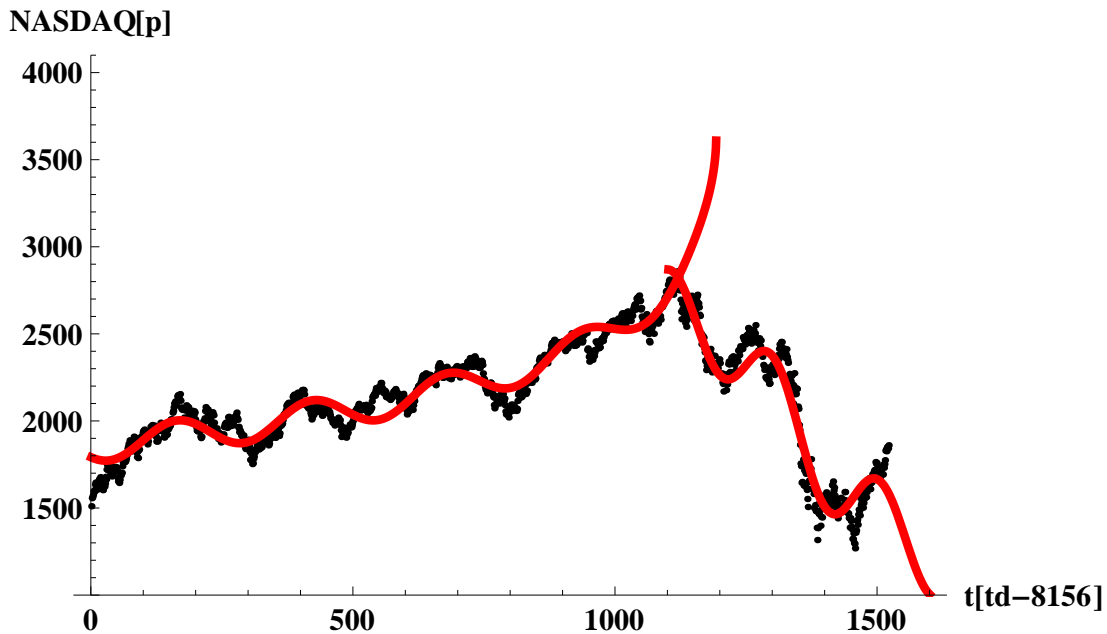
## 2.2.7 Analiza ostatniego piku indeksu NASDAQ

Na rys.2.15 przedstawiłam dopasowanie przewidywań wzoru (2.27) (czerwone linie ciągłe) do danych empirycznych (czarna krzywa) dotyczących ostatniego lokalnego piku indeksu NASDAQ obejmującego okres: 23.05.2003 (sesja nr 8157) - 09.06.2009 (sesja nr 9677), czyli 1521 sesji. Jak się wydaje, dopasowanie (zarówno dla zbocza lewego jak i prawego) jest zadowalające - otrzymane z dopasowania wartości parametrów dla obu zboczy zamieściłam odpowiednio w tabelach 2.26 i 2.27 oraz 2.28 i 2.29.

Parametr  $t_c^P$  dla prawego zbocza wynosi  $t_c^P = 1105$  i został przeze mnie wybrany tak jak poprzednio, aby dopasowanie (prawa czerwona krzywa zamieszczona na rys.2.15) było jak najlepsze.

Zauważmy, że  $t_c^L$  otrzymane z dopasowań dla lewych zboczy pików NASDAQ i WIG znacznie się od siebie różnią, przy czym  $t_c^L$  dla WIGu położone jest wcześniej niż dla NASDAQa. Oznacza to, że inwestorzy na Warszawskiej GPW wykazują większą awersję do ryzyka niż inwestorzy na giełdzie NASDAQ. Jest to zrozumiałe w świetle ogólnej sytuacji gospodarczej w jakiej znalazły się rynki wschodzące.

W przypadku tego piku obszar niepewności rozciąga się od 1105 punktu empi-



Rysunek 2.15: Dopasowanie przewidywań wzoru (2.27) do danych empirycznych dotyczących ostatniego lokalnego piku NASDAQ obejmującego okres: 23.05.2003 - 09.06.2009, składający się z 1521 punktów; lewe zbocze składa się z 1100 punktów kończąc się na dniu 05.10.2007. Położenie (teoretycznego) maksimum lewego zbocza  $t_c$  przypada na dzień 19.02.2008 co oznacza, że  $t_c^L = 1193$ . Natomiast prawe zbocze zaczyna się od dnia 11.10.2007, czyli od  $t_c^P = 1105$  punktu, składając się z 417 punktów empirycznych.

Tabela 2.26: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbocza piku NASDAQ przedstawionego na rys.2.15 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = L$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9987$ .

Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$t_c$	1193 [td]	4 [td]
$\tau_1$	298 [td]	541 [td]
$\alpha$	0.595	0.121
$\omega$	0.0131 [td <sup>-1</sup> ]	0.0003 [td <sup>-1</sup> ]
$\Delta\omega$	0.0113 [td <sup>-1</sup> ]	0.0003 [td <sup>-1</sup> ]

Tabela 2.27: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbocza ostatniego piku NASDAQ, w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.26.

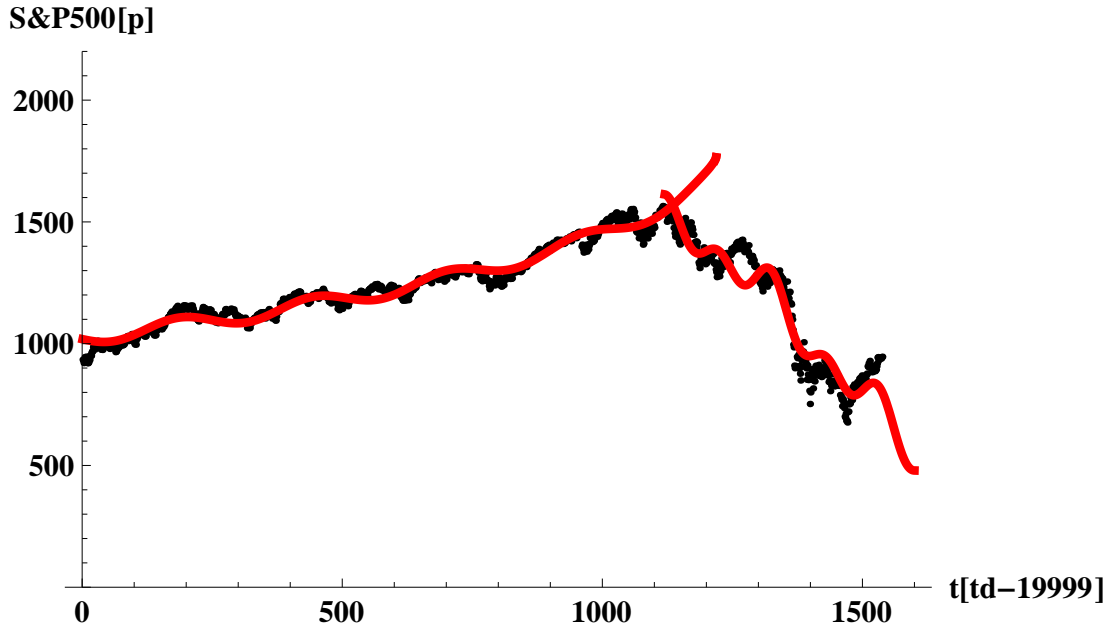
Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	1931	458
$X_1$	-181	7

Tabela 2.28: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza piku NASDAQ przedstawionego na rys.2.15 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = P$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9978$ .

Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$\tau_1$	282 [td]	3941 [td]
$\alpha$	2.29	6.32
$\omega$	0.020 [td <sup>-1</sup> ]	0.010 [td <sup>-1</sup> ]
$\Delta\omega$	0.012 [td <sup>-1</sup> ]	0.010 [td <sup>-1</sup> ]

Tabela 2.29: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza ostatniego piku NASDAQ, w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.28.

Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	1193	43
$X_1$	-440	32



Rysunek 2.16: Ostatni, związany z aktualnie panującym kryzysem, pik S&P500 (czarne punkty) z naniesionymi dopasowaniami (linie czerwone) otrzymanymi ze wzoru (2.27). Zauważmy, że dopasowanie prawego zbocza zostało nieco przedłużone, stanowiąc tym samym propozycję krótkoterminowej (np. kwartalnej) prognozy.

rycznego (czyli od dnia 11.10.2007) do punktu 1193 (tzn. do dnia 19.02.2008, czyli od punktu  $t_c^P$  dla prawego zbocza tego piku do punktu  $t_c^L$  dla jego lewego zbocza gdyż  $t_c^P < t_c^L$ ) zawierający 89 punktów, tzn. niemal takiej samej wielkości jak analogiczny obszar dla WIGu (patrz paragraf pt.: "Oszacowanie *post factum* obszaru zmiany trendu"). Ponadto, wyznaczyć można tutaj także obszar skalowania (przykładowy sposób jego wyznaczenia zaproponowałam w podrozdziale 2.2.2). Dodam, że  $t_{MAX} = 1118$  co odpowiada dacie 31.10.2007 r.

## 2.2.8 Analiza ostatniego piku S&P500

Dla kompletności, na rys.2.16 przedstawiłam dopasowanie przewidywań wzoru (2.27) (linie czerwone) do danych empirycznych (czarne punkty), dla ostatniego piku indeksu S&P500 rozciągającego się od sesji 20000 z dnia 07.05.2003 do sesji 21536 z dnia 12.06.2009. Dopasowanie to można uznać za zadowalające o ile rozbieżności potraktuje się jak rozrzut o charakterze fluktuacyjnym. Przy okazji, pragnę podkreślić, że tak właśnie traktuję wszelkie odstępstwa od (ostatecznych) linii ciągłych dopasowanych do empirycznych zboczy pików omawianych w pracy.

Tabela 2.30: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbocza ostatniego piku S&P500 przedstawionego na rys.2.16 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = L$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9994$ .

Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$t_c$	1219 [td]	4 [td]
$\tau_1$	1482 [td]	1681 [td]
$\alpha$	0.72	0.19
$\omega$	0.0114 [td <sup>-1</sup> ]	0.0007 [td <sup>-1</sup> ]
$\Delta\omega$	0.0129 [td <sup>-1</sup> ]	0.0007 [td <sup>-1</sup> ]

Tabela 2.31: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla lewego zbocza ostatniego piku S&P500, w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.30.

Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	1204	59
$X_1$	61	3

Tabela 2.32: Charakterystyczne parametry otrzymane z dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza ostatniego piku S&P500 przedstawionego na rys.2.16 (dla uproszczenia opuszczono indeks  $J = R$ ). Uzyskano dobroć fitu  $R^2 = 0.9996$ .

Parametr	Wartość	Odchylenie standardowe $\sigma$
$\tau_1$	323 [td]	51 [td]
$\alpha$	1.60	0.47
$\omega$	0.0146 [td <sup>-1</sup> ]	0.0003 [td <sup>-1</sup> ]
$\Delta\omega$	0.0461 [td <sup>-1</sup> ]	0.0003 [td <sup>-1</sup> ]

Tabela 2.33: Współczynniki kalibrujące otrzymane z tego samego dopasowania wyrażenia (2.27) do danych empirycznych dla prawego zbocza ostatniego piku S&P500, w którym otrzymano wartości parametrów przedstawione w tabeli 2.32.

Współczynnik kalibrujący	Wartość [p]	Odchylenie standardowe $\sigma$ [p]
$X_0 + X_1$	4010	110
$X_1$	-866	81

Dodam, że teoretyczny lewy brzeg prawego zbocza, czyli parametr  $t_c^P$ , przyjąłam równy 1120 (dzień sesji licząc od początku pików, co odpowiada dacie 17.10.2007). Ponadto, z danych empirycznych odczytałam, że  $t_{MAX} = 1115$  (licząc od początku pików, co

Podobnie jak poprzednio (patrz tabela 2.26 dotycząca zbocza lewego ostatniego pików indeksu NASDAQ), brak możliwości arbitrażu przejawia się w postaci (praktycznie rzecz biorąc) niepoznawalności parametru  $\tau_1$  dla zbocza lewego.

Podkreślmy, że we wszystkich przykładach rozważanych w niniejszej pracy (dotyczących giełd małych, średnich i dużych) dopasowanie przewidywań modelu do danych empirycznych jest dobre a odstępstwa można traktować po prostu jak fluktuacje.

### 2.2.9 Zestawienie własności omawianych pików

Celem rozważań prowadzonych w podrozdz.2.2 było dopasowanie przewidywań zasadniczej formuły (2.27) Reologicznego Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego do wybranych pików na indeksach małych, średnich i dużych giełd. Uzyskane dopasowania posiadają cechy, dzięki którym przewidywania tego deterministycznego modelu nie prowadzą do arbitrażu.

Tabela 2.34: Zestawienie wybranych dat związanych ze zmianą trendu

Indeks	$t_{MAX}$	$t_c^L$	$t_c^P$
WIG	06.07.2007	22.08.2007	24.04.2007
DAX	16.07.1007	21.06.2007	12.07.2007
DJIA	09.10.2007	12.09.2007	01.10.2007
S&P500	10.10.2007	11.03.2008	17.10.2007
WIG20	29.10.2007	25.10.2007	29.10.2007
NASDAQ	31.10.2007	19.02.2008	11.10.2007

1) Oba zbocza dla każdego pików mogą być rozważane jako niezależne a lokalizacja empirycznego punktu zwrotnego,  $t_{MAX}$ , ma charakter losowy. Jak wynika z tabeli 2.34, albo  $t_{MAX}$  lokuje się wewnątrz jednego z dwóch przedziałów

a)  $t_c^L \leq t_{MAX} \leq t_c^P$  (indeks WIG20, podrozdz.2.2.4), bądź

b)  $t_c^P \leq t_{MAX} \leq t_c^L$  (indeksy WIG, DJIA, NASDAQ, patrz odpowiednio podrozdz.2.2.2, 2.2.6 i 2.2.7),

albo też leży poza nimi,

- c) indeks DAX leży poza przedziałem  $[t_c^P, t_c^L]$  (patrz podrozdz.2.2.5) ale blisko jego prawego brzegu czyli  $t_c^L$  (tutaj  $t_c^P < t_c^L$ ),
- d) indeks DJIA leży poza przedziałem  $[t_c^L, t_c^P]$  (patrz podrozdz.2.2.6) ale blisko jego prawego brzegu czyli  $t_c^P$  (tutaj  $t_c^L < t_c^P$ ),
- e) indeks S&P500 leży poza przedziałem  $[t_c^P, t_c^L]$ , patrz podrozdz.2.2.8) ale blisko jego lewego brzegu czyli  $t_c^P$  (tutaj  $t_c^L > t_c^P$ ).
- 2) Lokalizacja maksimów  $t_c^L$  oraz  $t_c^P$  (patrz wyrażenie (2.27)) jest różna dla lewego i prawego zbocza każdego piku, przy czym dla zbocza lewego lokalizacja  $t_c^L$  jest obciążona relatywnie małym błędem; w konsekwencji, dzięki braku możliwości arbitrażu na giełdzie, czas relaksacji  $\tau_1$  jest niepoznawalny. Sugeruje to istnienie zasady nieoznaczoności na giełdzie (patrz podrozdz.2.2.4). Wyjątkiem jest DJIA, dla którego  $\tau_1$  ma także stosunkowo niewielki błąd dopasowania; brak arbitrażu wynika tutaj ze znacznych fluktuacji danych empirycznych w otoczeniu  $t_{MAX}$ .
- 3) Można zaobserwować własność przekrywania się (ang. *overlap*) obu zboczy w otoczeniu  $t_{MAX}$  (patrz rys.2.11 dotyczący indeksu WIG, podrozdz.2.2.2), Jak się wydaje, warunkiem pojawienia się takiego efektu może być sytuacja, w której przynajmniej jedno ze zboczy jest scharakteryzowane wykładnikiem kształtu  $\alpha > 1$  oraz  $t_c^L > t_c^P$ .
- 4) Daje się zauważyć nieciągłość trendu obu zboczy w okolicy  $t_{MAX}$  dla indeksów WIG20 oraz DJIA (patrz odpowiednio rysunki 2.12 i 2.14 zamieszczone w podrozdz.2.2.4 i 2.2.6). Pomimo, że nieciągłości te mają różny charakter to ich wspólną cechą jest, że  $t_c^L < t_c^P$ .
- 5) Zwraca uwagę szczególnie kształt krzywej teoretycznej opisującej lewe zbocze ostatniego piku na indeksie WIG20 (patrz rys.2.12). Jej łagodne wznoszenie kończy się nieoczekiwanym, nagłym wzrostem. Tego typu zachowanie indeksu jest szczególnie niebezpieczne dla inwestorów giełdowych. Może być ono interpretowane jako nagły wzrost aktywności pojedynczego, wiodącego inwestora giełdowego. Tego rodzaju przebieg krzywej budzi także refleksję natury ogólniejszej a mianowicie, możliwe są krachy giełdowe bez (praktycznie rzecz biorąc) jakiegokolwiek wcześniejszego ostrzeżenia.
- 6) Maksima pików są:
- zaokrąglone (a nie postaci pełnych ostrzy) co może wynikać z wpływu awersji do ryzyka inwestorów giełdowych a także z wpływu skończonych rozmiarów giełdy (kapitałowych i osobowych), bądź też

- poszarpane (fluktuujące), co może być innym przejawem braku możliwości arbitrażu na giełdzie uniemożliwiającym wiarygodne wyznaczenie momentu zmiany trendu,
- 7) Zmiana trendu może być traktowana jako analogon przemiany fazowej (gdzie czas jest odpowiednikiem temperatury) pierwszego albo drugiego rodzaju a nawet wyższych rzędów.
  - 8) Rozważane piki indeksu wykazują asymetrię, na przykład,
    - każde ze zboczy może być opisane inną funkcją daną wyrażeniem (1.7) albo (2.27)
    - każde ze zboczy może być opisane taką samą funkcją ale o różnych wartościach parametrów.
  - 9) Innym przejawem braku arbitrażu może być obserwowane bogactwo kształtów pików zwłaszcza w otoczeniu  $t_{MAX}$ .
  - 10) Ze stosunkowo niewielkim błędem dają się wyznaczyć parametry nieistotne z punktu widzenia zysku inwestorów natomiast w przypadku parametrów istotnych przynajmniej jeden z nich obarczony jest na tyle dużym błędem dopasowania, że uniemożliwia to uzyskanie zysku bez ryzyka.
  - 11) Ostatni pik na indeksie WIG wykazuje znacznie większe podobieństwo do analogicznego piku na indeksie DAX niż DJIA. Ogólniej mówiąc, Warszawska GPW jest bardziej podobna do giełd średniej wielkości niż do giełd dużych.
  - 12) Jak widać, żadne z prawych zboczy pików przedstawionych na powyższych rysunkach nie wykazuje spowolnienia spadku za wyjątkiem indeksu WIG20.
  - 13) Możliwe jest budowanie orientacyjnej, krótkoterminowej (np. kwartalnej) prognozy (wraz z określeniem jej błędu) na drodze ekstrapolacji przewidywanych formuły (2.27) dopasowanej do historycznych danych empirycznych dla prawych zboczy pików (patrz rys.2.11, 2.12, 2.14, 2.15 i 2.16 zamieszczone w podrozdz.2.2).
  - 14) Rozrzut danych empirycznych wokół teoretycznego trendu obu zboczy wszystkich analizowanych w pracy pików pozwala na jego statystyczną analizę (nie jest ona już przedmiotem zainteresowania w niniejszej pracy).



**Część III**  
**Zakończenie**



## Rozdział 3

# Ogólne wnioski i podsumowanie

W niniejszej pracy wprowadziłam w oryginalny sposób unikalny, deterministyczny Reologiczny Model Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego<sup>1</sup> o charakterze fenomenologicznym. Bazuje on na fraktalnym, liniowym, niejednorodnym równaniu ewolucji (czyli równaniu zawierającym pamięć). W pracy wskazałam, że RMFDRF stanowi zreinterpretowane uogólnienie, kluczowego dla tradycyjnej reologii, Standardowego Modelu Zenera, czyli Modelu Zenera Ciała Stałego (Plastycznego).

Jeżeli chodzi o rozważania na poziomie mikroskopowym to w pracy wskazano jedynie na taką możliwość zauważając, za Glöckle i Nonnenmacherem oraz Schiesselem, Friedrichem i Blumenem, że konstytutywne równanie modelu można wywieść bazując na hierarchicznych sieciach inwestorów (reprezentowanych przez sprężyny i amortyzatory) - przykładową taką sieć (tzw. drabinę) przedstawiono w Dodatku C.2.1 (patrz rys.C.3). Sieć ta ma interesującą własność, która polega na tym, że stan euforii sąsiedniego inwestora oddziałuje bezpośrednio zarówno na stan euforii danego jak też na jego stan awersji do ryzyka. Jednakże, w pracy nie rozwijałam już dalej tego intrygującego podejścia m.in. ze względu na brak dostępnych danych empirycznych.

Z drugiej strony, uogólnienie Standardowego Modelu Zenera zostało, w ramach reologii, dokonane przez Glöckle i Nonnenmachera, którzy skonstruowali Model Fraktalnego Ciała Plastycznego - właśnie ten model jest formalnym odpowiednikiem RMFDRF. Model Glöckle i Nonnenmachera umożliwił opis i interpretację, znanych od wielu dekad, wyników eksperymentów dotyczących reologicznych właściwości biopolimerów lepkosprężystych, nie dających się wyjaśnić w ramach tradycyjnej reologii.

Reologiczny Model Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego stał się podstawą wprowadzenia przeze mnie Hipotezy Rynku Plastycznego, niesprzecznej (jak to wykazałam na drodze empirycznej) z Hipotezą Rynku Efektywnego, umożliwiając bez-

---

<sup>1</sup>Jest to oryginalna nazwa wprowadzona przeze mnie.

pośrednią analizę trendu dziennych danych empirycznych napływających z rynków finansowych. Jednakże, analiza ta dotyczy tylko dobrze wykształconych lokalnych (w czasie) pików, które obejmują zwykle znaczną część tych danych. Piki te związane są najczęściej z pękającymi bąblami (bańkami) giełdowymi, prowadząc do kryzysów i krachów a więc do zjawisk szczególnie ważnych zarówno z pragmatycznego jak i badawczego punktu widzenia.

Hipoteza Rynku Plastycznego, w przeciwieństwie do Hipotezy Rynku Kruche-  
go, pozwala wyobrażać sobie moment pojawienia się krachu jako chwilę (mówiąc językiem fizyki) zerwania rozciąganego materiału, który wcześniej przeszedł z stanu sprężystego do stanu plastyczności a tam do tzw. obszaru płynięcia materiału (czyli możliwości samoczynnego wydłużania się bez potrzeby zmiany naprężenia). Odpowiada to sytuacji pozytywnego sprzężenia zwrotnego na rynku finansowym (jest to najpopularniejszy efekt stadny zaobserwowany na giełdzie pojawiający się w sytuacji euforii inwestycyjnej graczy giełdowych niwelującej ich awersję do ryzyka), gdzie zmiana wartości indeksu (będąca odpowiednikiem zmiany wydłużenia) może zachodzić nawet wtedy gdy znika nadwyżka popytowo-podażowa (co odpowiada znikaniu naprężenia). Na giełdzie może to wynikać z faktu, że duże obroty mogą mieć miejsce nawet w stanie jej równowagi popytowo-podażowej (RMFDRF w sposób niejawny zależy od obrotów).

Konkretniej rzecz biorąc, rozwiązaniem wspomnianego powyżej fraktalnego równania ewolucji indeksu giełdowego jest wyrażenie (2.27). Właśnie z tego wyrażenia wynika bezpośrednio wniosek dotyczący Hipotezy Rynku Plastycznego mówiący, że nawet znikanie nadwyżki popytowo-podażowej (czyli przypadek równowagi popytowo-podażowej, która zachodzi gdy  $U^J(0) = 0$ ) nie ma wpływu na typ relaksacji układu opisany funkcją Mittag-Lefflera. Jest to zasadnicza własność wprowadzonej Hipotezy Rynku Plastycznego.

U podstaw Reologicznego Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego leży założenie mówiące, że zmiana indeksu na jednostkę czasu zależy nie tylko od różnicy pomiędzy podażą a popytem (na akcje tworzące ten indeks) ale także od wielkości obrotów tymi akcjami. Takie rozszerzenie (być może) najstarszego znanego w ekonomii postulatu<sup>2</sup> opisującego dynamikę rynku, dotyczy tylko obszaru (wspomnianych powyżej) dobrze wykształconych pików.

Podkreślmy, że Model Fraktalnego Ciała Plastycznego daje się wyrazić jako odpowiednia kombinacja hierarchicznych sieci pojedynczych elementów sprężystych (sprężynek spełniających prawo Hooke'a) oraz lepkich (umieszczonych w amortyzatorach i spełniających prawo Newtona dla ciał lepkich), przy czym ma miejsce niejednoznaczność polegająca na tym, że różne rodzaje sieci prowadzą do takiej samej

---

<sup>2</sup>Postulat ten mówi, że zmiana ceny towaru na jednostkę czasu jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy podażą a popytem na ten towar.

postaci równań dynamiki modelu. Tego typu niejednoznaczność (degeneracja) jest ważną cechą rynków finansowych - wspomniana na wstępie moja reinterpretacja i uogólnienie nie niszczy tej własności.

Dodajmy, że w ramach Reologicznego Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego inwestor giełdowy jest traktowany jak obiekt będący superpozycją dwóch stanów:

- emocjonalnego stanu euforii inwestycyjnej (analogon sprężynki) oraz
- stanu racjonalnego (analogon amortyzatora) reprezentującego awersję do ryzyka.

Połączenie inwestorów w odpowiednią hierarchiczną sieć prowadzi do dynamiki opisanej wspomnianym równaniem fraktalnej dynamiki RMFDRF.

W ramach tego modelu opisałam, przykładowo wybrane, ostatnie piki wiodących indeksów małej giełdy (Warszawskiej GPW) WIG i WIG20, średniej giełdy (Frankfurckiej GPW) DAX oraz dużych giełd (NYSE i NASDAQ) odpowiednio, indeksy DJIA i S&P500 oraz NASDAQ, związane z obecnie panującym światowym kryzysem gospodarczym. Rozważałam także niektóre wcześniejsze piki indeksu WIG opisując takie wybrane zbocza tych pików, do których nie dało się dopasować popularnej funkcji logarytmiczno-periodycznej. Pokazałam także, że rozwiązanie modelu można zastosować do rynku hipotecznego opisując dynamikę mediany cen transakcyjnych domów i parcel w Stanach Zjednoczonych. Generalnie rzecz biorąc, za pomocą superpozycji funkcji Mittag-Lefflera oraz funkcji oscylującej (wyrażającej w ogólności dudnienia) a będącej rozwiązaniem RMFDRF, opisałam zbocza pików posiadających następujące własności:

- wolnonarastające lub wolnoopadające "ogony" zboczy z dala od maksimum pików,
- gwałtownie narastające lub gwałtownie opadające części zboczy<sup>3</sup> w otoczeniu maksimum pików; te części charakteryzują się nie tylko rozbieżną szybkością ale także zależnym od czasu gwałtownym przyspieszeniem (opóźnieniem) oraz gwałtownym szarpnięciem<sup>4</sup>, które jest właśnie odpowiedzialne za wspomniane powyżej zerwanie materiału plastycznego,
- rozbieżności wyższych rzędów. Na przykład, rozbieżność drugiego rzędu jest scharakteryzowana wykładnikiem kształtu większym od 1 a mniejszym od 2.

---

<sup>3</sup>Przez gwałtownie narastające lub gwałtownie opadające wielkości rozumiem takie, których wartość absolutna pochodnej po czasie jest rozbieżna.

<sup>4</sup>Przez gwałtowne przyspieszenie (opóźnienie) lub szarpnięcie w danej chwili rozumiem przyspieszenie (opóźnienie) lub szarpnięcie rozbieżne w tej chwili.

W niniejszej pracy nie rozważam termodynamiki fraktalnego ciała plastycznego (co jest interesujące samo w sobie), a jedynie zwracam uwagę na wybrane analogie występujące pomiędzy opisem giełdy a formalizmem termodynamiki. Kluczowa jest tutaj odpowiedniość między stopą wzrostu liczoną na jednostkę czasu a współczynnikiem rozszerzalności liniowej (patrz tabela 2.2 w podrozdz.2.1.9). Potęgowa rozbieżność tych współczynników pozwala traktować dynamiczną przemianę fazową jako analogon przemiany fazowej pierwszego rodzaju materiału plastycznego. Przemiana taka została przeze mnie zaobserwowana (z dobrym przybliżeniem) na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych (patrz otoczenia maksimum lewych zboczy ostatnich pików indeksów WIG i WIG20, odpowiednio podrozdz.2.2.2 i 2.2.4), na Frankfurckiej GPW (patrz otoczenie maksimum lewego zbocza ostatniego piku DAXa, podrozdz.2.2.5) i na NYSE oraz na NASDAQu (także okolice maksimum lewych zboczy indeksów S&P500 i NASDAQ, patrz odpowiednio podrozdz.2.2.8 i 2.2.7). Właśnie odpowiedniość pomiędzy wspomnianymi współczynnikami usprawiedliwia używanie terminu "przemiana fazowa" w odniesieniu do giełdy. Dodam, że zaobserwowałam również przemianę fazową drugiego rodzaju na indeksie DJIA (gdzie wykładnik kształtu,  $\alpha$ , zarówno dla zbocza lewego jak i prawego dla ostatniego piku jest  $1 < \alpha < 2$ , patrz podrozdz.2.2.6) oraz na indeksie S&P500 (patrz otoczenie maksimum prawego zbocza ostatniego piku, podrozdz.2.2.8) a nawet trzeciego rodzaju na NASDAQu (patrz otoczenie maksimum prawego zbocza ostatniego piku, gdzie  $2 < \alpha < 3$ , podrozdz.2.2.7).

Zatem, w ramach RMFDRF można zdefiniować istnienie krachu na giełdzie rzędu  $n$ , jako takiego stanu giełdy, w którym  $n$ -ta pochodna indeksu jest rozbieżna. Tzn. model ten umożliwia dopasowanie wyrażenia (2.27) do lewego lub prawego zbocza piku, z wykładnikiem  $\alpha$  mniejszym lub większym od 1, przy czym  $n = 1 + Ent[\alpha]$ , gdzie operacja  $Ent[\alpha]$  oznacza wzięcie części całkowitej  $\alpha$ .

Zgodność Reologicznego Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego z Hipotezą Rynku Efektywnego tkwi w tym, że model ten, pomimo swojego deterministycznego (i niechaotycznego) charakteru, nie dopuszcza do powstania arbitrażu na giełdzie. Przejawia się to na wiele sposobów omawianych w podrozdz.2.2 (a zestawionych dodatkowo w podrozdz.2.2.9), z których najbardziej interesujący sprowadza się do (wprowadzonej przeze mnie) zasady nieoznaczoności istotnych parametrów modelu.

Na zakończenie dodajmy, że wydaje się możliwe ujęcie trzech szczególnie przydatnych rodzajów relaksacji:

- Mittag-Lefflera czy nawet uogólnionej Mittag-Lefflera (a w tym rozciągniętego eksponensa oraz potęgowej),
- logarytmiczno-periodycznej oraz

- opisywanej  $q$ -eksponensem Tsallisa

w ramach jednego równania fraktalnej relaksacji o współczynniku zespolonym. Zna-  
leżenie rozwiązania takiego równania byłoby nieocenionym wkładem w analizę ba-  
niek i krachów giełdowych, tworząc podstawę do zrozumienia mechanizmów, jakie  
nimi rządzi. Wydaje mi się, że Reologiczny Model Fraktalnej Dynamiki Rynku Fi-  
nansowego powinien zostać włączony do bazy modeli wykorzystywanych przez różne  
instytucje do prowadzenia analiz rynkowych a w tym przynajmniej prognoz krótko-  
terminowych (typu ekstrapolacyjnego).



# Część IV

## Dodatki



# Dodatek A

## Wybrane własności funkcji Mittag-Lefflera

W niniejszym dodatku szczegółowo omawiam niezbędne własności funkcji ML dla krótkich i długich czasów.

Funkcja Mittag-Lefflera jest szczególnym przypadkiem uogólnionej funkcji Mittag-Lefflera zdefiniowanej za pomocą  $H$ -funkcji Foxa zwanej także uogólnioną funkcją Mellina-Barnesa lub też uogólnioną  $G$ -funkcją Meijersa [46].

Często, dla  $0 < \alpha < 1$ , funkcję Mittag-Lefflera definiuje się za pomocą odwrotnej transformaty Laplace'a,

$$E_\alpha \left( \mp \left( \frac{y}{\tau} \right)^\alpha \right) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{u \pm \tau^{-\alpha} u^{1-\alpha}} \right], \quad (\text{A.1})$$

gdzie  $y = |t|$  natomiast  $u$  jest zmienną Laplace'a. Z powyższego otrzymuje się funkcję ML w postaci następującego szeregu

$$E_\alpha \left( \mp \left( \frac{y}{\tau} \right)^\alpha \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mp(y/\tau)^\alpha)^n}{\Gamma(1 + \alpha n)}, \quad (\text{A.2})$$

dzięki temu, że

- ma miejsce równość

$$\frac{1}{u \pm \tau^{-\alpha} u^{1-\alpha}} = \frac{1}{u} \frac{1}{1 \pm (\tau u)^{-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n \frac{1}{\tau^{\alpha n}} \frac{1}{u^{1+\alpha n}}, \quad |\tau u| > 1 \quad (\text{A.3})$$

- oraz zachodzi

$$\mathcal{L}[t^{\alpha n}] = \frac{\Gamma(1 + \alpha n)}{u^{1+\alpha n}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.4})$$

gdzie  $\mathcal{L}$  oznacza, jak zwykle, transformatę Laplace'a.

Zauważmy, że dla krótkich czasów, tzn. dla  $y \ll \tau$ , wyrażenie (A.2) przybiera, z dobrym przybliżeniem, postać rozciągniętego eksponensa

$$E_\alpha \left( \pm \left( \frac{y}{\tau} \right)^\alpha \right) \approx \exp \left( \pm \frac{(y/\tau)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right), \quad (\text{A.5})$$

przy czym czas relaksacji jest tutaj przeskalowany i wynosi  $\tau [\Gamma(1+\alpha)]^{1/\alpha}$  (a nie po prostu  $\tau$ ).

Dla czasów asymptotycznie długich tzn.  $y \gg \tau$  prawa strona wyrażenia (A.1) sprowadza się do postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{u \pm \tau^{-\alpha} u^{1-\alpha}} \right] &\approx \mathcal{L}^{-1} \left[ \pm \tau^\alpha \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{u^{1-\alpha}} \right] \approx \pm \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(y/\tau)^\alpha} \\ &\approx \pm \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(1+y/\tau)^\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

gdyż odpowiada to przypadkowi  $u \rightarrow 0$ .

Warto jeszcze zwrócić uwagę na dwa przypadki szczególne funkcji Mittag-Lefflera; mianowicie,

1) dla  $\alpha = 1$  z wyrażenia (A.2) otrzymujemy

$$E_1 \left( \mp \frac{y}{\tau} \right) = \exp \left( \mp \frac{y}{\tau} \right) \quad (\text{A.7})$$

2) oraz dla  $\alpha = 1/2$  z (A.2) otrzymuje się

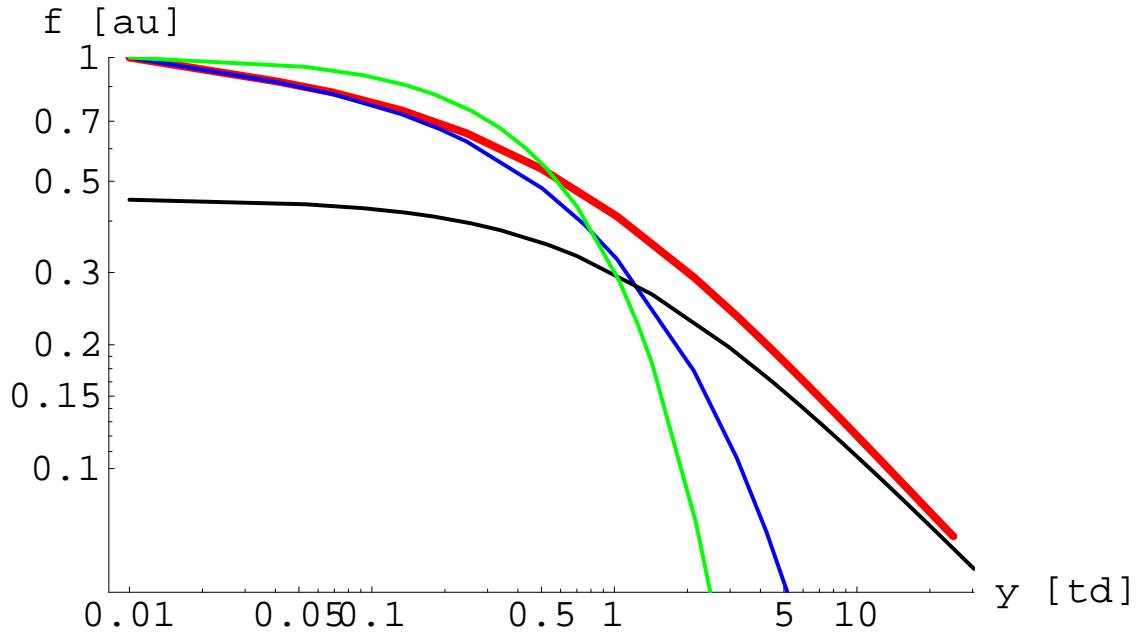
$$E_{1/2} \left( -\frac{y}{\tau} \right) = \exp \left( \frac{y}{\tau} \right) \operatorname{erfc} \left( \left( \frac{y}{\tau} \right)^{1/2} \right). \quad (\text{A.8})$$

Dla kompletności przedstawiam jeszcze wykres (patrz rys.A.1) funkcji Mittag-Lefflera w skali log-log, przykładowo dla  $\alpha = 0.6$  oraz  $\tau = 1$ . Wykres ten ilustruje po prostu fakt, że funkcja ML jest (dla  $0 < \alpha < 1$ ) rozpięta pomiędzy funkcją rozciągnięty eksponens a funkcją daną prawem Nuttinga.

Przykładowe zastosowanie funkcji Mittag-Lefflera do opisu realnej sytuacji fizycznej przedstawia rys.A.2 [75]. Na rysunku tym zamieszczono wyniki rzeczywistego doświadczenia dotyczącego relaksacji naprężenia  $\sigma$  w podłużnym biopolimerze (biopolimerem było tutaj ciasto mączne a naprężenie mierzono po prostu dynamometrem) przy ustalonym wydłużeniu dla dwóch różnych wartości tego wydłużenia. Jak widać funkcja Mittag-Lefflera bardzo dobrze opisuje tę relaksację.

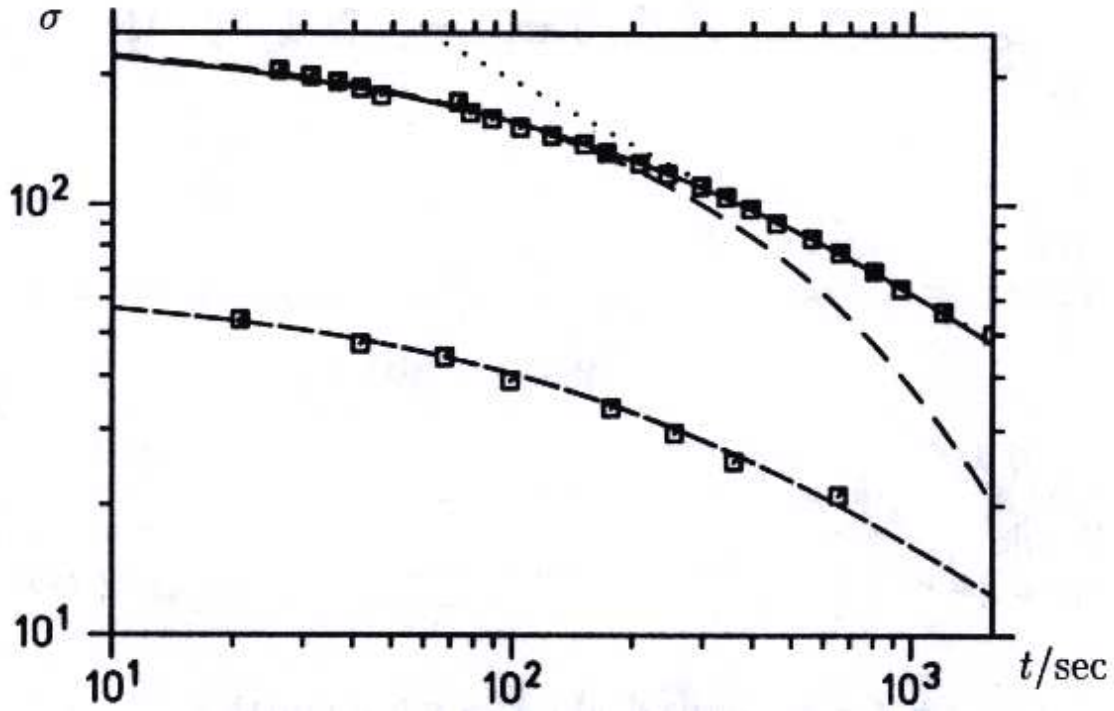
Warto zdawać sobie sprawę, że funkcja Mittag-Lefflera jest szczególnym przypadkiem tzw. uogólnionej funkcji Mittag-Lefflera postaci

$$E_{\alpha,\beta} \left( \mp \left( \frac{y}{\tau} \right)^\alpha \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mp(y/\tau)^\alpha)^j}{\Gamma(\beta + \alpha j)}, \quad (\text{A.9})$$



Rysunek A.1: Porównanie przebiegu funkcji Mittag-Lefflera (danej wzorem (A.2), czerwona linia) z przebiegiem funkcji rozciągnięty eksponens (A.5) (niebieska linia), prawem Nuttinga danym ostatnim wyrażeniem w (A.6) (czarna linia) oraz z funkcją eksponens (zielona linia) (o tym samym czasie relaksacji co wspomniana funkcja rozciągnięty eksponens).

która dla  $\beta = 1$  staje się zwykłą funkcją Mittag-Lefflera (A.2).



Rysunek A.2: Wyniki realnego doświadczenia dotyczącego relaksacji naprężenia  $\sigma$  w bipolimerze przy ustalonym jego wydłużeniu. Jak widać funkcja Mittag-Lefflera (dana wzorem (A.2), górna linia ciągła i dolna lekko przerywana, na których układają się punkty doświadczalne (kwadraty)) dobrze opisuje tę relaksację. Dolne punkty doświadczalne uzyskano dla innej wartości wydłużenia. Górna linia przerywana (przylegająca do krzywej ML dla krótkich i pośrednich czasów) jest rozciągniętym eksponentem (patrz wzór (A.5)), natomiast dla długich czasów do krzywej ML przylega linia kropkowana dana w tym zakresie prawem Nuttinga (A.6). Rysunek zaczerpnięto z pracy [75].

# Dodatek B

## Logarytmiczna-periodyczność

Traktowanie rynków finansowych jako złożonych układów dynamicznych może być wykorzystywane do opisu zależnych od czasu zjawisk finansowych a w szczególności spekulacyjnych bąbli i krachów giełdowych ([18], [28]-[32], [51]-[56]). Analogia pomiędzy bąblami i krachami finansowymi z jednej strony a przemianami fazowymi w układach złożonych z drugiej była już dyskutowana ponad dekadę temu [28],[61] a sygnalizowana nawet znacznie wcześniej przez B. Mandelbrota [62]. Od tego czasu pojawiło się wiele prac dotyczących tej niezwykle istotnej tematyki [58]-[60] i [63]-[73]) (oraz odpowiednie odsyłacze literaturowe tamże), które posługiwały się właśnie formalizmami dotyczącymi przemian fazowych czy konkretniej mówiąc, stosujących formalizmy termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej oraz grupy renormalizacji do opisu zarówno dynamicznych jak też statycznych własności rynków finansowych.

Poniżej przedstawiam dwa różne sposoby traktowania złożoności w finansach:

- 1) pierwszy, oparty jest na liniowym równaniu relaksacji (patrz podrozdz.B.1), natomiast drugi
- 2) na równaniu dyskretnego skalowania (podrozdz.B.2),

przy czym na podkreślenie zasługuje fakt, że oba dostarczają identycznego rozwiązania w postaci funkcji potęgowej zsuperponowanej z oscylacjami logarytmiczno-periodycznymi.

### B.1 Logarytmiczno-periodyczne rozwiązanie liniowego równania relaksacji

Oznaczmy, jak zwykle, przez  $X(t)$  wartość jakiegoś indeksu giełdowego w chwili  $t$  poprzedzającej krach (bądź np. cenę jakiejś akcji w tej chwili) a  $y \stackrel{\text{def.}}{=} t_c - t$  niech

będzie czasem po jakim nastąpi krach<sup>1</sup> (oczywiście, chwila w jakiej następuje krach to  $t_c(> t)$ ). Zakładamy, że mamy do czynienia z krachem wtedy i tylko wtedy gdy,

- 1) istnieje taki przedział czasu  $y$  (nazwijmy go przedziałem skalowania), dla którego instrument finansowy  $X$  jest zależny od  $y$  a ponadto, w przedziale tym można zaobserwować bąbel giełdowy na tym instrumencie,
- 2) dla  $y \rightarrow y_-$  (przy czym znak "–" mówi, że dążenie do  $t_c$  zachodzi od strony czasu  $t < t_c$ , czyli  $y > 0$ ) prędkość  $dX(y)/dy$  jest rozbieżna potęgowo (w zmiennej  $y$ ), przy czym nie bierzemy tutaj pod uwagę ani oscylacji ani fluktuacji zmiennej  $X$ .

Zauważmy, że w ramach takiej definicji krachu nie jest wymagana rozbieżność wielkości  $X(y)$  w punkcie  $y = 0$ . Ponadto, powyższa definicja zakłada, że rozmiary rynku finansowego są nieskończone (sytuacja idealna); w rzeczywistości, wpływ jego skończonych rozmiarów (ang. *finite size effect*) uniemożliwia (maskuje) wspomnianą rozbieżność (np. poprzez "ścinanie" lub inaczej mówiąc, zaokrąglenie ostrza lokalnego piku).

Warunek drugi można zapisać w postaci następującego równania relaksacji:

$$\frac{dX(y)}{dy} \sim \frac{1}{y^\alpha}, \quad (\text{B.1})$$

tutaj wykładnik  $\alpha > 0$  może być traktowany jako wykładnik krytyczny wtedy  $y$  może być analogonem różnicy temperatur  $T_c - T$ , gdzie  $T_c$  jest temperaturą krytyczną (analogonem  $t_c$ ). W naszym przypadku (patrz równanie (1.3)) przyjmujemy, że  $X(y) \equiv \ln f(y)$ ,  $y \equiv |t|$ ,  $\alpha \equiv 1 - \alpha$ .

Powyższe równanie ma dwa jakościowo różne rozwiązania zależne od wartości wykładnika  $\alpha$ .

### Przypadek $\alpha \neq 1$

W tym przypadku otrzymujemy rozwiązanie postaci:

$$X(y) = A - B y^{1-\alpha}, \quad (\text{B.2})$$

z trzema swobodnymi parametrami: wykładnikiem kształtu  $\alpha$ , stałą addytywną  $A$  oraz multiplikatywną  $B$  (przy czym  $|B| = 1/\tau^{1-\alpha}$ , gdzie  $\tau$  definiuje jednostkę czasu tzn.  $A - X(y = \tau) = 1$ ). Rozwiązanie to jest

- 1) potęgowo rozbieżne w zerze tylko dla  $\alpha > 1$ ; wtedy po prostu  $A = X(y = \infty)$ .

---

<sup>1</sup>Niniejsze rozważania prowadzone są na przykładzie bąbla i krachu giełdowego tzn.  $t_c = t_{MAX}$ , patrz rozdz.1.7.

- 2) Dla  $\alpha < 1$  rozwiązanie to dla  $y \rightarrow 0$  zbiega do stałej addytywnej  $A = X(0)$ , wtedy  $B = X(0) - X(1)$ . Oczywiście, w tym przypadku rozbieżne są wszystkie pochodne  $X^{(m)}(y \rightarrow 0)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ .

Zauważmy, że parametr  $t_c$ , lokalizujący rozwiązanie (w  $t = t_c$ ), otrzymuje się poprzez dopasowanie rozwiązania do danych empirycznych w zmiennej  $t$  (a nie  $y$ ). Rozwiązanie tego typu zostało wykorzystane po raz pierwszy w roku 1996 przez D. Sornette [28, 29] do opisu trendu na rynkach finansowych.

### Przypadek marginalny $\alpha = 1$

Komplementarny punkt widzenia został przedstawiony przez Vandewalle'a i Ausloosa [58]. Przyjęli oni wykładnik  $\alpha = 1$ , co prowadzi do logarytmicznie (czyli wolno) rozbieżnego (dwuparametrowego) rozwiązania równania (B.1) postaci,

$$X(y) = A - B \ln(y), \quad (\text{B.3})$$

gdzie  $A = X(y = 1)$  oraz  $B = A - X(y = e)$ . Rozwiązanie to pozwoliło wyznaczyć w przybliżeniu moment krachu  $t_c$  z października 1987 roku [59]. Należy zaznaczyć, że zostało ono zastosowane nie do wyjściowego empirycznego sygnału  $\tilde{X}(t)$ , ale do zdetrendowanego wykładniczo,

$$\begin{aligned} X(y) &\stackrel{\text{def.}}{=} \tilde{X}(y) - C_{BG}(y), \\ C_{BG}(y) &\stackrel{\text{def.}}{=} D \exp(r y), \quad D > 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Część systematyczna sygnału (czyli  $C_{BG}(y)$ ), stanowiąca zależny od czasu trend tła, może być traktowana [58] jako naturalna ewolucja rynku bez euforycznych wzlotów, sterowana pozbawioną ryzyka roczną stopą procentową  $r (\ll 1)$ .

Okazuje się, że jest możliwe takie rozszerzenie równania relaksacji (B.1), którego rozwiązanie (łącznie w sobie cechy obu powyższych (B.2) oraz (B.3)) i mając jednocześnie skończoną wartość w punkcie przemiany  $t_c$ , wprowadziłoby oscylacje logarytmiczno-periodyczne.

### Sytuacja ogólniejsza

Badanie dynamiki rynków finansowych w różnych skalach czasowych potwierdza, że względna zmiana wartości indeksu  $\Delta X(y)/X(y)$  (czyli stopa zwrotu) powinna być niezmiennicza ze względu na wybór skali czasu (dokładniej rzecz biorąc, w szerokim zakresie tych skal), gdyż jest bezwymiarowa. Oznacza to, że stopę zwrotu można wyrazić jako funkcję (także bezwymiarowego) względnego horyzontu czasowego  $\Delta y/y$ , czyli

$$\frac{\Delta X(y)}{X(y)} = F\left(\frac{\Delta y}{y}\right), \quad (\text{B.5})$$

gdzie funkcja  $F$  może być (w ogólności) funkcją zespoloną rzeczywistego argumentu  $\Delta y/y$ ; oczywiście, do analizy danych empirycznych wykorzystuje się ostatecznie tylko część rzeczywistą rozwiązania tego równania.

Rozwijając prawą stronę równania (B.5) w szereg potęgowy w zerze względem zmiennej  $\Delta y/y$  i ograniczając się tylko do składnika liniowego otrzymujemy:

$$\frac{\Delta X(y)}{X(y)} \approx (\alpha + i\omega) \frac{\Delta y}{y}, \quad (\text{B.6})$$

gdzie  $\alpha$  i  $\omega$  są dodatnimi (rzeczywistymi) stałymi; przy wyprowadzeniu równania (B.6) skorzystałam z oczywistej własności mówiącej, że dla rynku finansowego  $F(0) = 0$  (tzn. w zerowym przedziale czasu nie jest możliwa żadna zmiana ceny). Stąd, przechodząc (formalnie) do infinitezymalnie małego horyzontu czasowego<sup>2</sup>, otrzymuję równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu postaci,

$$\frac{d \ln(X(y))}{dy} \approx (\alpha + i\omega) \frac{1}{y}, \quad (\text{B.7})$$

lub nieco ogólniej rzecz ujmując<sup>3</sup>

$$\frac{dX(y)}{d \ln(y)} \approx (\alpha + i\omega) X(y). \quad (\text{B.8})$$

Równanie (B.7) mówi, że stosunek względnej zmiany wartości indeksu lub ceny akcji do względnej zmiany czasu dzielącego aktualną sytuację od krachu jest niezależny od czasu (a w tym od wyboru skali czasu) a więc ma charakter samopowinowaty (w szczególności samopodobny). Jest to spójne z hipotezą, że w punkcie krachu  $t_c$  mamy do czynienia z przemianą fazową. Co więcej zauważmy, że prawa strona równania (B.8) może być traktowana jako pierwszy człon rozwinięcia Landaua<sup>4</sup> (patrz np. [29]).

Najogólniejsze rozwiązanie liniowego równania (B.7) lub (B.8) obejmujące oba rozważane wcześniej przypadki ( $\alpha \neq 1$  oraz  $\alpha = 1$ ) jest postaci,

$$X(y) = A - \left[ (1 - \delta_{\alpha,1}) B_1 \left( \frac{y}{y_0} \right)^\alpha + \delta_{\alpha,1} B_2 \ln \left( \frac{y}{y_0} \right) \right] \left[ 1 + C \cos \left( \omega \ln \left( \frac{y}{y_0} \right) + \varphi \right) \right], \quad (\text{B.9})$$

gdzie  $y_0$  jest jednostką określającą zmienną niezależną  $y$ , wielkości  $A, B_1, B_2, C, \varphi$  są stałymi, natomiast składnik

$$X(y) \sim \left( \frac{y}{y_0} \right)^\alpha \cos \left[ \omega \ln \left( \frac{y}{y_0} \right) + \varphi \right], \quad (\text{B.10})$$

<sup>2</sup>Przypominam, że przez horyzont czasowy rozumiem tutaj krok dyskretyzacji czasu  $\Delta y (= \Delta t)$ .

<sup>3</sup>Nieco ogólniejsze ujęcie polega tutaj na uwzględnieniu możliwości znikania funkcji  $X(y)$ .

<sup>4</sup>Drugi, nieliniowy człon byłby wtedy proporcjonalny do  $|p|^2$ , umożliwiając uwzględnienie efektów nieliniowych. Jednakże, w mojej pracy nie zajmuję się tego typu poprawkami.

będący jakimś szczególnym rozwiązaniem równania (B.7), jest czasami nazywany uogólnionym prawem potęgowym. Dokładniej rzecz biorąc, wyrażenia (B.9) i (B.10) są częściami rzeczywistymi rozwiązań równania (B.7).

## B.2 Logarytmiczno-periodyczne rozwiązanie równania skalowania

Alternatywny sposób uzyskania funkcji zawierającej uogólnione prawo potęgowe polega na rozwiązaniu (dyskretnego) równania skalowania (ang. *Discrete Scale Invariance*, DSI) [70] postaci

$$X(\lambda y) = h(|\lambda|)X(y), \quad (\text{B.11})$$

gdzie czynnik  $h$  skalujący funkcję  $X(y)$  jest zależny od  $\lambda$  a tutaj jest dany w postaci funkcji potęgowej

$$h(\lambda) = |\lambda|^\nu. \quad (\text{B.12})$$

Należy podkreślić, że równanie skalowania (B.11) ma charakter ogólny i opisuje zachowanie tak różnych substancji jak np. magnetyki, stopy podwójne czy też gaz i ciecz w obszarze przemiany fazowej w pobliżu punktu krytycznego (zwanym dla tego obszarem skalowania lub obszarem krytycznym; M. Toda, R. Kubo, N. Saito: *Fizyka statystyczna I. Mechanika statystyczna stanów równowagowych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1991, [71]). Jak uczy doświadczenie, w obszarze tym większość wielkości fizycznych (opisujących przemianę, oznaczymy je przez  $WF$ ) zmienia się w zależności od temperatury  $T$  według prawa potęgowego<sup>5</sup>

$$WF \sim |T - T_c|^\alpha, \quad (\text{B.13})$$

gdzie  $\alpha$  nosi nazwę indeksu lub wykładnika krytycznego, który przybiera wartości uniwersalne (tzn. niezależne od rodzaju substancji) a  $T_c$  jest temperaturą krytyczną (która np. w przypadku przemiany fazowej ferromagnetyk-paramagnetyk nosi dodatkowo nazwę temperatury Curie).

---

<sup>5</sup>Chodzi o to, że są też wielkości fizyczne takie jak np. ciepła właściwe, które mogą posiadać w punkcie krytycznym osobliwość logarytmiczną, np. tak jak to ma miejsce w dwuwymiarowym modelu Isinga; przemiany fazowe, w których to zachodzi nie poddają się w pełni klasyfikacji Ehrenfesta przemian fazowych (K. Huang: *Mechanika statystyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1978, [72]) chociaż pod wieloma względami (np. brak ciepła utajonego i ciągłości parametru porządku w funkcji temperatury) przypominają przemianę fazową drugiego rodzaju.

Zadajmy teraz pytanie o najogólniejszą postać rozwiązania singularnego równania skalowania (B.11). Łatwo sprawdzić, że funkcja postaci

$$X(y) = |y|^\alpha F\left(\frac{\ln |y|}{\ln |\lambda|}\right), \quad (\text{B.14})$$

jest rozwiązaniem tego równania - jak się okazuje najogólniejszym (co wykażemy w dalszej części), przy czym  $F(u)$  jest funkcją okresową argumentu  $u$  o okresie równym 1, natomiast wykładnik potęgi przybiera postać

$$\alpha = \frac{\ln h(\lambda)}{\ln |\lambda|}. \quad (\text{B.15})$$

Podstawiając konkretną postać funkcji  $h(\lambda)$  (tutaj daną wyrażeniem (B.12)) otrzymujemy, że  $\alpha = \nu$ .

Rozwiniemy teraz funkcję okresową  $F(u)$  w szereg Fouriera,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\ln |y|}{\ln |\lambda|}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(2\pi i n \cdot \frac{\ln |y|}{\ln |\lambda|}\right) \\ &= c_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{c_0} \cos\left(\frac{2\pi n}{\ln |\lambda|} \cdot \ln |y|\right)\right], \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

przy czym współczynniki rozwinięcia  $c_n$  są tutaj dane w postaci

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du F(u) \exp(-2\pi i n u) = \int_0^1 du F(u) \cos(2\pi n u), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{B.17})$$

gdzie dla uproszczenia założyliśmy, że  $F(u)$  jest parzystą funkcją  $u$  a stąd każdy współczynnik rozwinięcia fourierowskiego jest parzystą funkcją  $n$  (tzn.  $c_n = c_{-n}$ ) co zostało wykorzystane w drugiej równości w (B.16). Ponadto, ograniczamy się tutaj do rzeczywistej funkcji  $F$  co oznacza, że współczynniki  $c_n$  też są rzeczywiste<sup>6</sup>.

Stosując grupę renormalizacji można wykazać w sposób ogólny, że logarytmiczna-periodyczność jest obecna w singularnych rozwiązaniach dyskretnych równań skalowania typu (B.11) (D. Sornette, A. Johansen, J.-P. Bouchaud: *Stock Market Crashes, Precursors and Replicas*, J. Phys. I France 6 (1996) 167-175,[28]; D. Sornette and A. Johansen: *Large financial crashes*, Physica A 245 (1997) 411-422, [30]).

---

<sup>6</sup>Parametr  $\lambda$  skalujący zmienną losową  $y$  nie jest tutaj dowolny a określony poprzez (niewypisane tutaj jawnie) parametry definiujące funkcję  $X$  spełniającą równanie skalowania (B.11), zwane z tego powodu dyskretnym (D. Sornette: *Discrete scaling invariance and complex dimensions*, Physics Reports 297 (1998) 239-270, [70]).

## Graficzna wizualizacja

Na rys.B.1 przedstawiono notowania indeksu Dow Jones na Giełdzie Nowojorskiej (NYSE) obejmujące październik 1929 roku czyli okres wielkiego krachu na Wall Street - największego kryzysu giełdowego jaki dotknął świat, a w tym przede wszystkim Stany Zjednoczone Ameryki. O głębokości tego kryzysu świadczy fakt, że w feralnym tygodniu: (otwarcie) środa 23 październik - (zamknięcie) wtorek 29 październik, indeks NYSE stracił ok. 30% swojej wartości<sup>7</sup>. Ponadto, dla porównania przedstawiono najlepsze dopasowanie rozwiązania singularnego (B.14) uwzględniające jedynie liniową log-periodyczność (tzn. uwzględniającą w drugiej równości w (B.16), w występującym tam szeregu tylko pierwszy wyraz z  $n = 1$ ), przy czym jako zmienną niezależną przyjęto teraz<sup>8</sup>

$$y \stackrel{\text{def}}{=} a_0 |t_c - t|, \quad (\text{B.18})$$

gdzie  $t (< t_c)$  jest czasem (liczonym w dniach) natomiast  $t_c$  jest dniem krachu ( $a_0$  jest tutaj, po prostu, stałą proporcjonalności). Innymi słowy, wzięto tutaj pod uwagę następującą, uproszczoną formułę teoretyczną dla czasu poprzedzającego dzień krachu  $t_c$  (czyli dla  $t < t_c$ )<sup>9</sup>

$$X(t_c - t) \approx A + B |t_c - t|^\alpha \cdot [1 + C \cos(\omega \ln |t_c - t| - \phi)], \quad (\text{B.19})$$

gdzie zastosowano wygodniejsze oznaczenia  $B = c_0 \cdot a_0^\alpha$ ,  $C = 2c_1/c_0$ ,  $\omega = 2\pi/\ln|\lambda|$ ,  $\phi = -\omega \ln(a_0)$ .

Jak widać, krach ten nastąpił tuż przed trzecim, niewielkim lokalnym maksimum krzywej teoretycznej - nie jest to jednak bąbel giełdowy w przeciwieństwie do sytuacji przedstawionej na rys.B.2, gdzie jest on wyraźnie widoczny w przebiegu indeksu giełdy w Kuala Lumpur (Malezja) w postaci ostrego, lokalnego maksimum bezpośrednio poprzedzającego krach o zupełnie innym kształcie niż wspomniane wcześniej. Właśnie tego typu kształt będzie dla nas w dalszym ciągu niezbędną sygnaturą bąbla giełdowego; ogólna definicja tzw. racjonalnego bąbla giełdowego pochodzi od Blacharda i Watsona [77], [78] i mówi tylko tyle, że jest to wzrost notowań akcji zachodzący w relatywnie krótkim czasie (w stosunku do całego rozpatrywanego przedziału czasu), który znacznie odbiega od fundamentalnej wyceny akcji ale nadal

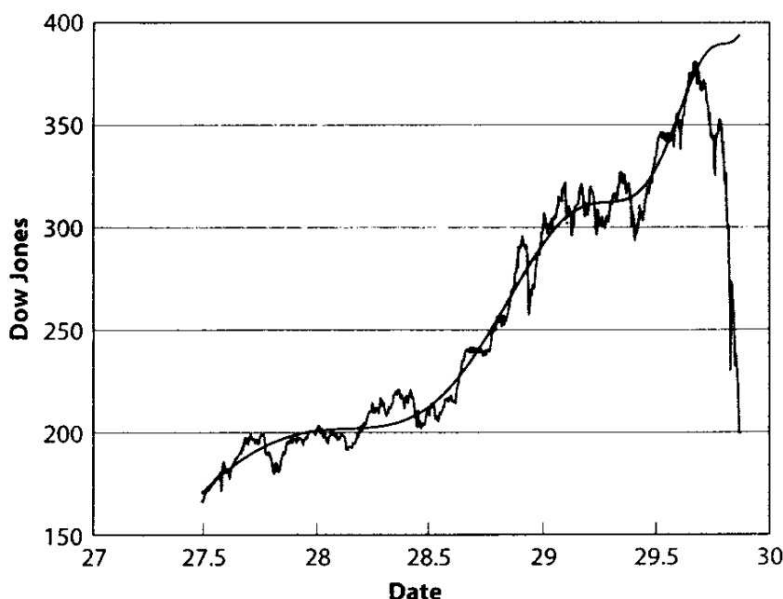
---

<sup>7</sup>Należy zaznaczyć, że podobny kryzys zdarzył się np. w październiku 1987 roku w tygodniu od 14 (otwarcie) do 19 października (zamknięcie); na szczęście jego skutki nie były już tak dramatyczne jak w roku 1929.

<sup>8</sup>Oznacza to, że rozważamy teraz dynamiczne przemiany fazowe, gdzie rolę temperatury pełni czas.

<sup>9</sup>Zauważmy, że data krachu uzyskana z dopasowania funkcji (B.19) do danych empirycznych może być nieznacznie większa od rzeczywistej, gdyż dalszemu spadkowi indeksów może po prostu przeciwdziałać wstrzymanie obrotów na giełdzie.

mieści się w oszacowaniach wynikających z istniejących modeli, w przeciwieństwie do bąbli czysto spekulacyjnych.



Rysunek B.1: Notowania indeksu Dow Jones na Giełdzie Nowojorskiej (NYSE) przed październikiem 1929 roku czyli przed wielkim krachem na Wall Street - największym kryzysem giełdowym jaki dotknął świat, a w tym także Stany Zjednoczone Ameryki, w XX wieku. Linia ciągłą oznaczono najlepsze dopasowanie rozwiązania singularnego (B.14) uwzględniające jedynie liniową log-periodyczność (tzn. uwzględniające w drugiej równości w (B.16) w występującym tam szeregu tylko wyraz z  $n = 1$ ). Optymalne wartości parametrów to:  $A = 571$ ,  $B = -267$ ,  $C = -0.0536$ ,  $\alpha = 0.45$ ,  $t_c = 1930.22$ ,  $\omega = 7.9$  oraz  $\phi = 1.0$ . Jak widać, krach nastąpił tuż przed trzecim lokalnym maksimum tej krzywej. (Rysunek zaczerpnięto z pracy A. Johansen, D. Sornette: *Critical Crashes*, Risk 12 (1990) 91-94, [31]).

Ze względu na olbrzymie znaczenie wyrażenia (B.19) w analizie technicznej (i nie tylko) notowań giełdowych, przedstawiamy na rysunkach B.3 i B.4 zarówno zależność  $X^{10}$  od czasu jak też jego składowych: potęgowej i log-periodycznej. Dodatkowo, zamieściłam dwa wykresy (rys.B.5 i B.6) prezentujące wkład drugiej harmonicznej log-periodycznej poprawki do wyrażenia

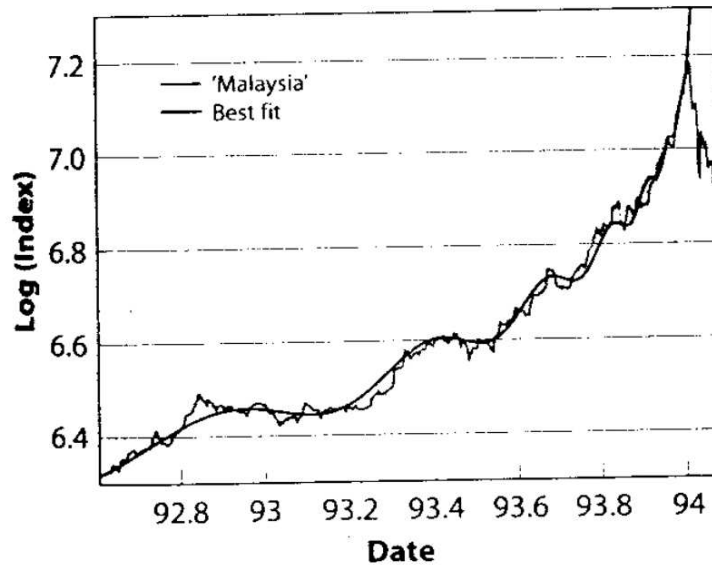
$$X(t_c - t) \approx A + B \cdot |t_c - t|^\alpha \times$$

<sup>10</sup>Wyjątkowo, na rys.B.3 oś pionową oznaczono tradycyjnie przez  $y$  - proszę nie mylić ze zmienną niezależną  $y$  daną wzorem (B.18).

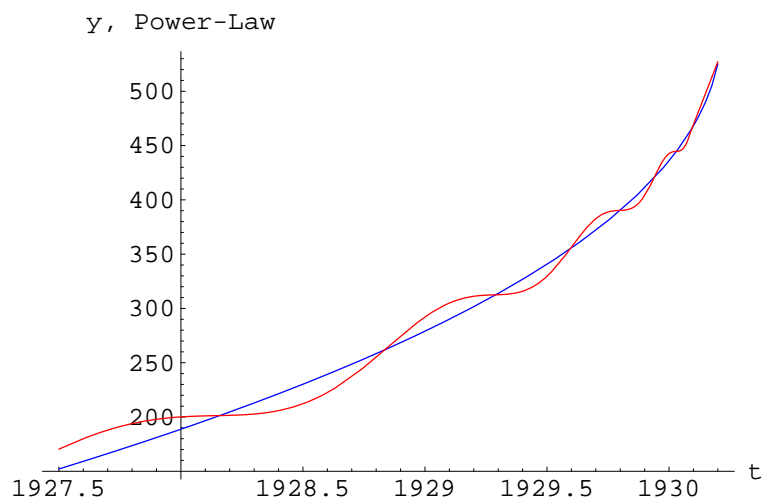
$$\times [1 + C \cos(\omega \ln |t_c - t| - \phi) + C' \cos(2\omega \ln |t_c - t| - 2\phi)]; \quad (\text{B.20})$$

jak widać, wzór (B.19) jest szczególnym przypadkiem powyższego wyrażenia.

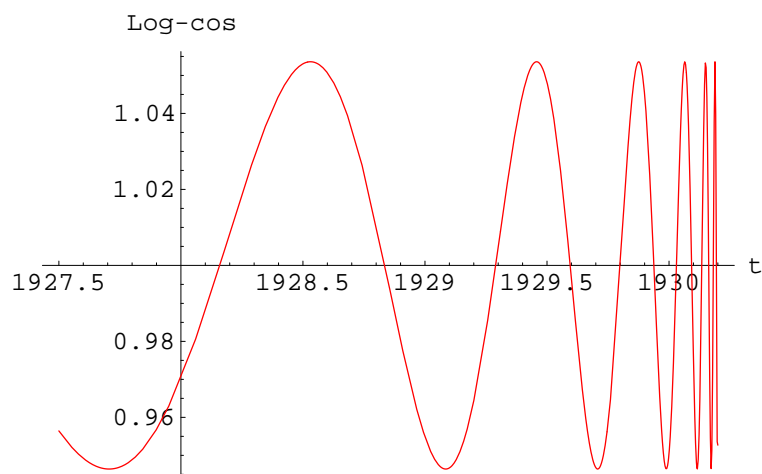
W niniejszej pracy prezentuję komplementarne podejście do opisu zjawisk krytycznych na rynkach finansowych. Jest to podejście oparte na analogii rynku finansowego do materiału plastycznego.



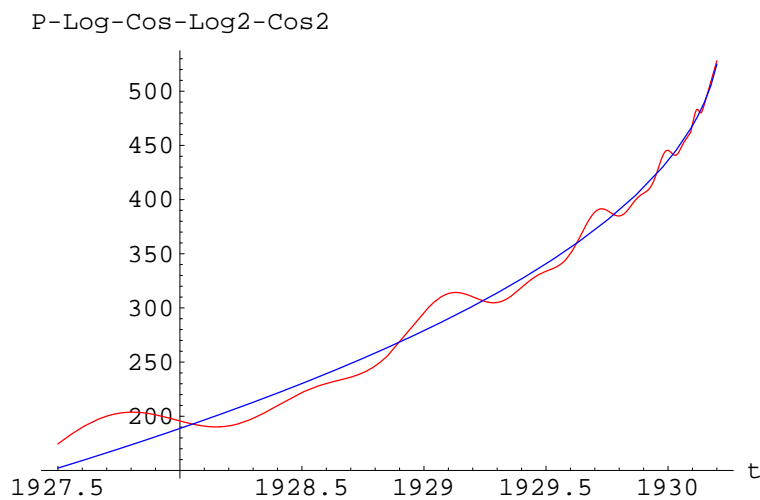
Rysunek B.2: Przebieg indeksu giełdy w Kuala Lumpur (Malezja) przed jej krachem w styczniu 1994 roku - największym kryzysem giełdowym jaki dotknął Azję w XX wieku. Linia ciągłą oznaczono najlepsze dopasowanie rozwiązania singularnego (B.14) uwzględniające jedynie liniową log-periodyczność (tzn. uwzględniające w drugiej równości w (B.16) w występującym tam szeregu tylko wyraz z  $n = 1$ ). Najważniejsze parametry tego dopasowania to:  $\alpha = 0.24$ ,  $t_c = 1994.02$  oraz  $\omega = 10.9$ . Jak widać, krach nastąpił tuż po ostrym lokalnym maksimum tej krzywej czyli był poprzedzony przez tzw. bąbel giełdowy. (Rysunek zaczerpnięto z pracy A. Johansen, D. Sornette: *Bubbles and anti-bubbles in Latin-American, Asian and Western stock markets: An empirical study*, International Journal of Theoretical and Applied Finance 4 (2001) 853-920, [53]).



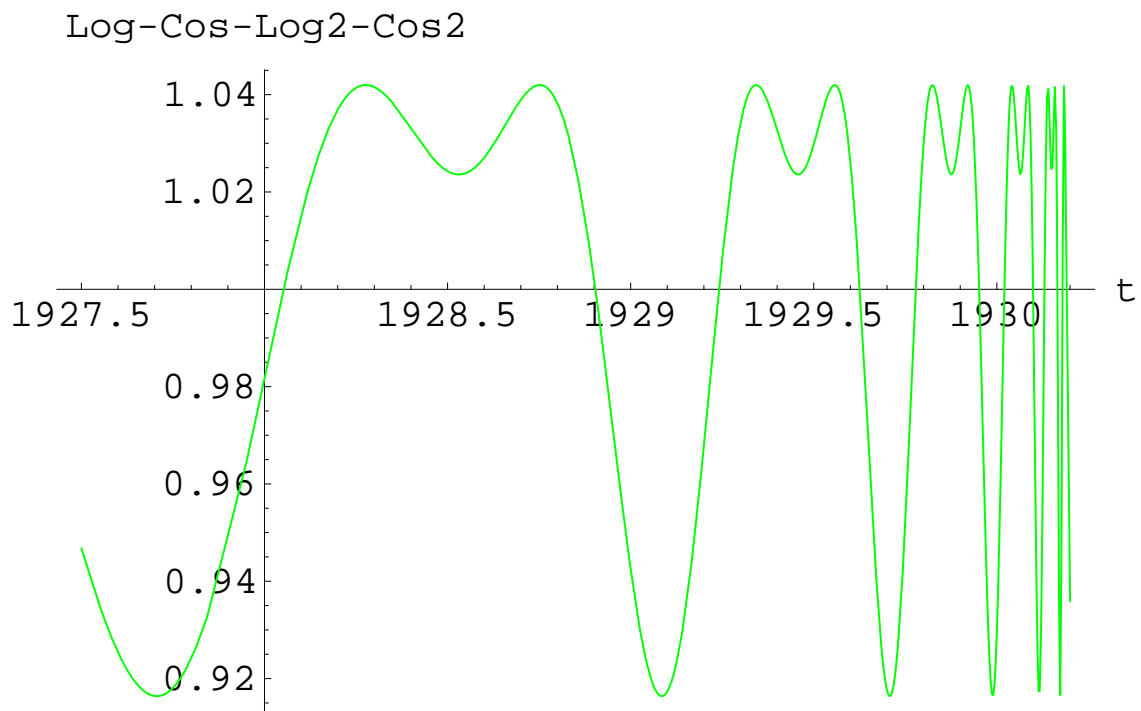
Rysunek B.3: Zależność funkcji  $X(t_c - t)$  danej wzorem (B.19) od czasu  $t$  liczonego w dniach (oscylująca, czerwona linia ciągła) oraz jej składowej potęgowej  $X_{PL}(t_c - t)$  (wyrażenie stojące przed nawiasem kwadratowym we wzorze (B.19), niebieska linia ciągła); obie linie poprowadzono dla wartości parametrów otrzymanych z dopasowania do danych empirycznych przedstawionych na rys.B.1.



Rysunek B.4: Zależność od czasu (liczonego w dniach) log-periodycznej składowej funkcji  $X(t_c - t)$  (wyrażenie stojące wewnątrz nawiasu kwadratowego we wzorze (B.19)) dla parametrów otrzymanych z dopasowania tej funkcji do danych empirycznych przedstawionych na rys.B.1.



Rysunek B.5: Zależność funkcji (B.20) uwzględniającej drugą harmoniczną log-periodyczną poprawkę (oscylująca, czerwona linia ciągła) od czasu  $t$  (liczonego w dniach) oraz jej składowej potęgowej (wyrażenie stojące przed nawiasem kwadratowym we wzorze (B.19), niebieska linia ciągła); obie linie poprowadzono dla wartości parametrów otrzymanych z dopasowania do danych empirycznych przedstawionych na rys.B.1 przy czym swobodny parametr ważący tą poprawkę jest tutaj ujemny i wynosi, przykładowo,  $C' = -0.03$ .



Rysunek B.6: Zależność składowych log-periodycznych (zerowej, pierwszej i drugiej harmonicznej traktowanych sumarycznie) dla tego samego przypadku, którego dotyczy rys.B.5.



# Dodatek C

## Reologiczny Standardowy Model Zenera Ciała Plastycznego

### C.1 Modele Kelvina i Maxwella materiałów plastycznych

Większość modeli reologicznych bazuje na różnorodnej kombinacji dwóch prostych, znanych praw [41], [48]:

1. Prawa sprężystości Hooke'a idealnego ciała stałego

$$\sigma(t) = G \varepsilon(t), \quad (\text{C.1})$$

gdzie  $G$  jest modułem sprężystości Younga oraz

2. Prawa sprężystości Newtona dla idealnych płynów

$$\sigma(t) = \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (\text{C.2})$$

gdzie  $\eta$  jest stałym współczynnikiem lepkości płynu (tego typu płyny nazywa się newtonowskimi w odróżnieniu od nienewtonowskich czyli takich, dla których współczynnik ten zależy od wielkości dynamicznych  $\sigma(t)$  lub  $\varepsilon(t)$ ). W obu przypadkach  $\sigma(t)$  jest chwilowym naprężeniem (napięciem) wewnętrznym ciała (stałego lub płynu) a  $\varepsilon(t)$  jego chwilowym wydłużeniem względnym<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Opis ciała plastycznego, który wykorzystuję w niniejszej pracy nie wymaga ani rozróżnienia pomiędzy napięciem normalnym i ścinającym ani wprowadzenia oprócz dwóch powyższych praw także trzeciego, Saint-Venanta opisującego ciało doskonale plastyczne.

Przy okazji zauważmy, że oba te prawa można ująć jednym prawem interpolacyjnym postaci [41], [48]:

$$\sigma(t) = \eta^\gamma G^{1-\gamma} \frac{d^\gamma \varepsilon}{dt^\gamma}(t), \quad (\text{C.3})$$

gdzie  $\gamma \in [0, 1]$ , natomiast fraktalny operator różniczkowo-całkowy  $\frac{d^\gamma}{dt^\gamma}$  jest zdefiniowany następująco:

$$\frac{d^\gamma f}{dt^\gamma}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} f^{(\gamma)}(t) & \text{jeżeli } \gamma = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ {}_{t_0}D_t^\gamma f(t) & \text{jeżeli } \gamma < 0, \\ \frac{d^n}{dt^n} \left( \frac{d^{\gamma-n} f}{dt^{\gamma-n}}(t) \right), 0 \leq n-1 \leq \gamma < n & \text{jeżeli } \gamma > 0, \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

gdzie  $f^{(\gamma)}$  oznacza pochodną zwyczajną rzędu  $\gamma = 0, 1, 2, \dots$ , przy czym  $f^{(0)}(t) = f(t)$ . Potocznie operator  $\frac{d^\gamma}{dt^\gamma}$  nazywa się pochodną ułamkową rzędu  $\gamma$  (pomimo, że w ogólności nie ma on charakteru lokalnego). Wynika to być może z faktu, że dla  $\gamma$  będącego liczbą naturalną operator  $\frac{d^\gamma}{dt^\gamma}$  jest pochodną zwyczajną rzędu  $\gamma$ . Jak widać, dla  $\gamma = 0$  prawo interpolacyjne (C.3) odtwarza prawo Hooke'a a dla  $\gamma = 1$  Newtona. Prawo (C.3) jest podstawowym we współczesnej reologii wykorzystywanym, dla  $\gamma$  ułamkowego, np. do opisu plastycznych własności polimerów (jest o tym mowa w Dodatku C.2.2).

Na rys.C.1 przedstawiono:

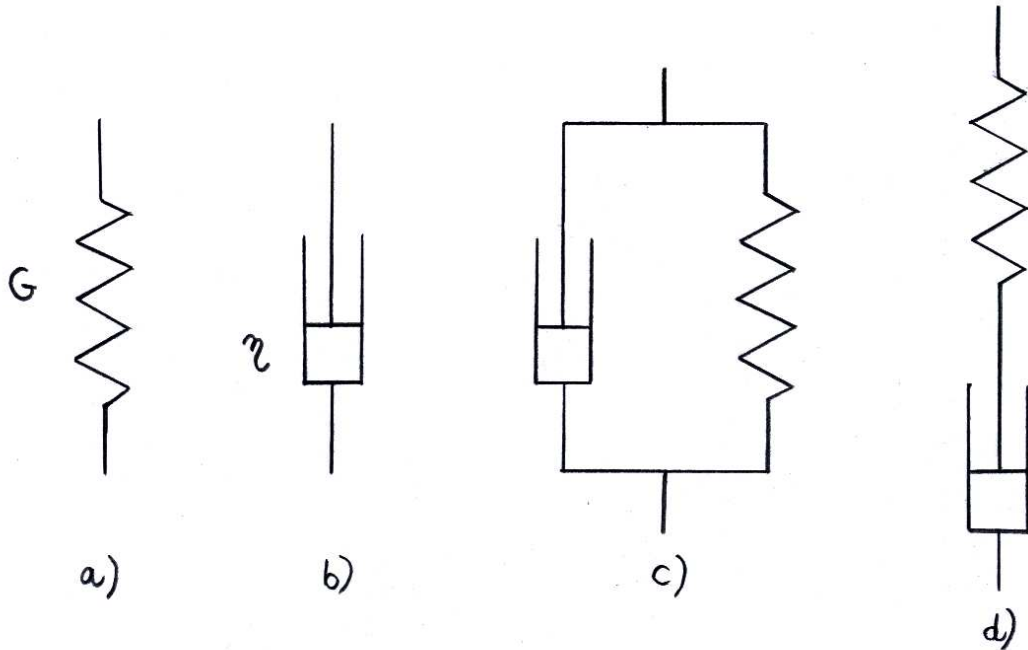
- a) sprężynę symbolizującą prawo Hooke'a (C.1), która w Reologicznym Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego stanowi analogon czysto emocjonalnej, irracjonalnej, niczym nie skrepowanej aktywności inwestorów, czyli po prostu analogon chciwości lub, ogólniej mówiąc, euforii inwestycyjnej pojedynczego inwestora albo grupy inwestorów,
- b) amortyzator symbolizujący idealny płyn sprężysty opisany równaniem Newtona (C.2), imitujący w ramach RMFDRF awersję do ryzyka, czyli po prostu strach przed utratą zysków i zainwestowanego kapitału oraz dwa najprostsze modele materiału plastycznego a mianowicie,
- c) model Kelvina ciała plastycznego opisany równaniem

$$\sigma(t) = G \varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (\text{C.5})$$

oraz

- d) model Maxwella ciała plastycznego opisany innym równaniem

$$\sigma(t) + \frac{\eta}{G} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (\text{C.6})$$



Rysunek C.1: Podstawowe elementy modeli reologicznych, czyli a) sprężyna i b) amortyzator oraz dwa tradycyjne modele: c) materiału plastycznego Kelvina i d) materiału plastycznego Maxwella.

Równania (C.5) i (C.6) można łatwo wyprowadzić - przykładowe, wyprowadzenie tego typu przedstawiam w następnym podrozdziale dla nieco bardziej złożonego modelu jakim jest Standardowy Model Zenera Ciała Plastycznego. Zauważmy jeszcze, że równania (C.5) i (C.6), zresztą jak wszystkie równania podstawowe (konstitutywne) reologii (ang. *Rheological Constitutive Equations*), pozwalają wyznaczyć zarówno wydłużenie w zależności od znanej chwilowej wartości naprężenia bądź też naprężenie w zależności od znanej chwilowej wartości wydłużenia.

Warto zaznaczyć, że model Kelvina posiada interesujące rozwiązanie swobodne, tzn. rozwiązanie na relaksację wydłużenia dla sytuacji nagłego zniknięcia naprężenia ( $\sigma(t) = 0$  dla  $t \geq 0$ ), przy nieznikającym wydłużeniu początkowym,  $\varepsilon_0 = \varepsilon(t = 0) > 0$ . Mianowicie, jest ono postaci:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp(-t/\tau), \quad (\text{C.7})$$

gdzie czas relaksacji  $\tau \stackrel{\text{def.}}{=} \eta/G$ . Tego typu relaksacja nosi nazwę 'opóźnienia sprężystego' (ang. *elastic after-effect*).

Z analogiczną relaksacją ale dotyczącą naprężenia mamy do czynienia w modelu Maxwella, gdy wydłużenie jest przez cały czas utrzymywane jako stałe; wtedy,

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(-t/\tau), \quad (\text{C.8})$$

gdzie, identycznie jak poprzednio, czas relaksacji  $\tau = \eta/G$ .

Wróćmy do tego typu relaksacji, jako relaksacji odniesienia, w kontekście omawianej w pracy relaksacji fraktalnej.

## C.2 Standardowy Model Zenera Ciała Plastycznego

Na rys.C.1 przedstawiono m.in. element (model) Maxwella (patrz d)) i sprężynę (patrz a)), które połączone równolegle tworzą Standardowy Model (Zenera) Ciała Plastycznego (patrz rys.2.1 zamieszczony w paragrafie 2.1.3). Aby wyprowadzić reologiczne równanie podstawowe dla tego modelu zauważmy najpierw, że zachodzą następujące relacje:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon_a(t) + \varepsilon_e^M(t) \Rightarrow \\ \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= \frac{d\varepsilon_a(t)}{dt} + \frac{d\varepsilon_e^M(t)}{dt} = \frac{1}{\eta} \sigma_a(t) + \frac{1}{G_e^M} \frac{d\sigma_e^M(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

gdzie indeks  $a$  dotyczy amortyzatora, indeks  $e$  sprężynki, natomiast indeks górny  $M$  sprężynki wchodzącej w skład elementu Maxwella; ponadto,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) \Rightarrow \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon_e(t)}{dt}, \quad (\text{C.10})$$

$$\sigma_a(t) = \sigma_e^M(t) \Rightarrow \frac{d\sigma_a(t)}{dt} = \frac{d\sigma_e^M(t)}{dt}, \quad (\text{C.11})$$

$$\sigma(t) = \sigma_a(t) + \sigma_e(t) \Rightarrow \sigma_a(t) = \sigma(t) - \sigma_e(t) = \sigma(t) - G_e \varepsilon_e(t), \quad (\text{C.12})$$

gdzie w trzeciej równości (C.12) i trzeciej w (C.9) wykorzystano prawa Hooke'a i Newtona, które wyrażone w zmiennych używanych w modelu przyjmują postać:

$$\sigma_e^M(t) = G_e^M \varepsilon_e^M(t), \quad (\text{C.13})$$

$$\sigma_e(t) = G_e \varepsilon_e(t), \quad (\text{C.14})$$

$$\sigma_a(t) = \eta \frac{d\varepsilon_a(t)}{dt} \quad (\text{C.15})$$

Podstawiając trzecią równość w (C.12) do trzeciej w (C.9) otrzymujemy, jako etap pośredni, następujące równanie

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\eta} [\sigma(t) - G_e \varepsilon(t)] + \frac{1}{G_e^M} \frac{d\sigma_e^M(t)}{dt}, \quad (\text{C.16})$$

gdzie po drodze skorzystałam z pierwszej równości w (C.10). Aby wyznaczyć pochodną  $\frac{d\sigma_e^M}{dt}$  skorzystam z pierwszej równości w (C.11) i ponownie z trzeciej równości w (C.12) oraz pierwszej w (C.10). Dzięki temu równanie (C.16) przekształca się do postaci

$$\sigma(t) + \tau^M \frac{d\sigma(t)}{dt} = G \tau^M \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + G_e \varepsilon(t), \quad (\text{C.17})$$

gdzie  $\tau^M = \eta/G_e^M$  a  $G = G_e^M + G_e$ . Jak widać, otrzymaliśmy równanie (2.15) wykorzystywane w dalszym ciągu w paragrafie 2.1.3 do rozwijania naszego podejścia (przy czym ma miejsce następująca równoważność oznaczeń  $\tau^M \equiv \tau_0$  i  $G_0 \equiv G$ ).

### C.2.1 Przejście od modeli tradycyjnych do fraktalnych

Przejście od tradycyjnych modeli reologicznych (omawianych powyżej) do fraktalnych przedstawia schematycznie rys.C.2, gdzie wybrane elementy składowe modelu Zenera zostały zastąpione ich odpowiednikami hierarchicznymi, czyli sieciami typu drabin, drzew lub struktur fraktalnych. Taki przykładowy odpowiednik przedstawiono na rys.C.3 w postaci hierarchicznej drabiny elementów Maxwella (patrz także rys.C.1) zaczerpniętej z pracy [48]. W pracy tej zamieszczono ważny (ale żmudny) dowód, że relacja pomiędzy naprężeniem  $\sigma(t)$  a wydłużeniem  $\varepsilon(t)$  dla takiego elementu fraktalnego jest opisana fraktalnym prawem interpolacyjnym (C.3)<sup>2</sup>. Dodajmy, że wykładnik  $\gamma$  występujący w tym prawie jest ściśle związany z dwoma pierwszymi modułami sprężystości Younga charakteryzującymi tą drabinę następującą relacją  $\gamma = 1 - G_1/G_0 (> 0)$ , czyli nie zależy od lepkości.

### C.2.2 Analogie

Za pomocą elementów a) i b) przedstawionych na rys.C.1 opisujemy zachowanie (pojedynczych albo grupy) inwestorów, którzy znajdują się, odpowiednio, w stanie euforii (rządzonej chciwością) albo paniki (rządzonej awersją do ryzyka); elementy c) i d) dotyczą (pojedynczych albo grupy) inwestorów normalnych tzn. takich, których stan jest superpozycją obu wspomnianych rodzajów emocji. Oczywiście, stwierdzenie to wymaga wyjaśnienia. W tym celu koniecznym jest, w pierwszym rzędzie, zdefiniowanie analogii pomiędzy wspomnianymi elementami a stanami psychicznymi graczy.

Zauważmy, że sprężyna może tutaj ulec (teoretycznie rzecz biorąc) nieograniczonemu wydłużeniu, symbolizując nieograniczony wzrost wartości indeksu, pod

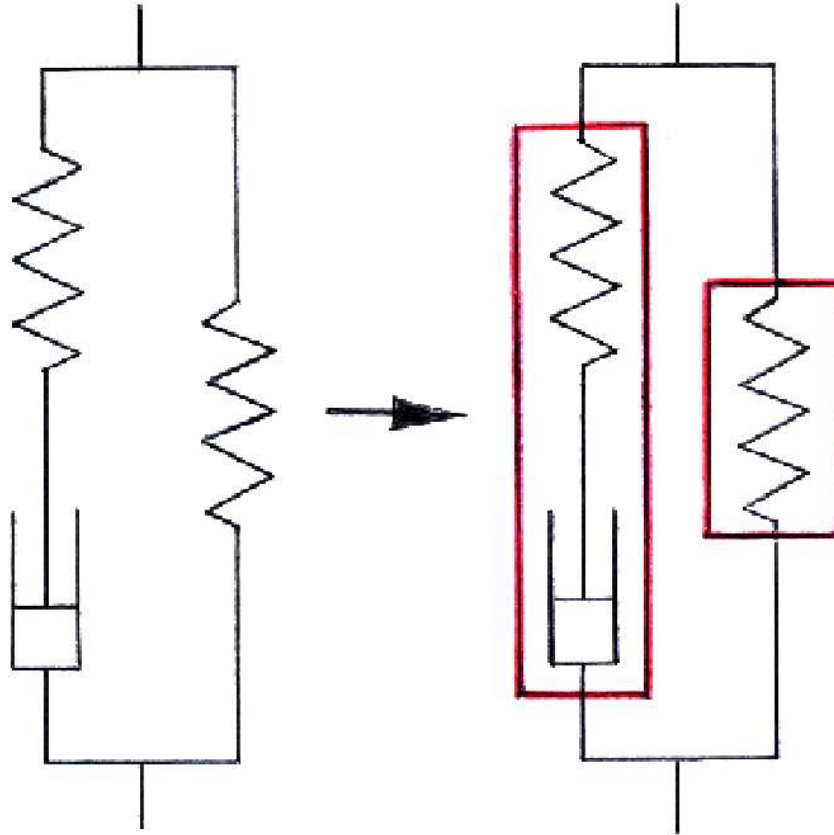
---

<sup>2</sup>Dokładniej rzecz biorąc, drabina przedstawiona na rys.C.3 jest opisana fraktalnym prawem interpolacyjnym postaci  $\sigma(t) = \eta_0^\gamma G_0^{1-\gamma} \frac{d^\gamma \varepsilon(t)}{dt^\gamma}$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ , przy czym lepkość  $\eta$  i moduł sprężystości Younga  $G$  tego elementu fraktalnego jako całości spełnia naturalny warunek  $\eta^\gamma G^{1-\gamma} = \eta_0^\gamma G_0^{1-\gamma}$ .

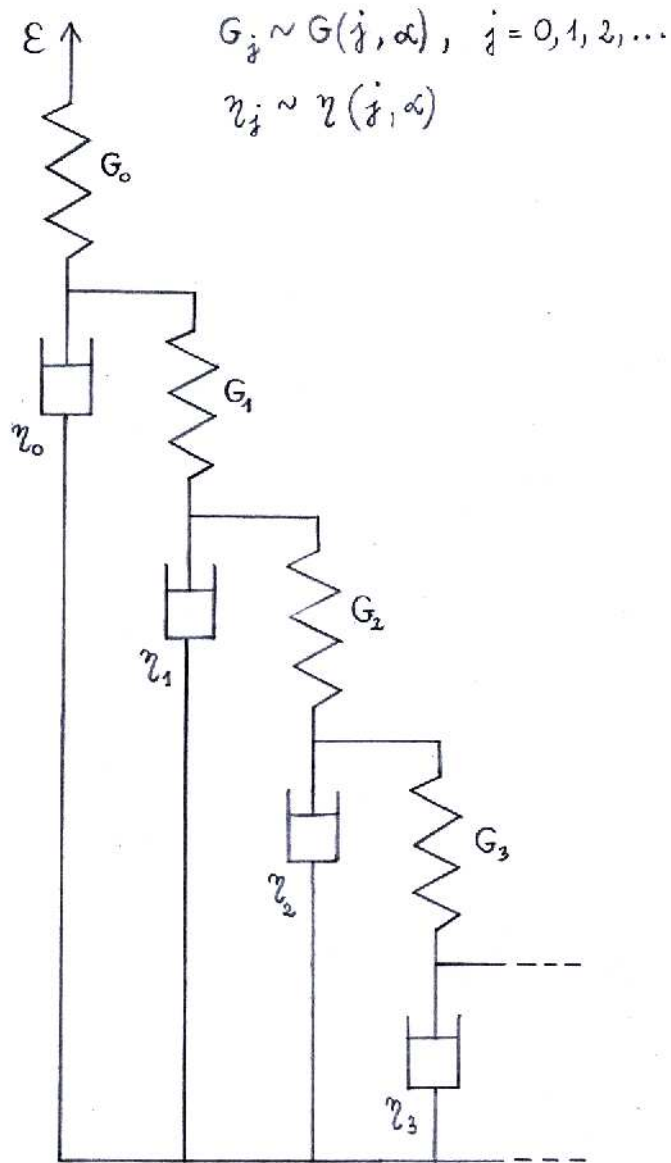
wpływem rozciągającego naprężenia symbolizującego dodatnią wartość nadwyżki popytowo-podażowej. Oczywiście, tego typu sytuacja odpowiada wzrostowi cen akcji tworzących ten indeks, czyli (*per saldo*) zakupom tych akcji przez inwestorów. Z drugiej strony, ściszenie sprężyny, odpowiadające ujemnej nadwyżce popytowo-podażowej, prowadzi do skrócenia sprężyny, czyli wyprzedaży akcji i w konsekwencji spadku wartości indeksu. W obu przypadkach może to mieć charakter euforii inwestycyjnej, wynikającej w tym drugim przypadku np. z chęci realizacji (wcześniejszego) zysku a nie z awersji do ryzyka.

Jeżeli chodzi o amortyzator, to opór wypełniającego go płynu symbolizuje niechęć inwestora albo grupy inwestorów do aktywności czyli awersję do ryzyka niezależnie od znaku nadwyżki popytowo-podażowej. Aby lepiej zrozumieć tę analogię przyjrzyjmy się bliżej schematycznej konstrukcji takiego amortyzatora przedstawionego na rys.C.4. Jak widać, tłoczek amortyzatora jest perforowany co pozwala na przepływ płynu pomiędzy obiema częściami komory, umożliwiając ruch tłoka z oporem w obie strony, czyli niezależnie od tego, w którą stronę działa naprężenie.

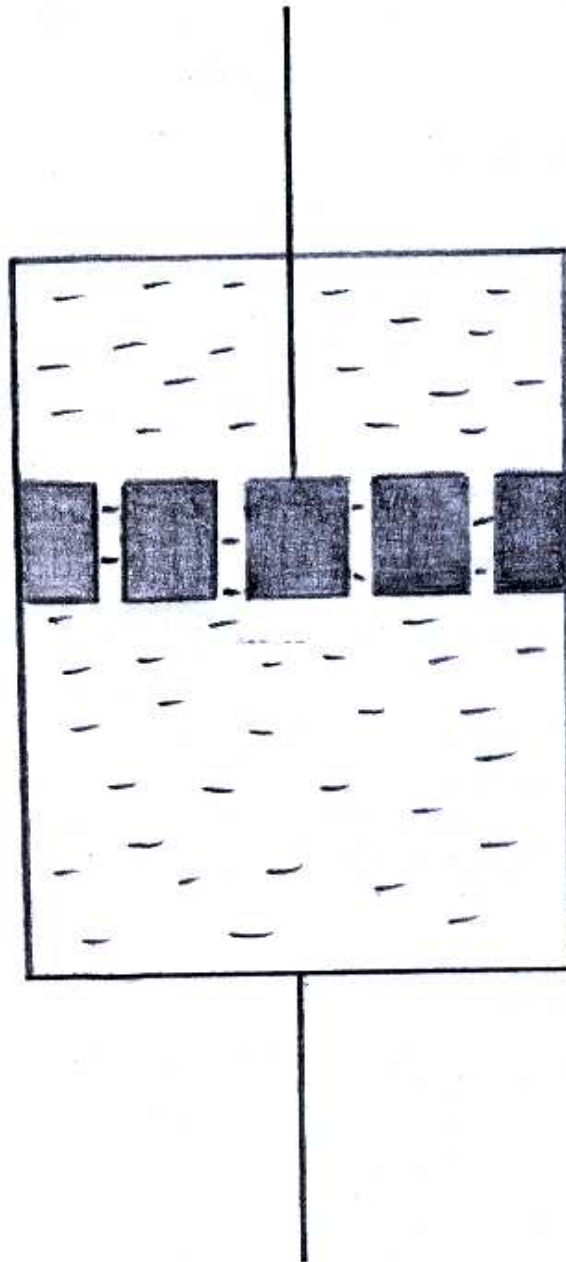
Dzięki wprowadzeniu powyższych analogii daje się uwzględnić bezpośredni wpływ emocji inwestorów na indeks giełdowy. Właśnie uwzględnienie tych emocji umożliwiło wprowadzenie w niniejszej pracy podstawowego równania Reologicznego Modelu Fraktalnej Dynamiki Rynku Finansowego (2.20).



Rysunek C.2: Przejście od modelu Zenera do odpowiadającego mu reologicznego modelu fraktalnego polegające na zastąpieniu wybranych elementów modelu odpowiadającymi im elementami fraktalnymi (zaznaczonymi schematycznie za pomocą czerwonych prostokątów) np. typu elementu przedstawionego na rys.C.3. Dodajmy, że najogólniejszą postać fraktalnego modelu Zenera przedstawiono w pracy [41]; w pracy [47] podano tylko jego szczególny przypadek przytoczony tutaj, gdyż jest wystarczający do uzyskania równania (2.20) - zasadniczego równania niniejszej rozprawy dotyczącego relaksacji indeksu giełdowego.



Rysunek C.3: Przykładowa, hierarchiczna struktura elementu fraktalnego w postaci nieograniczonej drabiny odpowiednio sprzężonych elementów Maxwella. Uwaga, przez naprężenie  $\sigma(t)$  występujące we fraktalnym prawie interpolacyjnym (C.3) rozumie się tutaj naprężenie  $\sigma_0^e(t)$  sprężyny o numerze  $j = 0$ , natomiast przez wydłużenie  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0^e(t) + \varepsilon_0^a(t)$  rozumie się sumarycznie wydłużenie składające się zarówno z wydłużenia tej sprężyny jak też związanego z nią amortyzatora.



Rysunek C.4: Amortyzator z dobrze widoczną perforacją tłoka (pionowe prześwity w zaciemnionym poprzecznym pasku w środkowej części pojemnika), umożliwiającą przepływ płynu w obie strony.



## Dodatek D

# Ścisłe rozwiązanie wprost fraktalnego swobodnego równania relaksacji

Rozwiązanie swobodnego (jednorodnego) równania relaksacji (zarówno retrospektywnej jak też prospektywnej),

$$\frac{dX^J(y)}{dy} = -(\tau_1^J)^{-\alpha^J} {}_0D_y^{1-\alpha^J} X^J(y), \quad \alpha^J > 0, \quad J = L, P, \quad (\text{D.1})$$

można dokonać wprost<sup>1</sup>, bez odwoływania się do często stosowanego podejścia wykorzystującego transformację Laplace'a (patrz Dodatek E). Sprawdzamy, że funkcja Mittag-Lefflera

$$E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1^J} \right)^{\alpha^J} \right) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y/\tau_1^J)^{n\alpha^J}}{\Gamma(1+n\alpha^J)}, \quad \alpha^J > 0, \quad (\text{D.2})$$

spełnia równanie (D.1). W tym celu skorzystam z następującej własności różniczkowo-całkowego operatora RL [46] (a tam wzór (A.16)),

$${}_0D_y^{1-\alpha^J} y^{n\alpha^J} = \frac{\Gamma(1+n\alpha^J)}{\Gamma((1+n)\alpha^J)} y^{(1+n)\alpha^J-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (\text{D.3})$$

z której wynikają bezpośrednio wykorzystywane równości

$$\begin{aligned} {}_0D_y^{1-\alpha^J} \frac{y^{n\alpha^J}}{\Gamma(1+n\alpha^J)} &= \frac{y^{(1+n)\alpha^J-1}}{\Gamma((1+n)\alpha^J)}, \\ -(\tau_1^J)^{-\alpha^J} {}_0D_y^{1-\alpha^J} \frac{(-y/\tau_1^J)^{n\alpha^J}}{\Gamma(1+n\alpha^J)} &= (-1)^{1+n} \frac{1}{y} \frac{(y/\tau_1^J)^{(1+n)\alpha^J}}{\Gamma((1+n)\alpha^J)}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

---

<sup>1</sup>Formalnie rzecz biorąc, nie musimy się tutaj nawet ograniczać do zakresu  $0 < \alpha^J < 1$ .

Teraz możemy już obliczyć prawą stronę równania (D.1) mianowicie, korzystając z drugiego równania w (D.4) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} -(\tau_1^J)^{-\alpha^J} {}_0D_y^{1-\alpha^J} E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1^J} \right)^{\alpha^J} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -(\tau_1^J)^{-\alpha^J} {}_0D_y^{1-\alpha^J} \frac{\left( -(y/\tau_1^J)^{\alpha^J} \right)^n}{\Gamma(1+n\alpha^J)} \right] \\ &= \frac{1}{y} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(y/\tau_1^J)^{n\alpha^J}}{\Gamma(n\alpha^J)}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Lewa stronę równania (D.1) otrzymujemy przez bezpośrednie różniczkowanie funkcji Mittag-Lefflera a mianowicie,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1^J} \right)^{\alpha^J} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dy} \frac{(-y/\tau_1^J)^{\alpha^J n}}{\Gamma(1+n\alpha^J)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\Gamma(1+n\alpha^J)} \frac{d}{dy} (y/\tau_1^J)^{n\alpha^J} \\ &= \frac{1}{y} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(y/\tau_1^J)^{n\alpha^J}}{\Gamma(n\alpha^J)}, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

gdzie przy wyprowadzaniu ostatniej równości skorzystałam ze znanego wzoru

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x). \quad (\text{D.7})$$

Jak widać, wyrażenia (D.4) i (D.6) są identyczne, co należało wykazać. Czyli funkcja Mittag-Lefflera dana wzorem (D.2) jest rozwiązaniem swobodnego równania fraktalnego (swobodnej relaksacji fraktalnej) (D.1) dla dowolnej chwili czasu  $y \geq 0$ .

Tego typu podejście (wprost) do poszukiwania rozwiązania niejednorodnego różniczkowo-całkowego równania fraktalnego (2.22) jest zbyt uciążliwe rachunkowo; bardziej efektywne jest podejście przedstawione w Dodatku E poniżej, wykorzystujące do rozwiązania równoważnego równania (2.20) transformatę Laplace'a.

## Dodatek E

# Ścisłe rozwiązanie fraktalnego, niejednorodnego równania relaksacji metodą transformacji Laplace'a

Aby rozwiązać ułamkowe równanie całkowe (2.20) (patrz rozdz.2.1.5) należy je podać obustronnie działaniu transformacji Laplace'a, a następnie skorzystać ze znanej postaci transformaty Laplace'a dla operatora całkowania ułamkowego (patrz [46] a tam równanie (A.5)),

$$\mathcal{L}[_0D_t^{-\alpha} f(t)](s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (\text{E.1})$$

gdzie  $\tilde{f}$  oznacza transformatę Laplace'a (w zmiennej Laplace'a  $s$ ) funkcji  $f$ . Stąd, równanie (2.20) przyjmuje postać algebraiczną

$$\tilde{X}^J(s) = \frac{1}{G_0^J} \frac{1 + (\tau_0^J)^{-\beta^J} s^{-\beta^J}}{1 + (\tau_1^J)^{-\alpha^J} s^{-\alpha^J}} \tilde{U}^J(s) + \left[ X^J(0) - \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \right] \frac{s^{-1}}{1 + (\tau_1^J)^{-\alpha^J} s^{-\alpha^J}},$$

$\alpha^J, \beta^J > 0, \quad J = L, P.$

(E.2)

dobrze nadającą się do dalszego procedurowania. Oczywiście, uzyskanie konkretnego rozwiązania  $X^J(t)$  wymaga (jako kroku pośredniego) podania jawnej postaci  $\tilde{U}^J(s)$ ; zatem, z (2.26) otrzymujemy, że

$$\tilde{U}^J(s) = \frac{U^J(0)}{2} \left[ \frac{1}{s + a^J - \imath(\omega^J - \Delta\omega^J)} + \frac{1}{s + a^J - \imath(\omega^J + \Delta\omega^J)} \right]. \quad (\text{E.3})$$

Wstawiając (E.3) do (E.2) uzyskuje się,

$$\begin{aligned}\tilde{X}^J(s) &= \tilde{X}'^J(s) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{-a^J + \iota(\omega^J - \Delta\omega^J)}{s + a^J - \iota(\omega^J - \Delta\omega^J)} + \frac{-a^J + \iota(\omega^J + \Delta\omega^J)}{s + a^J - \iota(\omega^J + \Delta\omega^J)} \right] \tilde{X}'^J(s) + \\ &+ \left[ X^J(0) - \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \right] \frac{s^{-1}}{1 + (\tau_1^J)^{-\alpha^J} s^{-\alpha^J}},\end{aligned}\quad (\text{E.4})$$

gdzie

$$\tilde{X}'^J(s) = \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left[ \frac{s^{-1}}{1 + (\tau_1^J)^{-\alpha^J} s^{-\alpha^J}} + \frac{(\tau_0^J)^{-\beta^J} s^{-\beta^J - 1}}{1 + (\tau_1^J)^{-\alpha^J} s^{-\alpha^J}} \right]. \quad (\text{E.5})$$

Równanie (E.4) zostało napisane w postaci ułatwiającej przeprowadzenie odwrotnej transformacji Laplace'a wykorzystującej definicje odpowiednio, pierwszej funkcji Mittag-Lefflera a druga uogólnionej funkcji Mittag-Lefflera:

$$E_\alpha \left( - \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^\alpha \right) = \frac{1}{\alpha} H_{1,2}^{1,1} \left[ \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^\alpha \middle| \begin{matrix} (0, 1) \\ (0, 1), (0, \alpha) \end{matrix} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^{-1}}{1 + \tau_1^{-\alpha} s^{-\alpha}} \right] (y), \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned}E_{\alpha, 1+\beta} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^\alpha \right) &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^\beta H_{1,2}^{1,1} \left[ \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^\alpha \middle| \begin{matrix} (0, 1) \\ (0, 1), (-\beta, \alpha) \end{matrix} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\tau_1^{-\beta} s^{-1-\beta}}{1 + \tau_1^{-\alpha} s^{-\alpha}} \right] (y),\end{aligned}\quad (\text{E.7})$$

gdzie  $H_{p=1, q=2}^{m=1, n=1}$  jest funkcją typu funkcji  $H$ -Foxa, ogólnie oznaczaną przez  $H_{p,q}^{m,n}$  i daną w postaci całki typu Barnes'a, mianowicie

$$H_{p,q}^{m,n}(z) \stackrel{\text{ozn.}}{=} H_{p,q}^{m,n} \left[ z \middle| \begin{matrix} (a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right] \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_C \chi(s) z^s ds, \quad (\text{E.8})$$

przy czym funkcja podcałkowa

$$\chi(s) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + A_j s) \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - B_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + B_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - A_j s)}, \quad (\text{E.9})$$

(gdzie ewentualny pusty iloczyn należy zastąpić przez 1), parametry  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, p$  i  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , są nieujemne a liczby  $p, q, m, n$  są całkowite spełniające warunki  $0 \leq n \leq p$ ,  $1 \leq m \leq q$ , natomiast  $C$  jest konturem leżącym w płaszczyźnie zespolonej, rozdzielającym bieguny funkcji  $\chi(s)$  w taki sposób, że bieguny funkcji  $\Gamma(1 - a_j + A_j s)$  znajdują się po lewej stronie konturu a  $\Gamma(b_j - B_j s)$  po prawej. Funkcje Foxa są analitycznymi funkcjami zmiennej zespolonej  $z$ , gdy

- 1)  $\mu \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^q B_j - \sum_{j=1}^p A_j > 0$  i  $z \neq 0$  oraz gdy
- 2)  $\mu = 0$  i  $|z|^{-1} > \beta \stackrel{\text{def.}}{=} \prod_{j=1}^p A_j^{A_j} \prod_{j=1}^q B_j^{-B_j}$ ,

celem dokładniejszej analizy patrz np. [40] a także [46]. Stąd, uogólniona funkcja Mittag-Lefflera  $E_{\alpha,1+\beta} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^\alpha \right)$  może być przedstawiona w postaci następującego szeregu [40], [46]:

$$E_{\alpha,1+\beta} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^\alpha \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(1 + \beta + \alpha j)} \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^{\alpha j}. \quad (\text{E.10})$$

Oczywiście, uogólniona funkcja Mittag-Lefflera przechodzi w zwykłą (1.4) gdy  $\beta = 0$ . Ponadto, ma miejsce prosta zależność dla  $\beta = \alpha$

$$\left( \frac{y}{\tau_1} \right)^\alpha E_{\alpha,1+\alpha} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^\alpha \right) = E_\alpha \left( - \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^\alpha \right) - 1. \quad (\text{E.11})$$

Korzystając z własności (E.6) i (E.8) można wyrażenie (E.4) przedstawić w zmiennej czasowej  $y$  następująco:

$$\begin{aligned} X'^J(y) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \tilde{X}'^J(s) \right] (y) = \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \\ &\times \left[ E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1^J} \right)^{\alpha^J} \right) + \left( \frac{\tau_1^J}{\tau_0^J} \right)^{\beta^J} \left( \frac{y}{\tau_1^J} \right)^{\beta^J} E_{\alpha^J,1+\beta^J} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1^J} \right)^{\alpha^J} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Pamiętając, że iloczyn transformat Laplace'a transformuje się według odwrotnej transformaty Laplace'a na konwolucję w przestrzeni prostej (tutaj w przestrzeni zmiennej  $y$ ) uzyskujemy z (E.4), wykorzystując (E.12), następujące ogólne wyrażenie,

$$\begin{aligned} X^J(y) &= X^J(0) E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1^J} \right)^{\alpha^J} \right) + \\ &+ \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left( \frac{\tau_1^J}{\tau_0^J} \right)^{\beta^J} \left( \frac{y}{\tau_1^J} \right)^{\beta^J} E_{\alpha^J,1+\beta^J} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1^J} \right)^{\alpha^J} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left[ -a^J + \imath(\omega^J - \Delta\omega^J) \right] \times \\ &\times \int_0^y dy' \exp(-a^J(y-y')) \exp(\imath(\omega^J - \Delta\omega^J)(y-y')) X'^J(y') + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left[ -a^J + \imath(\omega^J + \Delta\omega^J) \right] \times \\ &\times \int_0^y dy' \exp(-a^J(y-y')) \exp(\imath(\omega^J + \Delta\omega^J)(y-y')) X'^J(y'), \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

słuszne dla  $\alpha^J, \beta^J > 0$ .

Należy podkreślić, że w badanych przez nas zagadnieniach częstości  $\omega^J$  i  $\Delta\omega^J$ ,  $J = L, P$ , były co najwyżej rzędu jednej dziesiątej a ponadto,  $\Delta\omega^J$  była znacznie mniejsze od  $\omega^J$ ; wynikało to bezpośrednio z dopasowania finalnego rozwiązania (E.16) do danych empirycznych. Jednakże dla  $\alpha^J \neq \beta^J$  zaniedbanie składników proporcjonalnych do  $\omega^J$  i  $\Delta\omega^J$  likwiduje zarazem część oscylacyjną rozwiązania, gdyż z  $X'^J(y')$  stojącego pod całkami nie da się wyłączyć części stałej niezależnej od  $\alpha^J, \beta^J$ ,  $J = L, P$ . Dlatego, dalej rozważać będą tylko przypadek  $\alpha^J = \beta^J$ . Dla tego typu sytuacji rozwiązanie (E.13) przechodzi w następujące, prostsze<sup>1</sup> (przy czym nadal  $\alpha^J > 0$ ):

$$\begin{aligned}
X^J(y) &= \left[ X^J(0) + \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left( \frac{\tau_0^J}{\tau_1^J} \right)^{-\alpha^J} \right] E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1^J} \right)^{\alpha^J} \right) \\
&- \frac{1}{G_0^J} \frac{U^J(0)}{2} \left( \frac{\tau_0^J}{\tau_1^J} \right)^{-\alpha^J} \exp(-a^J y) \times \\
&\times \left[ \exp(i(\omega^J - \Delta\omega^J)y) + \exp(i(\omega^J + \Delta\omega^J)y) \right] \\
&+ \left[ -a^J + i(\omega^J - \Delta\omega^J) \right] \frac{1}{G_0^J} \frac{U^J(0)}{2} \left[ 1 + \left( \frac{\tau_0^J}{\tau_1^J} \right)^{-\alpha^J} \right] \times \\
&\times \int_0^y \exp(-a^J(y-y')) \exp(i(\omega^J - \Delta\omega^J)(y-y')) E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y'}{\tau_1^J} \right)^{\alpha^J} \right) dy' \\
&+ \left[ -a^J + i(\omega^J + \Delta\omega^J) \right] \frac{1}{G_0^J} \frac{U^J(0)}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\tau_0^J}{\tau_1^J} \right)^{-\alpha^J} \right] \times \\
&\times \int_0^y \exp(-a^J(y-y')) \exp(i(\omega^J + \Delta\omega^J)(y-y')) E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y'}{\tau_1^J} \right)^{\alpha^J} \right) dy',
\end{aligned} \tag{E.14}$$

zawierające nieznikającą część oscylacyjną (przy czym po drodze wykorzystano własność (E.11)).

W dalszym ciągu zakładamy, że parametry  $a^J$ ,  $J = L, P$ , znikają co oznacza, że jeżeli chodzi o relaksacje to mamy tutaj do czynienia jedynie ze spowolnioną relaksacją (prospektywną albo retrospektywną) opisaną funkcją Mittag-Lefflera  $E_{\alpha}$ . Zainteresowani jesteście, oczywiście, tylko rzeczywistą częścią dokładnego rozwiązania

---

<sup>1</sup>Natomiast tam gdzie oscylacje nie występują założenie równych wykładników kształtu dla danego zbrocza piku jest utrzymywane o ile umożliwia to zadowalające dopasowanie finalnej formuły (E.16) do danych empirycznych. Na szczęście, we wszystkich rozważanych w pracy przypadkach założenie to było możliwe do utrzymania.

nia (E.14); zatem,

$$\begin{aligned}
\Re X^J(y) &= \left[ X^J(0) + \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left( \frac{\tau_0}{\tau_1} \right)^{-\alpha^J} \right] E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^{\alpha^J} \right) \\
&- \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left( \frac{\tau_0}{\tau_1} \right)^{-\alpha^J} \cos(\omega^J y) \cos(\Delta\omega^J y) \\
&- \omega^J \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left[ 1 + \left( \frac{\tau_0}{\tau_1} \right)^{-\alpha^J} \right] \times \\
&\times \int_0^y \sin(\omega^J(y-y')) \cos(\Delta\omega^J(y-y')) E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y'}{\tau_1} \right)^{\alpha^J} \right) dy' \\
&- \Delta\omega^J \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left[ 1 + \left( \frac{\tau_0}{\tau_1} \right)^{-\alpha^J} \right] \times \\
&\times \int_0^y \cos(\omega^J(y-y')) \sin(\Delta\omega^J(y-y')) E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y'}{\tau_1} \right)^{\alpha^J} \right) dy', \quad \alpha^J > 0.
\end{aligned} \tag{E.15}$$

Ponieważ rozważamy sytuacje, w których  $\omega^J, \Delta\omega^J \ll 1$ ,  $J = L, P$ , czyli zaniedbujemy składniki uwzględniające w jawnej postaci efekt retardacji nadwyżki podażowej i popytowej, stąd dwa składniki w rozwiązaniu (E.15) proporcjonalne odpowiednio do  $\omega^J$  i  $\Delta\omega^J$  pomijamy. Z powyższego wyrażenia otrzymujemy ostatecznie poszukiwane przybliżone, rzeczywiste rozwiązanie równania (2.20) postaci,

$$\begin{aligned}
\Re X^J(y) &= \left[ X^J(0) + \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left( \frac{\tau_0}{\tau_1} \right)^{-\alpha^J} \right] E_{\alpha^J} \left( - \left( \frac{y}{\tau_1} \right)^{\alpha^J} \right) \\
&- \frac{1}{G_0^J} U^J(0) \left( \frac{\tau_0}{\tau_1} \right)^{-\alpha^J} \cos(\omega^J y) \cos(\Delta\omega^J y), \quad \alpha^J > 0; \tag{E.16}
\end{aligned}$$

to właśnie przewidywania tej formuły porównuję w niniejszej pracy z danymi empirycznymi.

## E.1 Ułamkowa pochodna Caputo a fraktalne równania relaksacji

Zarówno fraktalne równanie relaksacji jak też niejednorodne fraktalne równanie relaksacji mają, formalnie rzecz biorąc, szczególnie prostą postać o ile zostaną wyrażone za pomocą tzw. fraktalnej (ułamkowej) pochodnej Caputo [74] zdefiniowanej za pomocą (2.25) (patrz rozdz.2.1.6). Aby wyrazić w ten sposób niejednorodne

fraktalne równanie relaksacji przekształcam wyjściowe równanie (2.20) za pomocą transformacji Laplace'a, wykorzystując (E.1)

$$\begin{aligned} \tilde{X}^J(s) - \frac{1}{s}X^J(0) &= -(\tau_1^J)^{-\alpha^J} \frac{1}{s^{\alpha^J}} \tilde{X}^J(s) \\ &+ \frac{1}{G_0^J} (\tau_0^J)^{-\beta^J} \frac{1}{s^{\beta^J}} \tilde{U}^J(s) + \frac{1}{G_0^J} \tilde{U}^J(s) - \frac{1}{G_0^J} \frac{1}{s} U^J(0), \quad J = L, P, \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Mnożąc to równanie stronami przez  $s^{\alpha^J}$  sprowadzam je do następującej postaci,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^{1-\alpha^J}} [s\tilde{X}^J(s) - X^J(0)] &= -(\tau_1^J)^{-\alpha^J} \tilde{X}^J(s) \\ &+ \frac{1}{G_0^J} (\tau_0^J)^{-\beta^J} \frac{s^{\alpha^J}}{s^{\beta^J}} \tilde{U}^J(s) \\ &+ \frac{1}{G_0^J} \frac{1}{s^{1-\alpha^J}} [s\tilde{U}^J(s) - U^J(0)], \quad J = L, P, \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

którą jest już łatwo wyrazić ponownie w zmiennej czasowej  $y$  (a nie odwrotnej Laplace'a  $s$ ). Mianowicie, zakładając równość wykładników kształtu, tzn.  $\alpha^J = \beta^J$ ,  $J = L, P$ , otrzymuję równanie,

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha^J} X^J(y)}{dy^{\alpha^J}} &= -(\tau_1^J)^{-\alpha^J} X^J(y) + \frac{1}{G_0^J} \frac{d^{\alpha^J} U^J(y)}{dy^{\alpha^J}} + \frac{1}{G_0^J} (\tau_0^J)^{-\alpha^J} U^J(y) \\ &J = L, P, \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

gdzie po drodze (ponownie) wykorzystałam własność (E.1) oraz dobrze znany fakt, że

$$\mathcal{L} [f^{(1)}(y)](s) = s\tilde{f}(s) - f(0). \quad (\text{E.20})$$

Czasami (np. gdy przeprowadza się jakieś rozważania o charakterze ogólnym) wygodniej jest operować równaniem (E.19) ze względu na to, iż nie zawiera ono wypisanego jawnie warunku początkowego.

# Bibliografia

- [1] R.N. Mantegna, *Lévy walks and enhanced diffusion in Milan stock exchange*, Physica A 179 (1991) 232
- [2] R. Kutner, D. Grech, *Report on Foundation and Organization of Econophysics Graduate Courses at Faculty of University of Warsaw and Department of Physics and Astronomy of the Wrocław University*, Acta Phys. Pol. A 114 (2008) 637
- [3] B.M. Roehner, *Patterns of Speculation. A Study in Observational Econophysics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge UK 2002
- [4] D. Sornette, *Why Stock Markets Crash. Critical Events in Complex Financial Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton and Oxford 2002
- [5] Y. Malevergne, D. Sornette, *Extreme Financial Risk. From Dependence to Risk Management*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2006
- [6] J. Hołyst, *Fizyk na giełdzie*, Wprost Nr 46, 84 (2003)
- [7] W. Paul, J. Baschnagel, *Stochastic Processes. From Physics to Finance*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg New York 1999
- [8] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000
- [9] J.-P. Bouchaud, *Theory of Financial Risk. From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000
- [10] K. Ilinski, *Physics of Finance. Gauge modelling in non-equilibrium pricing*, Wiley Finance Series, J. Wiley & Sons, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto 2001
- [11] B.K. Chakrabarti, A. Chakraborti, A. Chatterjee (Eds.), *Econophysics and Sociophysics. Trends and Perspectives*, WILEY-VCH Verlag, Weinheim 2006

- [12] J. Bernstein, *L. Bachelier*, Am. J. Phys. 73(5) (2005) 395
- [13] W. Schoutens, *Lévy Processes in Finance. Pricing Financial Derivatives*, Wiley Series in Probability and Statistics, J. Wiley & Sons, Chichester 2003
- [14] S.I. Boyarchenko and S.Z. Levendorskii, *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory*, Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, World Sci., New Jersey, London, Singapore, Hong Kong 2002
- [15] A. Kyprianou, W. Schoutens, P. Wilmott, *Exotic Option Pricing and Advanced Lévy Models*, J. Wiley & Sons, Chichester 2005
- [16] S. Albeverio, V. Jentsch, H. Kantz (Eds.), *Extreme Events in Nature and Society*, The Frontiers Collection, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2006
- [17] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *Scaling behaviour in the dynamics of economic index*, Nature 376 (1995) 46
- [18] D. Sornette, *Why Stock Markets Crash. Critical Events in Complex Financial Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton and Oxford 2003
- [19] J.F. Muzy, J. Delour, E. Bacry, *What can we learn with wavelets about DNA sequences?*, Eur. Phys. J. B 17 (2000) 537
- [20] S. Chandrasekhar, M. Kac, R. Smoluchowski, *Marian Smoluchowski. His Life and Scientific Work*, Polish Scientific Publishers PWN, Warszawa 2000
- [21] A. Weron and R. Weron, *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje Komputerowe. Statystyka rynku*, Wydanie drugie, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999
- [22] F. Black and M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Polit. Econom. 81 (1973) 637
- [23] B.B. Mandelbrot and R.L. Hudson, *The (mis)Behavior of markets. A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*, Basic Books, New York 2004
- [24] R. Badii, A. Politi, *Complexity. Hierarchical structures and scaling in physics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge UK, 1997)
- [25] F. Mainardi, M. Raberto, R. Gorenflo, E. Scales, *Fractional calculus and continuous-time finance II: the waiting-time distributions*, Physica A 287 (2000) 468

- [26] E. Scales, R. Gorenflo, F. Mainardi, *Uncoupled continuous-time random walks: Solution and limiting behavior of master equation*, Phys. Rev. E 69 (2004) 011107-1
- [27] L. Sabatelli, S. Keating, J. Dudley, and P. Richmond, *Waiting time distributions in financial markets*, Eur. Phys. J. B 27 (2002) 273
- [28] D. Sornette, A. Johansen, J-P. Bouchaud, *Stock Market Crashes, Precursors and Replics*, J. Phys. I France 6 (1996) 167
- [29] D. Sornette, A. Johansen, *Large financial crashes* Physica A 245 (1997) 411
- [30] D. Sornette, A. Johansen, *Significance of log-periodic precursors to financial crshes*, Quant. Finance 1 (2001) 452
- [31] A. Johansen, D. Sornette, *Log-periodic power law bubbles in Latin-American and Asian markets and correlated anti-bubbles in Western stock markets: An empirical study*, J. Risk 4 (2001) 69
- [32] A. Johansen, *Comment on "Are financial crashes predictble?" by L. Laloux, M. Potters, R. Cont, J.-P. Aguilar and J.-P. Bouchaud*, Europhysics Lett. 60 (5) (2002) 809
- [33] *Nonextensive statistical mechanics: new trends, new perspectives*, Europhysic-snews 36/6 (2005) Special Issue & Directory
- [34] F. Schweitzer, *Brownian Agents and Active Particles*, (Springer-Verlag, Berlin, 2003)
- [35] A. Bunde, J.W. Kantelhardt, *Langzeitkorrelationen in der Natur: von Klima, Erbgut und Herzrhythmus*, Physikalische Blätter 57/5 (2001) 49
- [36] D. Grech, Z. Mazur, *Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea?*, Physica A 336 (2004) 133
- [37] D. Grech, Z. Mazur, *Statistical Properties of Old and New Techniques in Detrended Analysis of Time Series*, Acta Phys. Pol. 36 (2005) 2403
- [38] M. Kozłowska, R. Kutner, *Dynamics of the Warsaw Stock Exchange Index as Analysed by the Nonhomogeneous Fractional Relaxation Equation*, Acta Phys. Pol. B 37 (2006) 3027
- [39] M. Kozłowska, A. Kasprzak and R. Kutner, *Fractional Market Model and Its Verification on the Warsaw Stock Exchange*, Int. J. Mod. Phys. C 19 (2008) 453

- [40] W.G. Glöckle, Th.F. Nonnenmacher, *Fractional Integral Operators and Fox Functions in the Theory of Viscoelasticity*, *Macromolecules* 24 (1991) 6426
- [41] H. Schiessel, Chr. Friedrich, A. Blumen: *Applications to Problems in Polymer Physics and Rheology* in *Fractional Calculus in Physics*, Ed. R. Hilfer, (World Sci., Singapore, 2000)
- [42] Th.F. Nonnenmacher, R. Metzler, *Applications of Fractional Calculus Techniques to Problems in Biophysics* in *Applications of Fractional Calculus in Physics*, Ed. R. Hilfer, (World Sci., Singapore, 2000)
- [43] J. Bendler, D.G. LeGrand, W.V. Olszewski: *Relaxation and Recovery of Glassy PolyCarbonate* in: *Transport and Relaxation in Random Materials*. Eds. J. Klafter, R.J. Rubin, M.F. Shlasinger, (World Sci., Singapore, 1986)
- [44] N.W. Tschoegel, *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*, (Springer-Verlag, Berlin, 1989)
- [45] R. Richert, A. Blumen, *Disordered Systems and Relaxation in Disorder Effects on Relaxational Processes: Glasses, Polymers, Proteins*, Eds. R. Richert, A. Blumen, (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [46] R. Metzler, J. Klafter, *The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach*, *Phys. Rep.* 339 (2000) 1
- [47] W.G. Glöckle and T.F. Nonnenmacher, *Fractional relaxation and the time-temperature superposition principle*, *Rheol. Acta* 33 (1994) 337
- [48] H. Schiessel and A. Blumen: *Hierarchical analogues to fractional relaxation equation*, *J. Phys. A: Math. Gen.* 26 (1995) 5057
- [49] P.L. Butzer, U. Westphal, *An Introduction to Fractional Calculus* in *Fractional Calculus in Physics*, Ed. R. Hilfer (World Sci., Singapore, 2000).
- [50] R. Kutner and F. Świtłała, *Stochastic simulations of time series within Weierstrass-Mandelbrot walks*. *Quantitative Finance* 3 (2003) 201
- [51] W.-X. Zhou, D. Sornette, *Evidence of a worldwide stock market log-periodic anti-bubbles since mid-2000*. *Physica A* 330, 543 (2003) 543
- [52] W.-X. Zhou, D. Sornette, *Renormalization group analysis of the 2000-2002 anti-bubble in the US S&P500 index: explanation of the hierarchy of five crashes and prediction*, *Physica A* 330 (2003) 584

- [53] A. Johansen, D. Sornette, *Bubbles and anti-bubbles in Latin-American, Asian and Western stock markets: An empirical study*, International Journal of Theoretical and Applied Finance 4 (2001) 853
- [54] P. Gnaciński, D. Makowiec, *Another type of log-periodic oscillations on Polish stock market*. Physica A 344, (2004) 322
- [55] S. Drożdż, F. Grummer, F. Ruf, J. Speth, *Log-periodic self-similarity: an emerging financial law?*, Physica A 324 (2003) 174
- [56] S. Drożdż, J. Kwapien, P. Oświęcimka and J. Speth, *Current Log-periodic View on Future World Market Development*, Acta Phys. Pol. A 114 (2008) 539
- [57] T. Plummer, *Psychologia Rynków Finansowych. U Źródeł Analizy Technicznej*, WIG-Press, Warszawa 1995 (tłum. z ang.)
- [58] N. Vandewalle, Ph. Boveroux, A. Minguet, M. Ausloos, *The crash of October 1987 seen as phase transition: amplitude and universality*, Physica A 255 (1998), 201
- [59] N. Vandewalle, M. Ausloos, Ph. Boveroux, A. Minguet, *How the financial crash of October 1987 could have been predicted*, Eur. Phys. J. B 4 (1998) 139
- [60] N. Vandewalle, M. Ausloos, Ph. Boveroux, A. Minguet, *Visualizing the log-periodic pattern before crashes*, Eur. Phys. J. B 9 (1998) 355
- [61] J.A. Feigenbaum, P.G.O. Freund, *Discrete scale invariance in stock markets before crashes*, Int. J. Mod. Phys. B 10 (1996) 3737
- [62] B.B. Mandelbrot, *The variation of certain speculative prices*, J. Business 36 (1963) 349
- [63] H. Takayasu, H. Miura, T. Hirabayashi, K. Hamada, *Statistical properties of deterministic threshold elements: the case of market price*, Physica A 184 (1992) 127
- [64] J.-P. Bouchaud, D. Sornette, *Reply to Mikheev's Comment on the Black-Scholes Pricing Problem*, J. Phys. I (France) 4 (1994) 863
- [65] Y. Liu, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng, H.E. Stanley, *Quantification of Correlations in Economic Time Series*, Physica A 245 (1997) 437
- [66] P. Bak, M. Paczulski, M. Shubik, *Price variations in a stock market with many agents*, Physica A 246 (1997) 430

- [67] A. Johansen, D. Sornette, *The Nasdaq crash of April 2000: Yet another example of log-periodicity in a speculative bubble ending in a crash*, Eur. Phys. J. B 17 (2000) 319
- [68] J. Mimkes, *A Thermodynamic Formulation of Economics*, str.1-34 oraz *A Thermodynamic Formulation of Social Science*, str.279-310 w *Econophysics and Sociophysics. Trends and Perspectives*, Eds. B.K. Chakrabarti, A. Chakraborti, A. Chatterjee (Wiley-VCH, Weinheim 2006).
- [69] M. Bartolozzi, S. Drożdż, D. B. Leinweber, J. Speth, A.W. Thomas, Int. J. Mod. Phys. C 16 (2005) 1347
- [70] D. Sornette, *Discrete scale invariance and complex dimensions*, Phys. Rep. 297 (1998) 239
- [71] M. Toda, R. Kubo, N. Saito, *Fizyka statystyczna I. Mechanika statystyczna stanów nierównowagowych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1991
- [72] K. Huang, *Mechanika statystyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1978
- [73] S. Drożdż, F. Ruf, J. Speth, M. Wójcik, *Imprints of log-periodic self-similarity in the stock market*, Eur. Phys. J. B 10 (1999) 589
- [74] C. Tsallis, *Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics - An overview after 20 years*, Braz. J. Phys. 39 (2009) 337
- [75] R.K. Schofield and W.G. Scott Blair, *The Relationship between Viscosity, Elasticity and Plastic Strength of Soft Materials as Illustrated by some Mechanical Properties of Flour Doughd, I.*, Proc. Roy. Soc. A 138 (1932) 707-718
- [76] A. Mastelarz-Kodzis, *Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali*, Akademia Ekonomiczna im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice 2003
- [77] O.J. Blanchard, *Speculative bubbles, crashes and rational expectations*, Economics Letters 3 (1979) 387
- [78] O.J. Blanchard, M.W. Watson, *Bubbles, Rational Expectations and Financial Markets in Crisis in Economic and Financial Structure: Bubbles, Bursts, and Shocks*, ed. P. Wachtel, Lexington Books, Lexington, MA, 1982