

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

SKRYPT
MECHANIKA KLASYCZNA

wykładowca:
dr hab. Krzysztof Turzyński

Zespołowy projekt studencki
– członkowie:
MICHAŁ IDZIAKOWSKI,
ANNA LISICKA,
JAKUB ŁAGUNA,
ZUZANNA PERKOWSKA,
IWONA PIĘTKA

29 grudnia 2018

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Ruch punktu materialnego swobodnego	4
3	Prawa dynamiki punktu materialnego	7
4	Zasady zachowania w dynamice punktu materialnego	9
5	Dynamika układu punktów materialnych	11
6	Problem Keplera	16
7	Dynamika układu punktów materialnych z więzami	23
7.1	Klasyfikacja więzów	23
7.2	Równania Lagrange'a I rodzaju	23
8	Dynamika układu punktów materialnych z więzami holonomicznymi doskonałymi	26
8.1	Równania Lagrange'a II rodzaju	27
8.1.1	Zasady zachowania	30
8.1.2	Lagranżjany L oraz $L' = L + \frac{d}{dt}\psi$ prowadzą do tych samych równań Lagrange'a II rodzaju	32
8.1.3	Siła Lorentza	32
8.1.4	Cząstka swobodna	33
8.2	Zasada (najmniejszego) ekstremalnego działania Hamiltona	34
8.2.1	Oscylator harmoniczny	35
9	Małe drgania	36
10	Mechanika bryły sztywnej	42
10.1	Opis położenia i prędkości	42
10.2	Energia bryły sztywnej	43
10.3	Tensor momentu bezwładności	43
10.4	Moment pędu	45
10.5	Dynamika bryły sztywnej	45
10.6	Prawa zachowania	46
10.7	Kąty Eulera	46
10.8	Bąk swobodny	47
11	Równania Hamiltona	49
12	Równanie Hamiltona-Jacobiego	54
13	Teoria zderzeń	57
14	Przekształcenia kanoniczne	65
15	Szczególna teoria względności	68
15.1	Problemy z zasadą względności	68
15.2	Elementy szczególnej teorii względności	68
15.3	Transformacja Lorentza	68
15.4	Wnioski z transformacji Lorentza	70
15.4.1	Transformacja Galileusza	70
15.4.2	Dylatacja czasu	70
15.4.3	Skrócenie Lorentza	70
15.4.4	Transformacja prędkości	71
15.4.5	Okrąg w kształcie kielbasy	71

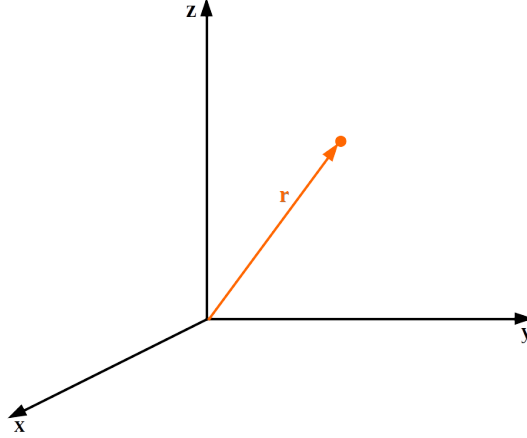
15.4.6 Kula w kształcie kuli	73
16 Dynamika relatywistyczna	73
16.1 Pęd w dynamice relatywistycznej	73
16.2 Pęd	77
16.3 Siła	77
16.4 Energia	77
16.5 Transformacja Lorentza energii i pędu	77
17 Elementy rachunku wariacyjnego	82

1 Wstęp

Praca ta została napisana w semestrze zimowym roku akademickiego 2018/2019 na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Jej autorami są: Michał Idziakowski, Anna Lisicka, Jakub Łaguna, Zuzanna Perkowska, Iwona Piętka. Nadzór merytoryczny sprawował dr hab. Krzysztof Turzyński. Celem niniejszego projektu było napisanie skryptu obejmującego zagadnienia przedstawiane przez dr hab. Krzysztofa Turzyńskiego w trakcie wykładów poświęconych mechanice klasycznej.

2 Ruch punktu materialnego swobodnego

Ruch punktu materialnego jest względny, czyli zależy od układu odniesienia. W wybranym układzie odniesienia do opisanania ruchu punktu materialnego potrzebna jest zależność wektora położenia punktu materialnego \vec{r} od czasu t , czyli $\vec{r} = \vec{r}(t)$.



Rysunek 1: Wektor położenia punktu materialnego \vec{r} w układzie xyz (nieprimowanym)

Położenie punktu materialnego:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Prędkość punktu materialnego:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = \dot{x}(t)\hat{e}_x + \dot{y}(t)\hat{e}_y + \dot{z}(t)\hat{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Przyśpieszenie punktu materialnego:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}(t)\hat{e}_x + \ddot{y}(t)\hat{e}_y + \ddot{z}(t)\hat{e}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Względność ruchu

Przechodząc z układu xyz (nieprimowanego) do układu $x'y'z'$ (primowanego) dla wektora położenia punktu materialnego zachodzi zależność:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}' \quad (1)$$

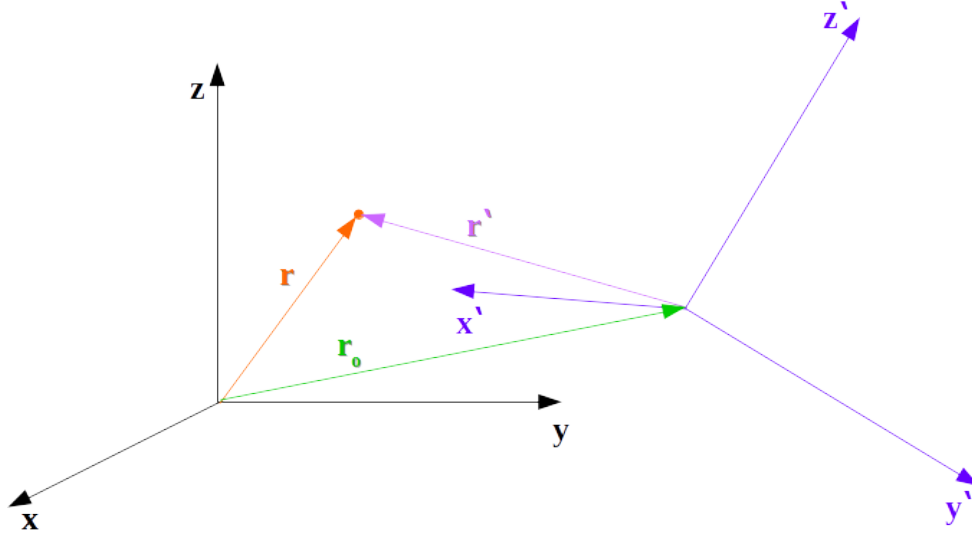
Położenie punktu materialnego \vec{r} względem układu xyz (nieprimowanego) jest równa sumie położenia \vec{r}_o początku układu $x'y'z'$ (primowanego) względem układu xyz (nieprimowanego) i położenia punktu materialnego \vec{r}' względem układu $x'y'z'$ (primowanego).

Położenie \vec{r} punktu materialnego w układzie xyz (nieprimowanym):

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z ,$$

gdzie: $x = \vec{r} \cdot \hat{e}_x$, $y = \vec{r} \cdot \hat{e}_y$, $z = \vec{r} \cdot \hat{e}_z$, zatem:

$$\vec{r} = \sum_{k=\{xyz\}} (\vec{r} \cdot \hat{e}_k) \hat{e}_k \quad (2)$$



Rysunek 2: Punkt materialny w układzie xyz (nieprimowanym) oraz w układzie $x'y'z'$ (primowanym)

Położenie \vec{r}' punktu materialnego w układzie $x'y'z'$ (primowanym):

$$\vec{r}' = x' \hat{e}'_x + y' \hat{e}'_y + z' \hat{e}'_z,$$

gdzie: $x' = \vec{r}' \cdot \hat{e}'_x$, $y' = \vec{r}' \cdot \hat{e}'_y$, $z' = \vec{r}' \cdot \hat{e}'_z$, zatem:

$$\vec{r}' = \sum_{j=\{x'y'z'\}} (\vec{r}' \cdot \hat{e}'_j) \hat{e}'_j. \quad (3)$$

Podstawiając do równania (1) równania (2), (3) otrzymano:

$$\sum_{k=\{xyz\}} (\vec{r} \cdot \hat{e}_k) \hat{e}_k = \vec{r}_o + \sum_{j=\{x'y'z'\}} (\vec{r}' \cdot \hat{e}'_j) \hat{e}'_j,$$

mnożąc obustronnie przez \hat{e}_i i pamiętając o zależności: $\hat{e}_k \cdot \hat{e}_i = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$ otrzymano:

$$\vec{r} \cdot \hat{e}_i = \vec{r}_o \cdot \hat{e}_i + \sum_{j=\{x'y'z'\}} (\vec{r}' \cdot \hat{e}'_j) (\hat{e}'_j \cdot \hat{e}_i)$$

Ruch $\vec{r} \cdot \hat{e}_i$ w układzie xyz (nieprimowanym): składa się z ruchu $\vec{r}' \cdot \hat{e}'_j$ w układzie $x'y'z'$ (primowanym), ruchu postępowego $\vec{r}_o \cdot \hat{e}_i$ początku układu $x'y'z'$ (primowanego) i ruchu obrotowego $\alpha_{ji} = \hat{e}'_j \cdot \hat{e}_i$ osi układu $x'y'z'$ (primowanego) względem układu xyz (nieprimowanego).

Zmieniając układ odniesienia potrzebne jest 6 parametrów:

- 3 parametry od $\vec{r}_o \cdot \hat{e}_i$
- 3 parametry od α_{ji} .

W celu wyprowadzenia wzorów na przejście z układu xyz (nieprimowanego) do układu $x'y'z'$ (primowanego) zachodzi zależność dla wektora prędkości i wektora przyspieszenia punktu materialnego, przeprowadzono obliczenia dla dowolnego wektora \vec{B} , pamiętając że wersory \hat{e}_k układu xyz (nieprimowanego) są stałe – niezależne od czasu, a wersory \hat{e}'_j układu $x'y'z'$ (primowanego) są zależne od czasu: $\hat{e}'_j = \hat{e}'_j(t)$.

Rozłożono na składowe wektor \vec{B} i obliczono pochodną po czasie tego wektora w obu układach odniesienia:

- układ xyz (nieprimowany)

$$\vec{B} = B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y + B_z \hat{e}_z \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{dB_x}{dt} \hat{e}_x + \frac{dB_y}{dt} \hat{e}_y + \frac{dB_z}{dt} \hat{e}_z ,$$

- układ $x'y'z'$ (primowany)

$$\vec{B} = B'_x \hat{e}'_x + B'_y \hat{e}'_y + B'_z \hat{e}'_z \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{dB'_x}{dt} \hat{e}'_x + \frac{dB'_y}{dt} \hat{e}'_y + \frac{dB'_z}{dt} \hat{e}'_z + B'_x \frac{d\hat{e}'_x}{dt} + B'_y \frac{d\hat{e}'_y}{dt} + B'_z \frac{d\hat{e}'_z}{dt} .$$

Pierwsze trzy składniki różniczki wektora \vec{B} po czasie t są pochodną czasową wektora \vec{B} w układzie $x'y'z'$ (primowanym):

$$\frac{dB'_x}{dt} \hat{e}'_x + \frac{dB'_y}{dt} \hat{e}'_y + \frac{dB'_z}{dt} \hat{e}'_z = \frac{d'\vec{B}}{dt} .$$

Ostatnie trzy składniki różniczki wektora \vec{B} po czasie t rozłożono na składowe w układzie $x'y'z'$ (primowanym):

$$\begin{aligned} B'_x \frac{d\hat{e}'_x}{dt} + B'_y \frac{d\hat{e}'_y}{dt} + B'_z \frac{d\hat{e}'_z}{dt} &= B'_x [(\dot{\hat{e}}'_x \cdot \hat{e}'_x) \hat{e}'_x + (\dot{\hat{e}}'_x \cdot \hat{e}'_y) \hat{e}'_y + (\dot{\hat{e}}'_x \cdot \hat{e}'_z) \hat{e}'_z] + \\ &+ B'_y [(\dot{\hat{e}}'_y \cdot \hat{e}'_x) \hat{e}'_x + (\dot{\hat{e}}'_y \cdot \hat{e}'_y) \hat{e}'_y + (\dot{\hat{e}}'_y \cdot \hat{e}'_z) \hat{e}'_z] + \\ &+ B'_z [(\dot{\hat{e}}'_z \cdot \hat{e}'_x) \hat{e}'_x + (\dot{\hat{e}}'_z \cdot \hat{e}'_y) \hat{e}'_y + (\dot{\hat{e}}'_z \cdot \hat{e}'_z) \hat{e}'_z] \end{aligned} \quad (4)$$

Korzystając z zależności (przykładowych):

$$\begin{aligned} \hat{e}'_x \cdot \hat{e}'_x &= 1 & \xrightarrow{\frac{d}{dt}} & 2 \dot{\hat{e}}'_x \cdot \hat{e}'_x = 0 \\ \hat{e}'_x \cdot \hat{e}'_y &= 0 & \xrightarrow{\frac{d}{dt}} & \dot{\hat{e}}'_x \cdot \hat{e}'_y + \hat{e}'_x \cdot \dot{\hat{e}}'_y = 0 , \end{aligned}$$

zauważono, że dla $i = \{x, y, z\}$: $\dot{\hat{e}}'_i \cdot \hat{e}'_i = 0$ oraz dla $i = \{x, y, z\}$ i $j = \{x, y, z\}$, $j \neq i$: $\dot{\hat{e}}'_i \cdot \hat{e}'_j = -\dot{\hat{e}}'_j \cdot \hat{e}'_i$, zatem uproszczono równanie (4):

$$\begin{aligned} B'_x \frac{d\hat{e}'_x}{dt} + B'_y \frac{d\hat{e}'_y}{dt} + B'_z \frac{d\hat{e}'_z}{dt} &= B'_x [(\dot{\hat{e}}'_x \cdot \hat{e}'_y) \hat{e}'_y - (\dot{\hat{e}}'_x \cdot \hat{e}'_z) \hat{e}'_z] + \\ &+ B'_y [-(\dot{\hat{e}}'_x \cdot \hat{e}'_y) \hat{e}'_x + (\dot{\hat{e}}'_y \cdot \hat{e}'_z) \hat{e}'_z] + \\ &+ B'_z [(\dot{\hat{e}}'_z \cdot \hat{e}'_x) \hat{e}'_x - (\dot{\hat{e}}'_y \cdot \hat{e}'_z) \hat{e}'_y] \end{aligned}$$

Prędkość kątowna $\vec{\omega}$ w układzie kartezjańskim wynosi $\vec{\omega} = (\dot{\hat{e}}'_y \cdot \hat{e}'_z) \hat{e}'_x + (\dot{\hat{e}}'_z \cdot \hat{e}'_x) \hat{e}'_y + (\dot{\hat{e}}'_x \cdot \hat{e}'_y) \hat{e}'_z$, czyli:

$$\vec{\omega} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \hat{e}'_x & \hat{e}'_y & \hat{e}'_z \\ \dot{\hat{e}}'_y \cdot \hat{e}'_z & \dot{\hat{e}}'_z \cdot \hat{e}'_x & \dot{\hat{e}}'_x \cdot \hat{e}'_y \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{pmatrix} = B'_x \frac{d\hat{e}'_x}{dt} + B'_y \frac{d\hat{e}'_y}{dt} + B'_z \frac{d\hat{e}'_z}{dt} .$$

Zatem otrzymano ostatecznie:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{d'\vec{B}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{B} \quad (5)$$

Należy zwrócić uwagę, że nie jest ważne, który układ (xyz czy $x'y'z'$) bada zmienność prędkości kątownej, gdyż:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{d'\vec{B}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} ,$$

przy czym $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$, czyli:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{d'\vec{B}}{dt} .$$

Korzystając z wyprowadzonego wzoru (5), otrzymano wzór na względność prędkości:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_o + \vec{r}') = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_o + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' . \quad (6)$$

Prędkość punktu materialnego \vec{v} względem układu xyz (nieprimowanego) jest równa sumie prędkości ruchu postępowego \vec{v}_o początku układu $x'y'z'$ (primowanego), prędkości punktu materialnego \vec{v}' względem układu $x'y'z'$ (primowanego) oraz prędkości $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ odpowiadającej ruchowi obrotowemu osi układu $x'y'z'$ (primowanego) względem układu xyz (nieprimowanego).

Następnie korzystając ze wzorów (5), (6), wyprowadzono wzór na względność przyspieszenia:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_o + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') ,$$

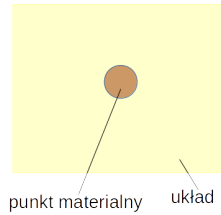
gdzie: $\frac{d\vec{v}_o}{dt} = \vec{a}_o$, $\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$, $\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}') = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$,
zatem otrzymano wzór na względność przyspieszenia:

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{a}' + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') . \quad (7)$$

Przyspieszenie punktu materialnego \vec{a} względem układu xyz (nieprimowanego) jest równa sumie przyspieszenia ruchu postępowego \vec{a}_o początku układu $x'y'z'$ (primowanego), przyspieszenia punktu materialnego \vec{a}' względem układu $x'y'z'$ (primowanego), przyspieszenia $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$ związanego z przyspieszeniem kątowym $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ruchu obrotowemu osi układu $x'y'z'$ (primowanego), przyspieszenia Coriolisa $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ i przyspieszenia dośrodkowego $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$.

3 Prawa dynamiki punktu materialnego

Układ składa się z punktu materialnego i otoczenia.



Rysunek 3: Model układu

I prawo Newtona, zasada Galileusza

Istnieją inercjalne układy odniesienia, tzn. takie układy odniesienia, że gdy na dane ciało nie działa żadna siła (=ciało nie oddziałuje z otoczeniem), to ciało spoczywa lub porusza się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością.

II prawo Newtona

W inercjalnym układzie odniesienia zachodzi $\vec{F} = m\vec{a}$, gdzie: m jest masą (miarą ilości substancji), \vec{F} – siłą (wpływem otoczenia na punkt materialny, miarą oddziaływania). Siła \vec{F} zależy od położenia \vec{r} , prędkości \vec{v} i czasu t : $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Siła \vec{F} nie zależy od masy m i przyspieszenia \vec{a} .

II prawo Newtona jest prawem fizycznym, a nie wzorem na siłę.

Uwaga

- Zgodnie z I prawem Newtona istnieje układ inercjalny. Na mocy II prawa Newtona wywnioskowano, że istnieje nieskończenie wiele układów inercjalnych.

Dla dwóch układów odniesienia (nieprimowanego i primowanego), których początki poruszają się ze stałą prędkością \vec{v}_o wzdłuż linii prostej czyli bez obrotu $\vec{\omega} = 0$, zachodzi:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_o + \vec{r}' \\ \vec{r}_o &= \vec{r}_{o_p} + \vec{v}_o(t - t_o) \\ \vec{v} &= \vec{v}_o + \vec{v}' \\ \vec{a} &= \vec{a}' \end{aligned} ,$$

gdzie \vec{r}_{o_p} jest położeniem początku układu $x'y'z'$ (primowanego) w chwili początkowej t_o .

W związku z tym, dlatego, że początki obu układów (nieprimowanego i primowanego) poruszają się ze stałą prędkością wzdłuż linii prostej, to jeśli jeden układ (np. nieprimowany) jest układem inercjalnym to drugi (np. primowany) też; a takich układów może być nieskończenie wiele.

- Rozważono zestaw położeń:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_{o_p} + \vec{v}_o(t - t_o) + \alpha \vec{r}' \\ t &= t_o + t' \end{aligned} ,$$

gdzie α jest macierzą ortogonalną, macierzą obrotu. Jest to sytuacja ogólniejsza, gdyż rozważono transformację: przesuwanie się jednostajnie względnie układu xyz (nieprimowanego) i $x'y'z'$ (primowanego), ale układ $x'y'z'$ (primowany) jest stale obracany względem układu xyz (nieprimowanego).

Występują wtedy następujące relacje równoważności w układzie odniesienia: 3 przesunięcia + 3 obroty + 3 przesunięcia narastające liniowo + 1 przesunięcie współrzędnej czasowej = 10 parametrów. Jest to struktura grupy ciągłej – grupa Galileusza.

- W dwóch układach inercjalnych ($\vec{a} = \vec{a}'$, $m = m'$) prawa dynamiki są niezależne od wyboru inercjalnego układu odniesienia.
- $\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ jest równaniem różniczkowym zwyczajnym II rzędu, zatem istnieje jednoznaczne rozwiązanie dla danych warunków początkowych.
- W przeprowadzanych rozważaniach układ xyz (nieprimowany) jest inercjalny, a układ $x'y'z'$ (primowany) nie musi być inercjalny.
- W układzie niekoniecznie inercjalnym zachodzi:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_o - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') , \quad (8)$$

w równaniu ruchu Newtona oprócz siły oddziaływania należy uwzględnić siły bezwładności: związaną z przyspieszeniem w ruchu postępowego układu ($-m\vec{a}_o$) i przyspieszeniem kątowym w ruchu obrotowym układu ($-m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$), siłą Coriolisa ($-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$) i siłą odśrodkową ($-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$). Siły bezwładności są korektą ze względu na nieinercjalny układ odniesienia.

Przykład

Początki dwóch układów odniesienia (xyz (nieprimowany) i $x'y'z'$ (primowany)) znajdują się, w tym samym punkcie ($\vec{r}_o = 0$, $\vec{v}_o = 0$, $\vec{v}' = 0$). Układ $x'y'z'$ (primowany) obraca się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = const$.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' \\ \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r}' \end{aligned}$$

Przeprowadzono analizę sił działających na punkt materialny o masie m , który porusza się po okręgu o promieniu R , ze stałą prędkością kątową ω . Układ $x'y'z'$ (primowany) jest układem odniesienia związanym z punktem materialnym o masie m .

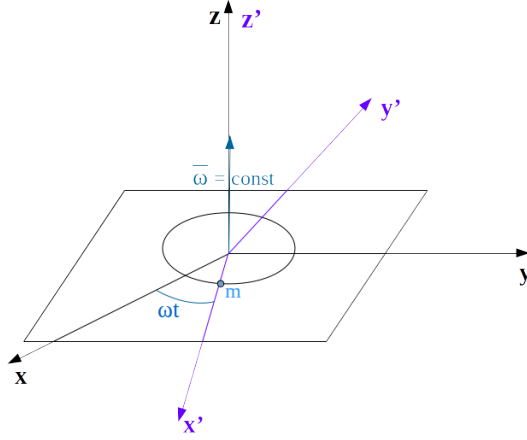
- układ xyz (nieprimowany)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0) \\ \vec{v} &= (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, 0) \\ \vec{a} &= (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t, 0) = -\omega^2 \vec{r} \end{aligned}$$

$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 \vec{r}$ jest to siła dośrodkowa powodująca ruch po okręgu punktu materialnego o masie m .

- układ $x'y'z'$ (primowany)

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= (R, 0, 0) \\ \vec{v}' &= (0, 0, 0) \\ \vec{a}' &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$



Rysunek 4: Dwa układy odniesienia zaczepione w tym samym punkcie, układ $x'y'z'$ obraca się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}' = \det \begin{pmatrix} \hat{e}'_x & \hat{e}'_y & \hat{e}'_z \\ 0 & 0 & \omega \\ R & 0 & 0 \end{pmatrix} = R\omega \hat{e}'_y, \quad \text{we współrzędnych } xyz: \vec{\omega} \times \vec{r}' = R\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0)$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = R\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0)$$

Siły bezwładności występujące we wzorze (8) wynoszą:

$$-m\vec{a}_o = 0 \quad \text{gdyż brak względnego ruchu początków układów } xyz \text{ i } x'y'z' \ (\vec{r}_o = 0 \Rightarrow \vec{a}_o = 0)$$

$$-2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = 0 \quad \text{gdyż } \vec{v}' = 0$$

$$-m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' = 0 \quad \text{gdyż } \vec{\omega} = \text{const}$$

$$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -m \det \begin{pmatrix} \hat{e}'_x & \hat{e}'_y & \hat{e}'_z \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & R\omega & 0 \end{pmatrix} = mR\omega^2 \hat{e}'_x = m\omega^2 \vec{r}' = m\omega^2 \vec{r} \quad \text{jest siłą odśrodkową}$$

Zatem podstawiając obliczone dane do wzoru (8) otrzymano: $0 = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$. W układzie związanym z punktem materialnym o masie m punkt ten pozostaje w spoczynku.

4 Zasady zachowania w dynamice punktu materialnego

Rozwiązując równania różniczkowe zupełne postaci: $\frac{d}{dt}C(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$, $\frac{d}{dt}C(\vec{r}, t) = 0$

otrzymano pierwszą całkę ruchu: $C(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \text{const}$ oraz drugą całkę ruchu: $C(\vec{r}, t) = \text{const}$.

Całka ruchu jest stała w czasie, istnieje zasada jej zachowania.

Zasada zachowania pędu

Pęd: $\vec{p} = m\vec{v}$

II prawo Newtona:

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (9)$$

Przykład:

Siła jest skierowana w kierunku osi x : $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t) = F(\vec{r}, t)\hat{e}_x$, wtedy rozpisując równanie ruchu na poszczególne składowe:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} p_x$$

$$0 = \frac{d}{dt} p_y \Rightarrow p_y = m\dot{y} = \text{const} \quad ,$$

$$0 = \frac{d}{dt} p_z \Rightarrow p_z = m\dot{z} = \text{const}$$

otrzymano 2 całki pierwsze ruchu. Ruch w składowych y i z się nie zmienia.

Zasada zachowania momentu pędu

Moment pędu: $\vec{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$ jest to całka pierwsza ruchu

Moment siły: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (m\dot{\vec{v}}) = m(\vec{r} \times \dot{\vec{v}}) = m \left[\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) - \vec{v} \times \vec{v} \right]$, pamiętając, że $\vec{v} \times \vec{v} = 0$, $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

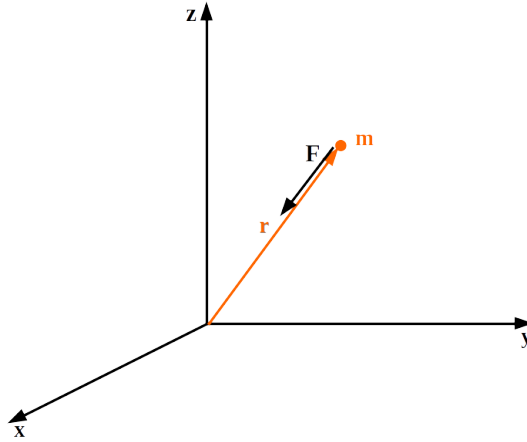
Przypadki:

- swobodny ruch materialny

W swobodnym ruchu materialnym siła \vec{F} jest równa 0, zatem moment siły \vec{M} z definicji:

$$\vec{M} = 0, \text{ czyli } \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}, \text{ otrzymano 3 całki pierwsze ruchu.}$$

- kulisty układ współrzędny



Rysunek 5: Siła centralna \vec{F} w kulistym układzie współrzędnych

Działającą siłą jest siła centralna \vec{F} , która w kulistym układzie współrzędnych jest skierowana wzdłuż promienia wodzącego \vec{r} : $\vec{F} = F\hat{e}_r$, zatem moment siły \vec{M} z definicji: $\vec{M} = \vec{r} \times (F\hat{e}_r) = 0$, gdyż wektory \vec{r} i \vec{F} są równoległe, czyli $\vec{L} = \text{const}$, otrzymano 3 całki pierwsze ruchu.

W przypadku siły w polu siły centralnej jest zachowany moment pędu.

Zachowanie momentu pędu oznacza, że ruch odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do momentu pędu.

Zasada zachowania energii

- energia kinetyczna: $T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$

Pochodna energii kinetycznej po czasie:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = m \vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad (10)$$

- energia potencjalna

Jeśli istnieje siła potencjalna $\vec{F}(\vec{r}, t)$ to istnieje dla niej energia potencjalna V , którą definiuje się po przez równanie: $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\nabla V(\vec{r}, t)$.

Twierdzenie matematyczne dla obszaru jednospójnego (w tym dla trójwymiarowej przestrzeni):

$$\nabla \vec{F} \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla V.$$

Dalsze rozważania będą przeprowadzane dla siły potencjalnej zachowawczej, czyli siły potencjalnej niezależnej od czasu: $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right)$.

Pochodna energii potencjalnej zachowawczej po czasie:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}) = \frac{dV}{dx}\dot{x} + \frac{dV}{dy}\dot{y} + \frac{dV}{dz}\dot{z} = -F_x\dot{x} - F_y\dot{y} - F_z\dot{z} = -\vec{F} \cdot \vec{v} = -\vec{v} \cdot \vec{F} \quad (11)$$

- całkowita energia mechaniczna jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej: $E = T + V$
Pochodna energii mechanicznej zachowawczej po czasie:

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}T + \frac{d}{dt}V,$$

korzystając ze wzorów (10), (11) otrzymano:

$$\frac{d}{dt}E = \vec{v} \cdot \vec{F} - \vec{v} \cdot \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = const,$$

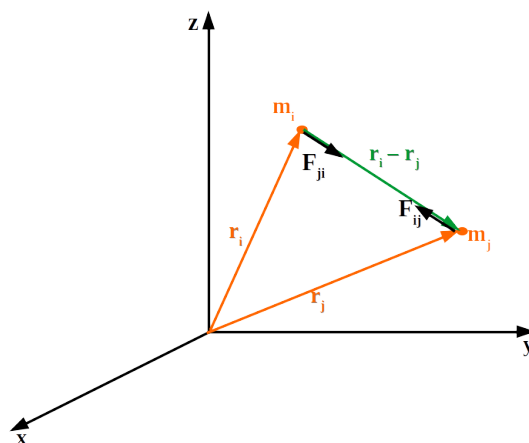
otrzymano pierwszą całkę ruchu. Zatem o ile rozpatrywana jest siła potencjalna zachowawcza to całkowita energia jest zachowana.

5 Dynamika układu punktów materialnych

Rozważono układ n punktów materialnych o:

- masach m_i ,
- położeniach \vec{r}_i ,
- siłach wewnętrznych \vec{F}_{ij} oddziaływania j -tego punktu na i -ty (siły wzajemnego oddziaływania)
- siłach zewnętrznych \vec{F}_{oi} oddziałujących na i -ty punkt (oddziaływanie z otoczeniem)

$(i, j = 1, \dots, n)$.



Rysunek 6: Oddziaływanie pomiędzy punktami: i -tym i j -tym

III prawo Newtona:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (12)$$

Równania ruchu Newtona w układzie inercyjnym są układem $3n$ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu na $3n$ niewiadomych $\vec{r}_i(t)$:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{oi} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = \vec{F}_i . \quad (13)$$

Środek masy układu n punktów materialnych:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i , \quad (14)$$

gdzie M jest całkowitą masą:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i . \quad (15)$$

Można wyróżnić układ środka masy CM . Przy zmianie układu odniesienia z układu xyz do CM otrzymano: $\vec{R} = \vec{r}_o + \vec{R}'$. W układzie CM zachodzi: $\vec{r}_o = \vec{R}$, zatem $\vec{R}' = 0$.

Pęd układu:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i .$$

korzystając ze wzoru (14) otrzymano:

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}} . \quad (16)$$

Pochodna pędu układu po czasie:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} ,$$

korzystając z II prawa Newtona – wzór (9) i ze wzoru (13) otrzymano:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}_{oi} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{oi} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} ,$$

korzystając z III prawa Newtona – wzór (12): $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = 0$ otrzymano:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{oi} = \vec{F}_o .$$

Pochodna pędu układu po czasie przy skorzystaniu ze wzoru (16) :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \ddot{\vec{R}} ,$$

Otrzymano II zasadę dynamiki dla układu punktów materialnych:

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_o , \quad (17)$$

gdzie \vec{F}_o jest wypadkową siłą zewnętrzną działającą na układ. Zatem opis ruchu układu punktów materialnych jako ruchu punktu materialnego jest związany z ruchem środka masy układu.

W izolowanym układzie punktów materialnych, czyli takim, w którym siły zewnętrzne są równe 0: $\vec{F}_{oi} = 0 \Rightarrow \vec{F}_o = 0$, zgodnie ze wzorem (17) zachodzi: $M \ddot{\vec{R}} = 0$, zatem środek masy układu porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_o(t) + \frac{1}{M} \vec{P}_o t .$$

Moment pędu układu względem początku układu odniesienia:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i ,$$

wtedy pochodna momentu pędu układu po czasie:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i ,$$

pamiętając, że $\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0$ i korzystając ze wzoru (13) otrzymano:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_{oi} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{oi} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} ,$$

pierwszy składnik jest sumarycznym momentem sił zewnętrznych $\vec{M}_o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{oi}$, zamieniając kolejność sumowania w trzecim składniku zachodzi: $\begin{cases} \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_j \\ \vec{F}_{ij} \rightarrow \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \end{cases}$, wtedy:

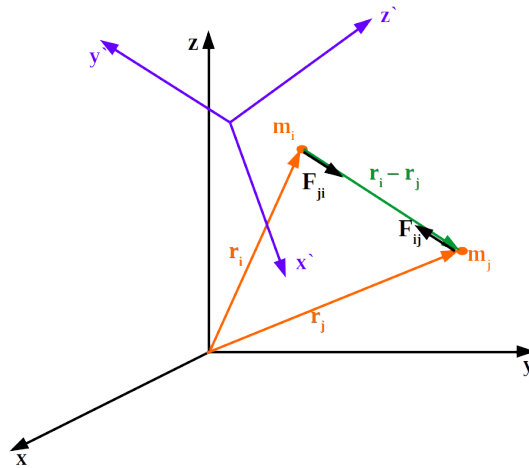
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_o + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} ,$$

pamiętając, że $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \parallel \vec{F}_{ij}$, czyli moment sił wewnętrznych $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$, zatem otrzymano:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_o .$$

Rozważono dwa układy odniesienia: układ xyz (nieprimowany) oraz układ $x'y'z'$ (primowany) – środka masy CM . Przechodząc z układu xyz (nieprimowanego) do układu $x'y'z'$ (primowanego) zachodzą zależności (wyprowadzone w Rozdziale 2):

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_o + \vec{r}'_i \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_o + \vec{v}'_i + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i \end{aligned} , \quad (18)$$



Rysunek 7: Oddziaływanie pomiędzy punktami: i -tym i j -tym w dwóch układach odniesienia: w układzie xyz (nieprimowanym) oraz w układzie $x'y'z'$ (primowanym) – środka masy CM

Dla układu CM zachodzi: $\vec{r}_o = \vec{R}$, $\vec{R}' = 0$. Dodatkowo założono, że nie występuje względny obrót układów xyz i $x'y'z'$: $\vec{\omega} = 0$. W takiej sytuacji przechodząc z układu xyz (nieprimowanego) do układu CM (środka masy) zachodzi zależność dla wektora momentu pędu układu:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \stackrel{(18)}{=} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_o + \vec{r}'_i) \times (\vec{v}_o + \vec{v}'_i + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_o \times \vec{v}_o + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_o \times \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_o \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_o + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) , \end{aligned} \quad (19)$$

Kolejne składniki powyższej sumy wynoszą:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_o \times \vec{v}_o = M \vec{R} \times \vec{v}_o \quad \text{gdź wzór (15) na całkowitą masę oraz } \vec{r}_o = \vec{R} \text{ (układ } CM)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_o \times \vec{v}'_i = \vec{r}_o \times \frac{d}{dt} M \vec{R}' = 0 \quad \text{gdź wzór (14) na środek masy oraz } \vec{R}' = 0 \text{ (układ } CM)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_o \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = 0 \quad \text{gdź } \vec{\omega} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_o = M \vec{R}' \times \vec{v}_o = 0 \quad \text{gdź wzór (14) na środek masy oraz } \vec{R}' = 0 \text{ (układ } CM)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i = \vec{r}_o \times \frac{d}{dt} M \vec{R}' = \vec{L}_s \quad \text{gdzie } \vec{L}_s \text{ jest momentem pędu względem środka masy}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = 0 \quad \text{gdź } \vec{\omega} = 0$$

Zatem podstawiając obliczone powyżej składniki do wzoru (19) otrzymano:

$$\vec{L} = M \vec{R} \times \vec{v}_o + \vec{L}_s = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_s$$

Energia układu:

- energia kinetyczna:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

- energia potencjalna dla siły potencjalnej:

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$$

- energia potencjalna dla siły potencjalnej zachowawczej:

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \quad (20)$$

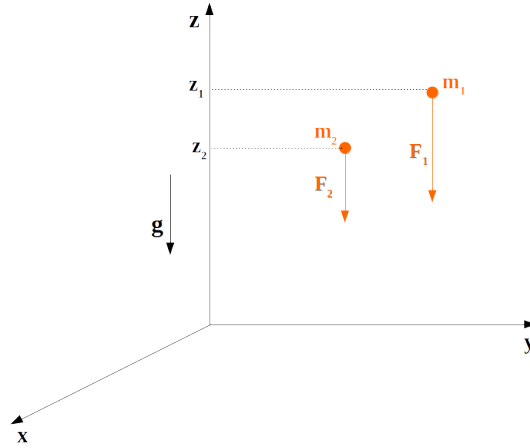
- całkowita energia mechaniczna: $E = T + V = const$

Przykład:

Rozważono dwa ciała, które niezależnie oddziałują z otoczeniem – polem grawitacyjnym, przedstawiono na Rysunku 8.

Przyśpieszenie ziemskie \vec{g} skierowane jest wzdłuż osi z : $\vec{g} = -g\hat{e}_z$. Siły działające na oba ciała są skierowane wzdłuż osi z . Siła działająca na ciało 1 wynosi: $\vec{F}_1 = -m_1 g \hat{e}_z$, siła działająca na ciało 2: $\vec{F}_2 = -m_2 g \hat{e}_z$.

Energia potencjalna dla siły działająca na ciało 1 wynosi: $V(\vec{r}_1) = m_1 g z_1$, energia potencjalna dla siły działająca na ciało 2 wynosi: $V(\vec{r}_2) = m_2 g z_2$. Energia potencjalna układu wynosi zatem: $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$. Korzystając ze wzoru (20) obliczono poszczególne składowe każdej z sił \vec{F}_1, \vec{F}_2 :



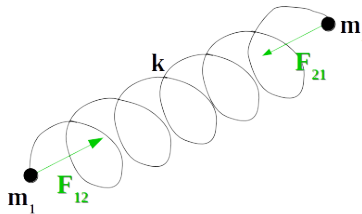
Rysunek 8: Dwa ciała, które niezależnie oddziałują z otoczeniem – polem grawitacyjnym

$$\begin{aligned}
 F_{1x} &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 & F_{2x} &= -\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \\
 F_{1y} &= -\frac{\partial V}{\partial y_1} = 0 & F_{2y} &= -\frac{\partial V}{\partial y_2} = 0 \\
 F_{1z} &= -\frac{\partial V}{\partial z_1} = -m_1g & F_{2z} &= -\frac{\partial V}{\partial z_2} = -m_2g
 \end{aligned}$$

Obliczając składowe sił potencjalnych zachowawczych, znając energię potencjalną układu otrzymano poprawne wartości sił.

Przykład:

Rozważono dwa ciała, które oddziałują ze sobą – są połączone sprężyną o współczynniku sprężystości k .



Rysunek 9: Oddziaływanie między ciałami

Energia potencjalna układu: $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2}k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = \frac{1}{2}k[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]$ Korzystając ze wzoru (20) obliczono poszczególne składowe każdej z sił $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$:

$$\left. \begin{aligned}
 F_{12_x} &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_2) \\
 F_{12_y} &= -\frac{\partial V}{\partial y_1} = -k(y_1 - y_2) \\
 F_{12_z} &= -\frac{\partial V}{\partial z_1} = -k(z_1 - z_2)
 \end{aligned} \right\} \vec{F}_{12} = -k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 F_{12_x} &= -\frac{\partial V}{\partial x_2} = k(x_1 - x_2) \\
 F_{12_y} &= -\frac{\partial V}{\partial y_2} = k(y_1 - y_2) \\
 F_{12_z} &= -\frac{\partial V}{\partial z_2} = k(z_1 - z_2)
 \end{aligned} \right\} \vec{F}_{21} = -k(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Obliczając składowe sił potencjalnych zachowawczych, znając energię potencjalną układu otrzymano poprawne wartości sił.

Dla układu n punktów materialnych istnieje n równań ruchu: $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$. Rozkładając wektory $\ddot{\vec{r}}$ i \vec{F} na składowe otrzymano $3n$ równań różniczkowych drugiego rzędu (dla każdego równania potrzebne są 2 warunki początkowe), zatem potrzebne jest $6n$ warunków początkowych. Otrzymano zatem układ równań ruchu o rzędzie $6n$. Dla szczególnych przypadków można zredukować rząd układu równań ruchu, dzięki prawom zachowania:

wielkość	warunek	wzór	liczba stałych ruchu
pęd (środek masy)	układ jest izolowany	$\vec{R}(t) = \vec{R}_o(t) + \frac{1}{M} \vec{P}_o t$	6
moment pędu	działające siły są siłami centralnymi	$\vec{L} = const$	3
energia	działające siły są siłami potencjalnymi i zachowawczymi	$E = const$	1

W sumie jest 10 stałych ruchu, zatem zredukowany rząd układu równań ruchu wynosi $(6n - 10)$.

W Tabeli 1 podsumowano wiadomości o rzędzie układu równań ruchu.

Tabela 1: Układ równań ruchu

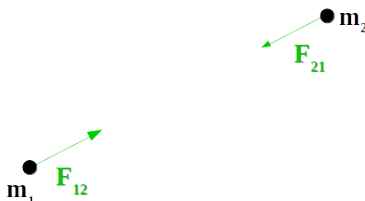
liczba punktów materialnych	liczba warunków początkowych	liczba praw zachowania	zostaje do rozwiązania równań
n	$6n$	10	$6n - 10$
2	12	10	2
3	18	10	8

6 Problem Keplera

Zagadnienie dwóch ciał

Rozważono sytuację o warunkach:

- układ jest izolowany
- siły wzajemnego oddziaływania są centralne, potencjalne, zachowawcze



Rysunek 10: Oddziaływanie pomiędzy dwoma ciałami

wtedy układ równań ruchu jest postaci:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} \end{cases} \quad (21)$$

Zgodnie z III prawem Newtona (12):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (22)$$

zatem równanie ruchu układu jest postaci:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 \quad (23)$$

Zgodnie ze wzorami (14), (15) środek masy układu dwóch ciał jest postaci:

$$\vec{R} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r}_2 \quad (24)$$

wtedy wzór (23) można zapisać:

$$M\ddot{\vec{R}} = 0 .$$

Do opisanego ruchu ciała 1 względem ciała 2 posłużono się następującymi zmiennymi:

- różnicą położenia ciała 1 i ciała 2:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 ,$$

$$\text{wtedy: } \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 \stackrel{(21)}{=} \frac{1}{m_1}\vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21} \stackrel{(22)}{=} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} = \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\vec{F}_{12}$$

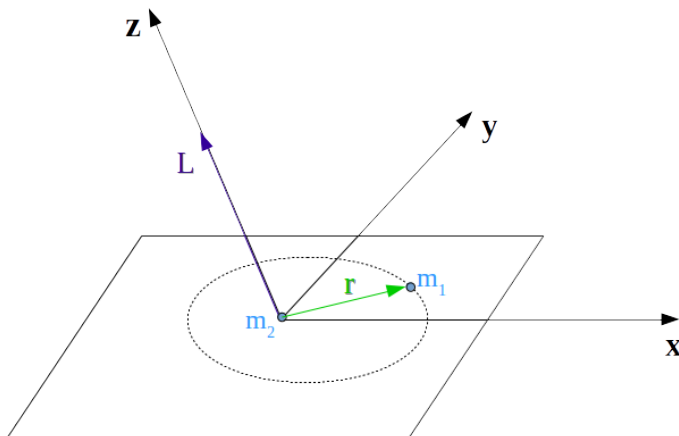
- masą zredukowaną układu dwóch ciał:

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (24)$$

Wtedy równanie ruchu ciała 1 względem ciała 2 można zapisać:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12} . \quad (25)$$

Na Rysunku 11 przedstawiono ruch ciała 1 względem ciała 2 (układ odniesienia zaczepiony jest w ciele 2).



Rysunek 11: Ruch ciała 1 względem ciała 2, przy wzajemnym oddziaływaniu

We współrzędnych biegunowych przedstawiono wektor \vec{r} :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} = \rho \hat{e}_\rho ,$$

oraz przyspieszenie $\ddot{\vec{r}}$:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi ,$$

i siłę \vec{F}_{12} (która jest siłą centralną):

$$\vec{F}_{12} = F\hat{e}_\rho .$$

Wtedy równanie (25) można rozłożyć na składowe:

- składowa radialna (\hat{e}_ρ):

$$\mu(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F \quad (26)$$

- składowa transwersalna (\hat{e}_φ):

$$\mu(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0 \quad (27)$$

Równanie (27) można zapisać w postaci:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) = 0$$

jest to równanie różniczkowe zwyczajne. Wtedy $\mu\rho^2\dot{\varphi} = \text{const}$, czyli $\mu\rho^2\dot{\varphi}$ jest stałą ruchu, ponieważ moment pędu we współrzędnych sferycznych jest postaci:

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu (\rho \hat{e}_\rho) \times (\dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi) = \mu \rho^2 \dot{\varphi} \hat{e}_z ,$$

czyli stała ruchu przedstawia zasadę zachowania momentu pędu.

Wyznaczając ze stałej ruchu $\dot{\varphi}$:

$$\mu\rho^2\dot{\varphi} = L \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu\rho^2} \quad (28)$$

i podstawiając do wzoru (26) otrzymano równanie różniczkowe zwyczajne II rzędu:

$$\mu \left(\ddot{\rho} - \rho \frac{L^2}{\mu^2 \rho^4} \right) = F ,$$

które po przekształceniu jest postaci:

$$\mu \ddot{\rho} - \frac{L^2}{\mu \rho^3} = F . \quad (29)$$

Problem Keplera

Oddziaływanie grawitacyjne między ciałem 1 i ciałem 2 wyraża się wzorem:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} , \quad (30)$$

gdzie G jest stałą grawitacyjną.

W celu rozwiązania zagadnienia dwóch ciał dla oddziaływania grawitacyjnego, za siłę F ze wzoru (29) podstawiono oddziaływanie grawitacyjne ze wzoru (30), czyli:

$$F = -\frac{\alpha}{\rho^2} ,$$

gdzie

$$\alpha = Gm_1m_2 . \quad (31)$$

Wtedy równanie (29) przyjmuje postać:

$$\mu \ddot{\rho} - \frac{L^2}{\mu \rho^3} = -\frac{\alpha}{\rho^2} . \quad (32)$$

Mnożąc obustronnie równanie (32) przez $\dot{\rho}$ i przenosząc wszystkie składniki na jedną stronę otrzymano:

$$\mu \dot{\rho} \ddot{\rho} - \frac{L^2}{\mu \rho^3} \dot{\rho} + \frac{\alpha}{\rho^2} \dot{\rho} = 0 . \quad (33)$$

Równanie (33) można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{L^2}{2\mu\rho^2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha}{\rho} \right) = 0$$

⇕

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho} \right) = 0 .$$

Otrzymano równanie różniczkowe zwyczajne, czyli:

$$\frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho} = \text{const} .$$

Otrzymaną stałą ruchu jest energia E :

$$\frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho} = E . \quad (34)$$

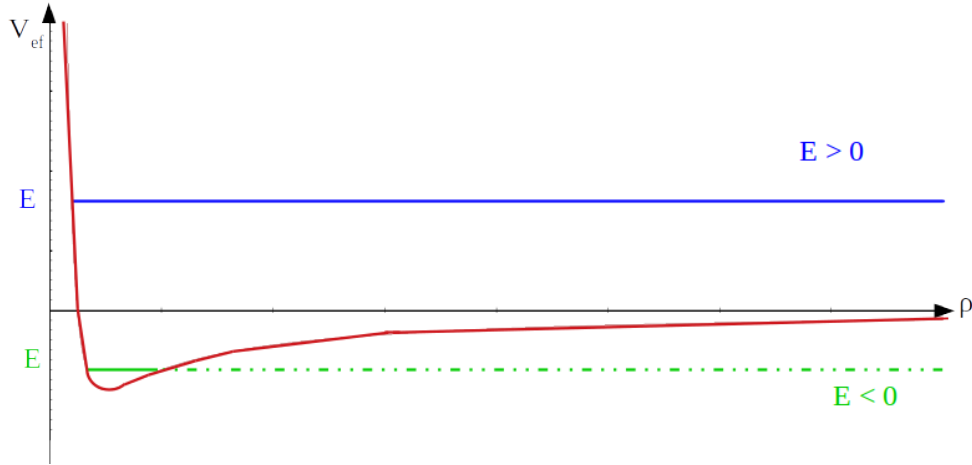
Poszczególne składniki równania (34) przedstawiają szczególne rodzaje energii:

- $\frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2$ jest energią kinetyczną ruchu radialnego
- $\frac{L^2}{2\mu\rho^2}$ jest energią kinetyczną ruchu transwersalnego
- $-\frac{\alpha}{\rho}$ jest energią potencjalną

W przypadku rozpatrywania sytuacji w 1 wymiarze (czyli np. przedstawionej powyżej) wypunktowane energie klasyfikuje się następująco:

- energia kinetyczna: $\frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2$ (energia kinetyczna ruchu radialnego)
- efektywna energia potencjalna: $V_{ef}(\rho) = \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho}$ (energia kinetyczna ruchu transwersalnego i energia potencjalna).

Rysunek 12 przedstawia analizę jakościową równania (34) - wykres zależności efektywnej energii potencjalnej $V_{ef}(\rho)$ od odległości ρ między ciałami 1 i 2. Granatowa linia przedstawia możliwe odległości ρ między ciałami 1 i 2 dla danej dodatniej energii, zielona linia – dla danej ujemnej energii. Dla ujemnej energii odległość ρ między ciałami 1 i 2 jest ograniczona.



Rysunek 12: Wykres zależności efektywnej energii potencjalnej $V_{ef}(\rho)$ od odległości ρ między ciałami 1 i 2

Następnie wyznaczono tor ruchu ciała 1 względem ciała 2 we współrzędnych biegunowych: ρ , φ . Najpierw przekształcono różniczkę $\dot{\rho}$:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \stackrel{(28)}{=} \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{L}{\mu\rho^2} = \frac{L}{\mu} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right). \quad (35)$$

Wtedy równanie (34) jest postaci:

$$E = \frac{\mu}{2} \frac{L^2}{\mu^2} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho} = \frac{L^2}{2\mu} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]^2 + \left(\frac{1}{\rho} \right)^2 - \frac{2\mu\alpha}{L^2} \frac{1}{\rho} \right] \quad (36)$$

W celu uzyskania przejrzystości kolejnych przekształceń zastosowano zmienną: $w = \frac{1}{\rho}$ i oznaczenie: $\frac{d}{d\varphi} = '$. Zatem równanie (36) jest postaci:

$$\frac{2\mu E}{L^2} = w'^2 + w^2 - \frac{2\mu\alpha}{L^2} w. \quad (37)$$

Otrzymano równanie różniczkowe I rzędu. Równanie (37) zróźniczkowano po $\frac{d}{d\varphi}$, otrzymano:

$$0 = 2w'w'' + 2ww' - \frac{2\mu\alpha}{L^2} w'$$

$$0 = 2w' (w'' + w - \frac{\mu\alpha}{L^2})$$

$$0 = w'' + w - \frac{\mu\alpha}{L^2}.$$

Otrzymano równanie różniczkowe niejednorodne II rzędu, którego rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest:

$$\text{RORJ: } w = A \cos(\varphi - \varphi_0) ,$$

gdzie A i φ_0 są dowolnymi stałymi; a rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego jest:

$$\text{RSRN: } w = \frac{\mu\alpha}{L^2} ,$$

czyli rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego jest:

$$\text{RORN: } w = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu\alpha}{L^2} .$$

Zatem podstawiając otrzymane rozwiązanie do równania (37) otrzymano:

$$\begin{aligned} \frac{2\mu E}{L^2} &= [-A \sin(\varphi - \varphi_0)]^2 + [A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu\alpha}{L^2}]^2 - \frac{2\mu\alpha}{L^2} [A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu\alpha}{L^2}] \\ \frac{2\mu E}{L^2} &= A^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0) + A^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) + 2A \frac{\mu\alpha}{L^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} - \frac{2\mu\alpha}{L^2} A \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{2\mu^2\alpha^2}{L^4} \\ \frac{2\mu E}{L^2} &= A^2 - \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} . \end{aligned}$$

Z powyższego równania wyznaczono stałą A :

$$A^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} .$$

Powrócono do pierwotnych zmiennych:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= w = \frac{\mu\alpha}{L^2} + \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4}} \cos(\varphi - \varphi_0) \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{\mu\alpha}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \\ \rho &= \frac{\frac{L^2}{\mu\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)} \end{aligned} \quad (38)$$

Po wprowadzeniu następujących zmiennych:

$$\begin{aligned} p &= \frac{L^2}{\mu\alpha} \\ \varepsilon &= \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \end{aligned} \quad (39)$$

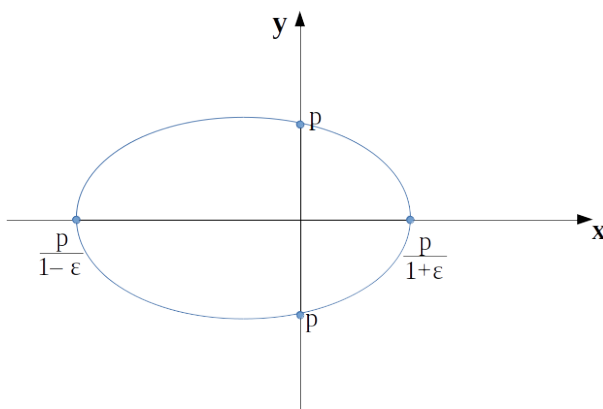
równanie (38) przyjmuje postać:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} . \quad (40)$$

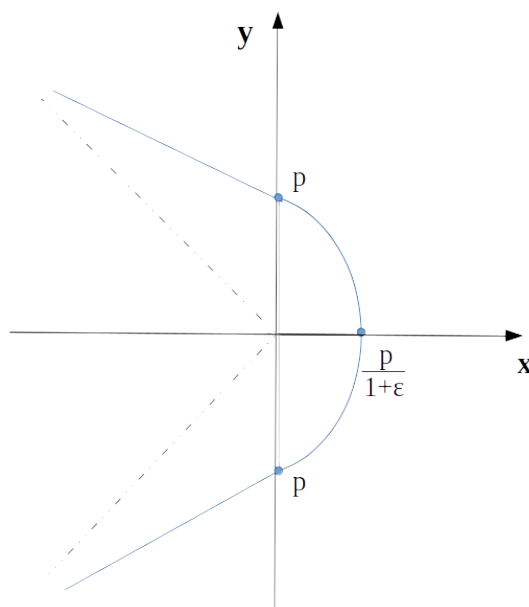
Otrzymano równanie biegunowe krzywej stopnia drugiego (czyli okręgu, elipsy, paraboli, hiperboli) z parametrem p i mimośrodem ε o ognisku w $\vec{\rho} = 0$.

Dla następujących wartości ε tor ruchu ciała 1 względem ciała 2 może przyjąć różną trajektorię:

- dla $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}$ torem ruchu jest okrąg;
- dla $0 < \varepsilon < 1 \Leftrightarrow -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} < E < 0$ torem ruchu jest elipsa;
- dla $\varepsilon = 1 \Leftrightarrow E = 0$ torem ruchu jest parabola;
- dla $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow E > 0$ i torem ruchu jest hiperbola.



Rysunek 13: Tor ruchu ciała 1 względem ciała 2 dla $0 < \varepsilon < 1 \Leftrightarrow -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} < E < 0$



Rysunek 14: Tor ruchu ciała 1 względem ciała 2 dla $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow E > 0$

Rysunek 13 przedstawia tor eliptyczny o następujący równaniu:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

gdzie a i b są półosiąmi elipsy, które mają następujący związek z równaniem na tor ruchu przedstawiony wzorem (40):

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \quad , \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (41)$$

Rysunek 14 przedstawia tor hiperboliczny.

Prawa Keplera

I prawo Keplera:

Ruch ciała niebieskiego odbywa się po krzywej stożkowej (elipsa, hiperbola, parabola), w której ognisku znajduje się drugie ciało.

II prawo Keplera:

Promień wodzący r zatacza pole S (Rysunek 15), czyli:

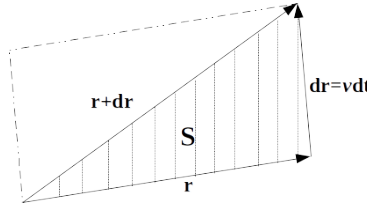
$$dS = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|$$

$$dS = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt$$

$$dS = \frac{L}{2\mu} dt$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{const} , \quad (42)$$

zatem z zasady zachowania momentu pędu wynika zasada stałości prędkości kątowej.



Rysunek 15: Pole S zataczane przez promień wodzący \vec{r}

III prawo Keplera:

Całkowite pole S zgodnie z II prawem Keplera (42) wynosi:

$$S = T \frac{L}{2\mu} , \quad (43)$$

gdzie T jest okresem obiegu ciała 1 względem ciała 2 .

Całkowite pole S zgodnie ze wzorem na pole powierzchni elipsy wynosi:

$$S = \pi ab \stackrel{(41)}{=} \frac{\pi p^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \stackrel{(41)}{=} \pi a^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

Z równań (43), (44) wynika:

$$T \frac{L}{2\mu} = \pi a^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow (39)$$

$$T \frac{L}{2\mu} = \pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{L^2}{\mu \alpha}}$$

$$T^2 \frac{L^2}{4\mu^2} = \pi^2 a^3 \frac{L^2}{\mu \alpha}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{\alpha} a^3$$

$$\Downarrow (24), (31)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}{G m_1 m_2} a^3$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 , \quad (45)$$

zatem kwadrat okres T obiegu ciała 1 względem ciała 2 jest proporcjonalny do sześcianu a wielkiej półosi orbity. W ruchu planetarnym masa ciała 1 w stosunku do masy ciała 2 wynosi w przybliżeniu: $m_1 \approx 0$, wtedy równanie (45) przyjmuje postać:

$$T^2 \approx \frac{4\pi^2}{G m_2} a^3 ,$$

czyli wartość okresu T nie zależy od masy m_1 planety (ciała 1).

7 Dynamika układu punktów materialnych z więzami

7.1 Klasyfikacja więzów

Na położenie i prędkość nałożone są pewne ograniczenia, zwane **więzami**. Dla układu n punktów materialnych wyróżniono:

- **Więzy dwustronne**, jeśli równanie więzów ma postać:

$$f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$$

- **Więzy jednostronne**, jeśli równanie więzów ma postać:

$$f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \geq 0$$

- **Więzy holonomiczne** (niezależne od prędkości):

$$f(\vec{r}, t) = 0 \text{ lub } f(\vec{r}, t) \geq 0$$

- **Więzy nieholonomiczne** (zależne od prędkości)

W ogólności warunki na więzy holonomiczne (46) i nieholonomiczne (47):

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (46)$$

$$\sum_{j=1}^n \vec{b}_j^{(i)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) \cdot \dot{\vec{r}}_j + b_0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \quad (47)$$

- **Więzy skleronomiczne** (nieruchome):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{b}_j^{(i)}}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial b_0}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

W przeciwnym wypadku więzy są **reonomiczne** (ruchome).

Więzy ograniczone równaniem (46):

$$\begin{aligned} f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \quad / \quad \frac{\partial}{\partial t} \\ \sum_{j=1}^n \underbrace{(\vec{\nabla}_j f_i)}_{\vec{b}_j^{(i)}} \cdot \dot{\vec{r}}_j + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{b_0} = 0 \end{aligned}$$

7.2 Równania Lagrange'a I rodzaju

Równania Newtona dla układu n punktów materialnych nieswobodnych z p niezależnymi równaniami więzów holonomicznych i q niezależnymi równaniami więzów nieholonomicznych:

$$\begin{cases} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{Ri} & i = 1, \dots, n \\ f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 & k = 1, \dots, p \\ \sum_{i=1}^n \vec{b}_i^{(l)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) \cdot \dot{\vec{r}}_i + b_0^{(l)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 & l = 1, \dots, q \end{cases} \quad (48)$$

Więzy oddziałują na punkty materialne pewnymi dodatkowymi siłami \vec{F}_{Ri} zwanymi siłami reakcji więzów, a wielkość $3n - p - q$ jest liczbą stopni swobody układu punktów materialnych.

Najprostszy przypadek to więzy doskonale (gładkie), jeśli praca sił reakcji dla tych więzów jest równa zero:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{Ri} \delta \vec{r}_i \equiv \vec{F}_R \delta \vec{r} \equiv 0$$

przy dowolnych przesunięciach wirtualnych $\delta \vec{r}$, wynika stąd, że:

$$\vec{F}_R \perp \delta \vec{r}$$

Równania ruchu Newtona (48) przechodzą wtedy w układ **równań Lagrange'a I rodzaju**:

$$\begin{cases} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{\nabla}_i f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) + \sum_{j=1}^q \mu_j \vec{b}_i^{(j)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) & i = 1, \dots, n \\ f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 & k = 1, \dots, p \\ \sum_{k=1}^n b_k^{(l)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) \cdot \dot{\vec{r}}_k + b_0^{(l)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 & l = 1, \dots, q \end{cases} \quad (49)$$

gdzie λ_k oraz μ_j to mnożniki Lagrange'a.

Równania Lagrange'a I rodzaju są równoważne **zasadzie d'Alemberta**: dla ruchu układu punktów materialnych z zadanymi więzami doskonałymi dla dowolnych przesunięć wirtualnych $\delta \vec{r}_i$ zachodzi równanie:

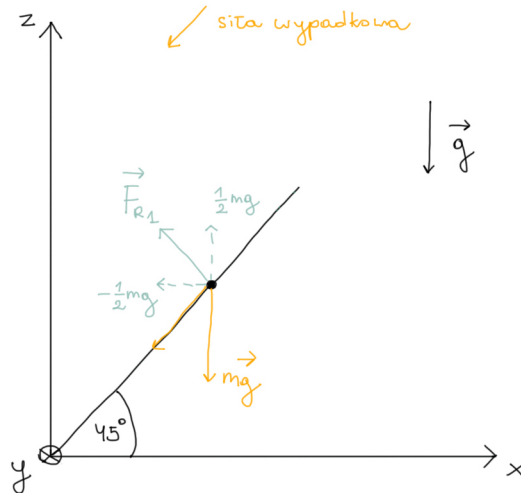
$$\sum_{i=1}^n \underbrace{(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)}_{\text{siła reakcji więzów}} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Zasada d'Alemberta jest dynamicznym uogólnieniem statycznej ($\ddot{\vec{r}}_i = 0$) **zasady prac wirtualnych**:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Siła działa prostopadle do kierunku ruchu (nie może go przesunąć).

Przykład: Ciało poruszające się w płaszczyźnie (x, z) – więzy skleronomiczne



Rysunek 16: Ciało poruszające się w płaszczyźnie (x, z) . Więzy skleronomiczne.

Ograniczenia ruchu:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = z - x = 0 \\ f_2(x, y, z) = y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} f_1 = (\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z})(z - x) = \hat{e}_z - \hat{e}_x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\nabla} f_2 = (\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z})(y) = \hat{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$m\vec{r}'' = \underbrace{m\vec{g}}_{\text{siła zewnętrzna}} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 - \lambda_1 \\ m\ddot{y} = \lambda_2 \\ m\ddot{z} = -mg + \lambda_1 \end{cases}$$

Warunki (założenia):

$$y = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

Można rozważać problem jako dwuwymiarowy.

$$z - x = 0 \Rightarrow \ddot{z} - \ddot{x} = 0$$

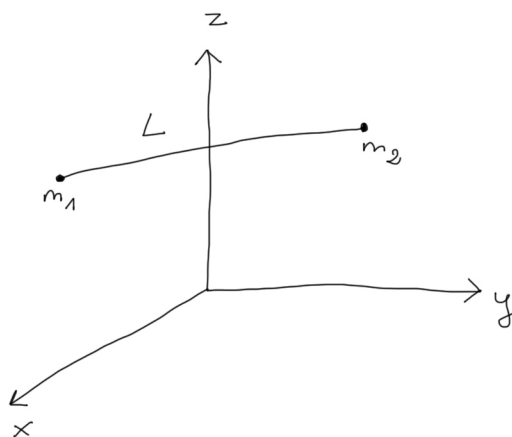
$$-g + \frac{\lambda_1}{m} - (-\frac{\lambda_1}{m}) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}mg$$

$$\vec{F}_{R1} = \lambda_1 \vec{\nabla} f_1 = \frac{1}{2}mg \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{1}{2}mg \\ m\ddot{z} = -mg + \frac{1}{2}mg = -\frac{1}{2}mg \end{cases}$$

Przykład: Sztywny, nieważki pręt o długości L



Rysunek 17: Sztywny, nieważki pręt o długości L .

Więzy:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - L^2 = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_1 f_1 &= \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y_1} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z_1} \right) f_1 \\ &= 2(x_1 - x_2)\hat{e}_x + 2(y_1 - y_2)\hat{e}_y + 2(z_1 - z_2)\hat{e}_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_2 f_1 &= \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y_2} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z_2} \right) f_1 \\ &= -2(x_1 - x_2)\hat{e}_x - 2(y_1 - y_2)\hat{e}_y - 2(z_1 - z_2)\hat{e}_z\end{aligned}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = 2\lambda_1(x_1 - x_2) \\ m_1 \ddot{y}_1 = 2\lambda_1(y_1 - y_2) \\ m_1 \ddot{z}_1 = 2\lambda_1(z_1 - z_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -2\lambda_1(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{y}_2 = -2\lambda_1(y_1 - y_2) \\ m_2 \ddot{z}_2 = -2\lambda_1(z_1 - z_2) \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - L^2 = 0 \end{cases}$$

8 Dynamika układu punktów materialnych z więzami holonomicznymi doskonałymi

Równania ruchu:

$$\begin{cases} m_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k + \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{\nabla}_k f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) \\ f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, p$$

Współrzędne uogólnione zgodne z więzami:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, \dots, q_N, t) \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_2(q_1, \dots, q_N, t)\end{aligned}$$

1. Równania więzów są spełnione automatycznie:

$$f_i(\vec{r}_1(q_1, \dots, q_N, t), \vec{r}_2(q_1, \dots, q_N, t), \dots, \vec{r}_n(q_1, \dots, q_N, t), t) = 0$$

2. $\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right)$ macierz $3n \times N$

Przykład: Masa na powierzchni bocznej

$$f(x, y, z, t) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} - \tan(\alpha(t)) = 0$$

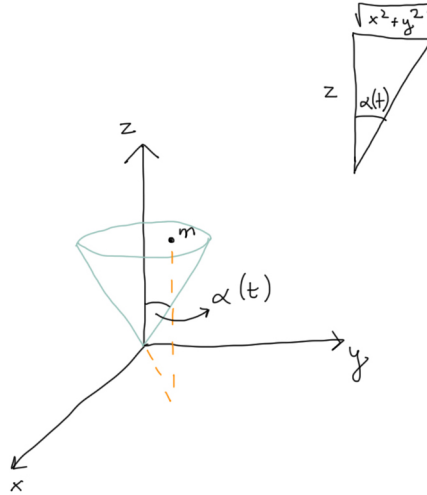
$$\begin{cases} x = q_1 \sin(\alpha(t)) \cos(q_2) \\ y = q_1 \sin(\alpha(t)) \sin(q_2) \\ z = q_1 \cos(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = \sin(\alpha(t)) \cos(q_2) \quad \frac{\partial x}{\partial q_2} = -q_1 \sin(\alpha(t)) \sin(q_2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = \sin(\alpha(t)) \sin(q_2) \quad \frac{\partial y}{\partial q_2} = -q_1 \sin(\alpha(t)) \cos(q_2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_1} = \cos(\alpha(t)) \quad \frac{\partial z}{\partial q_2} = -q_1 \sin(\alpha(t)) \sin(q_2)$$

Macierz ma rząd 2 i jest to rząd maksymalny.



Rysunek 18: Masa na powierzchni bocznej.

8.1 Równania Lagrange'a II rodzaju

Po wprowadzeniu współrzędnych uogólnionych zachodzi:

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_I} = 0$$

I wobec tego również:

$$\sum_{k=1}^n \vec{\nabla}_k f_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I} = 0$$

Mnożąc obie strony równania ruchu (49) przez $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I}$ i sumując po k zachodzi:

$$\sum_{k=1}^n m_k \ddot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{\nabla}_k f_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I}}_{\sum_{i=1}^p \lambda_i \underbrace{\sum_{k=1}^n \vec{\nabla}_k f_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I}}_{=0, \text{ czyli siły reakcji znikają}}}$$

Zatem:

$$\sum_{k=1}^n m_k \ddot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I}$$

Energia kinetyczna:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \dot{\vec{r}}_k^2$$

Ponieważ:

$$\begin{aligned} & \vec{r}_k(q_1, \dots, q_n, t) \\ \dot{\vec{r}}_k &= \sum_{J=1}^N \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_J} \dot{q}_J + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_J} &= \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_J} \end{aligned}$$

Oraz

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_J} = \sum_{I=1}^N \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_I \partial q_J} \dot{q}_J + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_J \partial t} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_J}$$

To:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_I} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_I} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \dot{\vec{r}}_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_I} = \sum_{k=1}^n m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_I} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I} \right) = \sum_{k=1}^n m_k \ddot{\vec{r}}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I} + \underbrace{\sum_{k=1}^n m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_I}}_{\frac{\partial}{\partial q_I} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \dot{\vec{r}}_k^2} \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \ddot{\vec{r}}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_I} - \frac{\partial T}{\partial q_I} \end{aligned}$$

Energia potencjalna:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) : \vec{F}_k &= -\vec{\nabla}_k V \\ \sum_k^n (-\vec{\nabla}_k V) \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_I} &= -\frac{\partial V}{\partial q_I} = \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_I}}_{=0} - \frac{\partial V}{\partial q_I} \end{aligned}$$

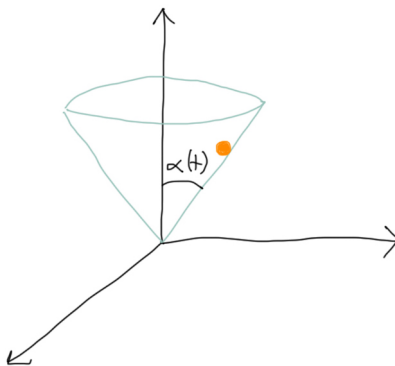
Funkcja Lagrange'a (lagranżjan)

$$L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) = T - V$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} - \frac{\partial L}{\partial q_I} = 0$$

Przykład: Masa na powierzchni bocznej



Rysunek 19: Masa na powierzchni bocznej.

$$\begin{cases} x = q_1 \sin(\alpha(t)) \cos(q_2) \\ y = q_1 \sin(\alpha(t)) \sin(q_2) \\ z = q_1 \cos(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{q}_1 \sin(\alpha) \cos(q_2) + q_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha) \cos(q_2) - q_1 \dot{q}_2 \sin(\alpha) \sin(q_2) \\ \dot{y} = \dot{q}_1 \sin(\alpha) \sin(q_2) + q_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha) \sin(q_2) + q_1 \dot{q}_2 \sin(\alpha) \cos(q_2) \\ \dot{z} = \dot{q}_1 \cos(\alpha) + q_1 \dot{\alpha} \sin(\alpha) \end{cases}$$

Energia potencjalna $V = 0$, bo nie ma sił zewnętrznych.

$$T = \frac{1}{2}m[(\dot{q}_1 \sin(\alpha) \cos(q_2) + q_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha) \cos(q_2) + q_1 \dot{q}_2 \sin(\alpha) \sin(q_2))^2 + (\dot{q}_1 \sin(\alpha) \sin(q_2) + q_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha) \sin(q_2) + q_1 \dot{q}_2 \sin(\alpha) \cos(q_2))^2 + (\dot{q}_1 \cos(\alpha) + q_1 \dot{\alpha} \sin(\alpha))^2]$$

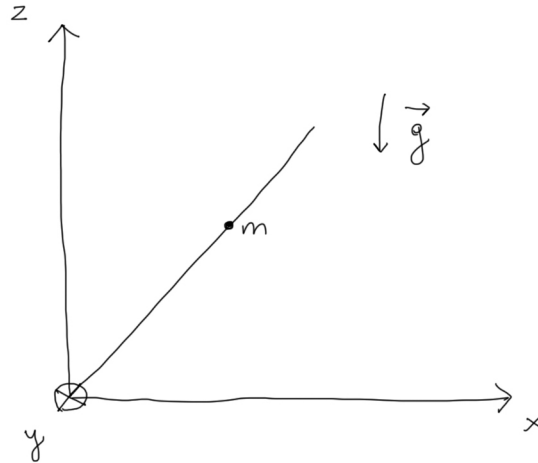
$$T = \frac{1}{2}m[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1^2 \sin^2(\alpha) \dot{q}_2^2 + q_1^2 \dot{\alpha}^2]$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1^2 \sin^2(\alpha) \dot{q}_2^2 + q_1^2 \dot{\alpha}^2]$$

$$I = 1 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = m\ddot{q}_1 - mq_1 \dot{q}_2^2 \sin^2(\alpha) - mq_1 \dot{\alpha}^2$$

$$I = 2 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{d}{dt} (mq_2 \dot{q}_1^2 \sin^2(\alpha))$$

Przykład: Ciało poruszające się w płaszczyźnie (x, z)



Rysunek 20: Ciało poruszające się w płaszczyźnie (x, z) .

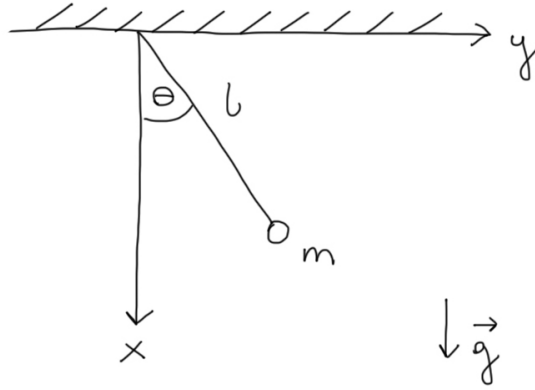
$$\begin{cases} x = q_1 \\ y = 0 \\ z = q_1 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = m\dot{q}_1^2$$

$$V = mgz \Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla}V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$L = T - V = m\dot{q}_1^2 - mgq_1$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 2m\dot{q}_1 - mg \Rightarrow \ddot{q}_1 = -\frac{1}{2}g$$



Rysunek 21: Wahadło matematyczne.

Przykład: Wahadło matematyczne

θ - współrzędna uogólniona zgodna z więzami.

$$\begin{cases} x = l \cos(\theta) \\ y = l \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -l\dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{y} = l\dot{\theta} \cos(\theta) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\vec{F} = mg\hat{e}_x \Rightarrow V = -mgx = -mgl \cos(\theta)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) - (-mgl \sin(\theta)) = ml^2\ddot{\theta} + mlg \sin(\theta) \quad (50)$$

8.1.1 Zasady zachowania

a) punkt materialny

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} m\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$$

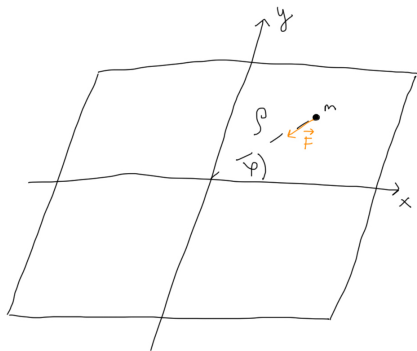
punkt materialny swobodny $V = 0$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad \text{pęd uogólniony}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad x \text{ jest współrzędną cykliczną}$$

$$\Rightarrow const = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \text{pęd uogólniony jest tu wielkością zachowaną}$$

b) ruch płaski punktu materialnego w polu siły centralnej



$$\begin{cases} \vec{r} = \rho \hat{e}_\rho \\ \vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - V(\rho)$$

współrzędna φ jest współrzędną cykliczną

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} m \rho^2 \dot{\varphi}$$

pęd uogólniony jest zachowany

$$m \rho^2 \dot{\varphi} = \underbrace{L}_{\text{moment pędu}} = \text{const}$$

$$p_I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} \text{ pęd uogólniony związany jest ze współrzędną } q_I$$

c) energia uogólniona

$$G = \sum_{k=1}^N p_k \dot{q}_k - \underbrace{L}_{\text{lagranżjan}}$$

$$\frac{d}{dt} G = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right)$$

$$\frac{d}{dt} G = \sum_{k=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow G = \text{const}$$

Dla lagranżjanów niezależnych jawnie od czasu istnieje **zasada zachowania energii uogólnionej**.

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_I} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_J} \dot{q}_I \dot{q}_J - V(\vec{r}_1(q_1, \dots, q_N, t), \dots, \vec{r}_n(q_1, \dots, q_N, t), t) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_I} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_J} = \alpha_{IJ}(q_1, \dots, q_N, t)$$

$$L = \sum_{I,J=1}^N \alpha_{IJ}(q_1, \dots, q_N, t) \dot{q}_I \dot{q}_J - V(q_1, \dots, q_N, t)$$

$$G = \sum_{k=1}^N \underbrace{\sum_{I=1}^N 2\alpha_{II} \dot{q}_I}_{p_k} \dot{q}_k - \sum_{I,J=1}^N \alpha_{IJ} \dot{q}_I \dot{q}_J + V$$

$$G = \underbrace{\sum_{I,J=1}^N \alpha_{IJ} \dot{q}_I \dot{q}_J}_{T} + V$$

Wielkość G zdefiniowana w sposób abstrakcyjny jest sumą energii kinetycznej i energii potencjalnej.

8.1.2 Lagranżjany L oraz $L' = L + \frac{d}{dt}\psi$ prowadzą do tych samych równań Lagrange'a II rodzaju

ψ - pochodna zupełna funkcji położenia i czasu

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_I} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_I} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} - \frac{\partial L}{\partial q_I} + \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_I}}_{= \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial q_I}} - \frac{\partial \psi}{\partial q_I}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} - \frac{\partial L}{\partial q_I}$$

Transformacja cechowania:

$$L \longrightarrow L' = L + \frac{d}{dt}\psi$$

8.1.3 Siła Lorentza

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Pole elektryczne $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$

Pole magnetyczne $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$

Potencjał elektrostatyczny $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$

Potencjał wektorowy $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_L = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right)$$

$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ jest odpowiednią uogólnioną energią potencjalną dla siły Lorentza.

$L = T - U \Rightarrow$ równania Lagrange'a II rodzaju z siłą Lorentza.

$$U = q\varphi - q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$$

Uzasadnienie:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q\varphi + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} (m\dot{x} + qA_x) + q \frac{\partial \varphi}{\partial x} - q\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \\ &= m\ddot{x} + q \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + q \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + q \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + q \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &\quad + q \frac{\partial \varphi}{\partial x} - q\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} - q\dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} - q\dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ &= m\ddot{x} + q \frac{\partial \varphi}{\partial x} + q \frac{\partial A_x}{\partial t} + q\dot{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) + q\dot{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$0 = m\ddot{x} - F_{L_x} = m\ddot{x} + q\frac{\partial\varphi}{\partial x} + q\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial t} - q(\vec{v} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{A})}_B)_x$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \det \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} = \hat{e}_x(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y) + \dots$$

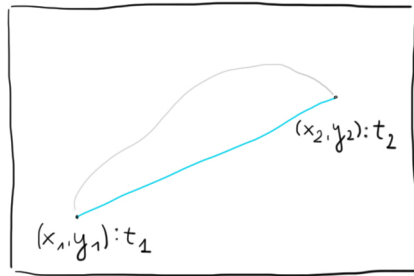
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \det \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \hat{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + \dots$$

$$(\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))_x = \dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \quad \text{itd.}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\varphi + q\dot{x}A_x + q\dot{y}A_y + q\dot{z}A_z$$

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qA_y \\ p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \underbrace{m\dot{z}}_{\text{zwyczajny pęd}} + \underbrace{qA_z}_{\text{wykład od pola elektromagnetycznego}} \end{cases}$$

8.1.4 Cząstka swobodna



Rysunek 22: Cząstka pomiędzy ustalonymi punktami porusza się po najkrótszej drodze.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\begin{cases} x(t_1) = x_1 \\ x(t_2) = x_2 \\ y(t_1) = y_1 \\ y(t_2) = y_2 \end{cases}$$

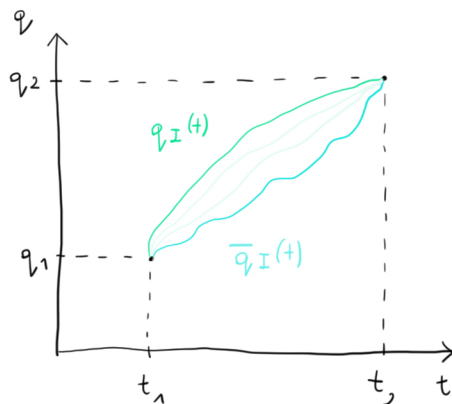
$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt$$

Całka przyjmuje wartość minimalną.

8.2 Zasada (najmniejszego) ekstremalnego działania Hamiltona

ruch rzeczywisty $\iff S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ przybiera wartość ekstremalną

S - działanie [$J \cdot s$]



Rysunek 23: $\vec{q}_I(t)$ ruch rzeczywisty spełnia równania Lagrange'a II rodzaju.

$$q_I(t) = \vec{q}_I(t) + \epsilon \delta q_I(t)$$

gdzie:

ϵ - parametr

$\delta q_I(t)$ - kształt

$\epsilon \delta q_I(t)$ - odstępstwo / odchylenie od trajektorii rzeczywistej

$$\delta q_I(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_I(t_1) = \vec{q}_I(t_1)$$

$$\delta q_I(t_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_I(t_2) = \vec{q}_I(t_2)$$

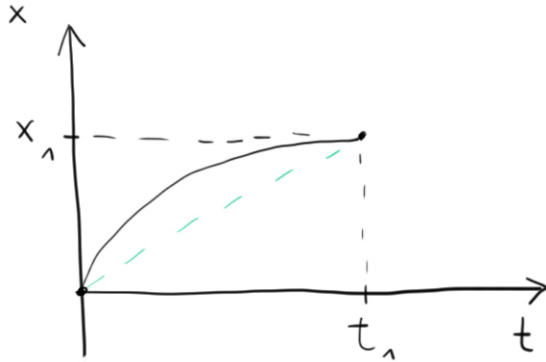
$$L(q_I, \dot{q}_I, t) = L(\vec{q}_I + \epsilon \delta q_I, \dot{\vec{q}}_I + \epsilon \dot{\delta q}_I, t)$$

$$S_\epsilon = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}_I + \epsilon \delta q_I, \dot{\vec{q}}_I + \epsilon \dot{\delta q}_I, t) dt$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS_\epsilon}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{I=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_I} \delta q_I + \sum_{I=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} \dot{\delta q}_I \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{I=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_I} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{I=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} \delta q_I \right) - \sum_{I=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} \right) \delta q_I \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{I=1}^N \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_I} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} \right)}_{=0} \delta q_I dt + \sum_{I=1}^N \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} \delta q_I}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Czyli działanie ma ekstremum dla ruchu rzeczywistego.

8.2.1 Oscylator harmoniczny



$$L = \frac{1}{2}m\dot{x} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - m\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x(t) = x_1 \frac{\sin(\omega t)}{\sin(\omega t_1)} \quad \dot{x}(t) = x_1 \frac{t}{t_1}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{x_1 \omega}{\sin(\omega t_1)} \cos(\omega t) \quad \dot{x}'(t) = \frac{x_1}{t_1}$$

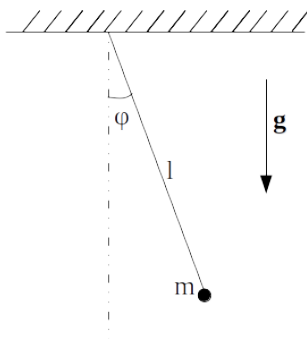
$$S' = \int_0^{t_1} \left(\frac{1}{2}m \left(\frac{x_1}{t_1} \right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 \left(\frac{x_1 t}{t_1} \right)^2 \right) dt = \frac{1}{2}m \frac{x_1^2}{t_1} - \frac{1}{6}m\omega^2 x_1^2 t_1$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{t_1} \left(\frac{1}{2}m \frac{x_1^2 \omega^2}{\sin^2(\omega t_1)} \cos^2(\omega t) - \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 \frac{\sin^2(\omega t)}{\sin^2(\omega t_1)} \right) dt \\ &= \int_0^{t_1} \frac{1}{2}m \frac{x_1^2 \omega^2}{\sin^2(\omega t_1)} \cos(2\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{m x_1^2 \omega^2}{\sin^2(\omega t_1)} \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t_1) \\ &= \frac{1}{2} m x_1^2 \omega \cot(\omega t_1) \end{aligned}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4}{\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{120}\alpha^5} = \frac{1}{\alpha} \frac{1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}}{1 - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^4}{120}} = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{3}\alpha^2 + \dots \right)$$

9 Małe drgania

Przykład: Wahadło matematyczne



Rysunek 24: Schemat wahadła matematycznego

Z równania Lagrange'a II rodzaju dla wahadła matematycznego przedstawionego na Rysunku 24 otrzymano równanie:

$$0 \stackrel{(50)}{=} ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi, \quad (51)$$

nie zależy ono od czasu. Punktem równowagi dla wahadła matematycznego jest: $\varphi = 0$. W przybliżeniu małych drgań, czyli $|\varphi| \ll 1$, zachodzi $\sin \varphi \approx \varphi$, popełniony zostaje błąd rzędu φ^3 . Dla takiego przybliżenia równanie (51) przyjmuje postać:

$$0 = ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \varphi$$

$$0 = \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi.$$

Otrzymano równanie oscylatora harmonicznego o częstości kołowej $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Punkt równowagi dla więzów sklerologicznych:

Dla więzów sklerologicznych (niezależnych od czasu) lagranżjan przyjmuje postać:

$$L = -V(q_1, \dots, q_N), \quad (52)$$

gdyż $\sum_{I,J=1}^N \alpha_{IJ}(q_k) \dot{q}_I \dot{q}_J = 0$.

Natomiast równanie Lagrange'a II rodzaju przyjmuje postać:

$$0 = -\frac{\partial L}{\partial q_I}, \quad (53)$$

gdyż $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} = 0$.

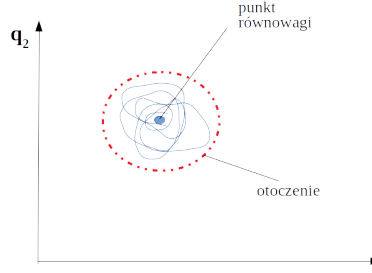
Podstawiając (52) do (53) otrzymano:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial q_I} (-V(q_1, \dots, q_N)) = \frac{\partial V}{\partial q_I}. \quad (54)$$

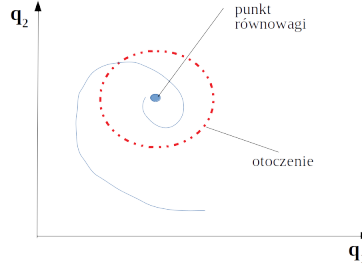
Zatem punktem równowagi $0 = \frac{\partial L}{\partial q_I}$ jest ekstremum funkcji energii potencjalnej V .

Stany równowagi:

- równowaga trwała – punkt materialny wychylony z położenia równowagi pozostaje w otoczeniu położenia równowagi, (sytuacja przedstawiona na Rysunku 25);
- równowaga nietrwała (chwijna) – punkt materialny wychylony z położenia równowagi opuszcza otoczenie położenia równowagi, (sytuacja przedstawiona na Rysunku 26).



Rysunek 25: Schemat zachowania punktu materialnego w sytuacji równowagi trwałej



Rysunek 26: Schemat zachowania punktu materialnego w sytuacji równowagi nietrwalej

Równanie Lagrange'a II rodzaju dla małych wychyleń wokół ustalonego punktu równowagi:

Punkty równowagi oznaczono następująco: $q_{1,0}, q_{2,0}, \dots, q_{N,0}$. Następnie zdefiniowano punkty: $q_I = q_{I,0} + \delta_{q_I}$, gdzie δ_{q_I} jest odchyleniem z położenia równowagi $q_{I,0}$. Przekształcając wcześniejsze równanie otrzymano: $\delta_{q_I} = q_I - q_{I,0}$, wtedy różniczka po czasie z odchylenia wynosi: $\dot{\delta}_{q_I} = \dot{q}_I$. Należy zwrócić uwagę, że δ_{q_I} jest współrzędną uogólnioną, zatem istnieje dla niej lagranżjan.

Potem rozwinięto lagranżjan w szereg Taylora do rzędu kwadratowego:

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{I,J=1}^N \alpha_{IJ}(q_{1,0} + \delta_{q_1}, q_{I,2} + \delta_{q_2}, \dots, q_{N,0} + \delta_{q_N}) \dot{\delta}_{q_I} \dot{\delta}_{q_J} - V(q_{1,0} + \delta_{q_1}, q_{I,2} + \delta_{q_2}, \dots, q_{N,0} + \delta_{q_N}) \\
 &\approx \sum_{I,J=1}^N \alpha_{IJ}(q_{1,0}, q_{I,2}, \dots, q_{N,0}) \dot{\delta}_{q_I} \dot{\delta}_{q_J} - V(q_{1,0}, q_{I,2}, \dots, q_{N,0}) + \\
 &\quad - \sum_{k=1}^N \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{(p.r.)} \delta_{q_k} - \frac{1}{2} \sum_{I,J}^N \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_I \partial q_J} \right|_{(p.r.)} \delta_{q_I} \delta_{q_J},
 \end{aligned} \tag{55}$$

gdzie (p.r.) oznacza punkt równowagi. W otrzymanym przybliżeniu:

- $-V(q_{1,0}, q_{I,2}, \dots, q_{N,0}) = \text{const}$, zatem korzystając z transformacji cechowania człon ten można pominąć;
- $\left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{(p.r.)} = 0$.

Wtedy przybliżenie z równania (55) przyjmuje postać:

$$L \approx \sum_{I,J=1}^N \alpha_{IJ}(q_{1,0}, q_{I,2}, \dots, q_{N,0}) \dot{\delta}_{q_I} \dot{\delta}_{q_J} - \frac{1}{2} \sum_{I,J}^N \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_I \partial q_J} \right|_{(p.r.)} \delta_{q_I} \delta_{q_J}. \tag{56}$$

Otrzymano następujące stałe:

- $\alpha_{IJ}(q_{1,0}, q_{I,2}, \dots, q_{N,0})$, którą oznaczono: $\alpha_{IJ}^{(0)}$;
- $\sum_{I,J}^N \frac{\partial^2 V}{\partial q_I \partial q_J} \Big|_{(p.r.)}$.

Podstawiając przybliżenie (56) do równania Lagrange'a II rodzaju otrzymano:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_{q_I}} - \frac{\partial L}{\partial \delta_{q_I}} \\
0 &= \frac{d}{dt} \sum_{J=1}^N 2\alpha_{IJ}^{(0)} \dot{\delta}_{q_J} + \sum_{I,J}^N \frac{\partial^2 V}{\partial q_I \partial q_J} \Big|_{(p.r.)} \delta_{q_J} \\
0 &= \frac{d}{dt} \sum_{J=1}^N 2\alpha_{IJ}^{(0)} \ddot{\delta}_{q_J} + \sum_{I,J}^N \frac{\partial^2 V}{\partial q_I \partial q_J} \Big|_{(p.r.)} \delta_{q_J} .
\end{aligned}$$

Zapisując powyższe równanie w postaci macierzy otrzymano:

$$0 = \begin{pmatrix} 2\alpha_{11}^{(0)} & 2\alpha_{12}^{(0)} & \dots & 2\alpha_{1N}^{(0)} \\ 2\alpha_{21}^{(0)} & 2\alpha_{22}^{(0)} & \dots & 2\alpha_{2N}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\alpha_{N1}^{(0)} & 2\alpha_{N2}^{(0)} & \dots & 2\alpha_{NN}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\delta}_{q_1} \\ \ddot{\delta}_{q_2} \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_{q_N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_1} \Big|_0 & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_N} \Big|_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_N \partial q_1} \Big|_0 & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_N} \Big|_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{q_1} \\ \delta_{q_2} \\ \vdots \\ \delta_{q_N} \end{pmatrix} . \quad (57)$$

W wyniku rozwinięcia lagranżjanu w małych wychyleniach otrzymano równanie liniowe – równanie ruchu, którego rozwiązaniem jest:

$$\begin{pmatrix} \delta_{q_1} \\ \delta_{q_2} \\ \vdots \\ \delta_{q_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} \cos(\omega t + \gamma) . \quad (58)$$

Podstawiając równanie (58) do równania (57) otrzymano:

$$0 = \begin{pmatrix} -2\omega^2 \alpha_{11}^{(0)} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_1} \Big|_0 & \dots & -2\omega^2 \alpha_{1N}^{(0)} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_N} \Big|_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -2\omega^2 \alpha_{N1}^{(0)} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_N \partial q_1} \Big|_0 & \dots & -2\omega^2 \alpha_{NN}^{(0)} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_N} \Big|_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} \cos(\omega t + \gamma) . \quad (59)$$

Powyższe równanie jest zawsze prawdziwe, pod warunkiem, że wyznacznik pierwszej macierzy jest równy 0:

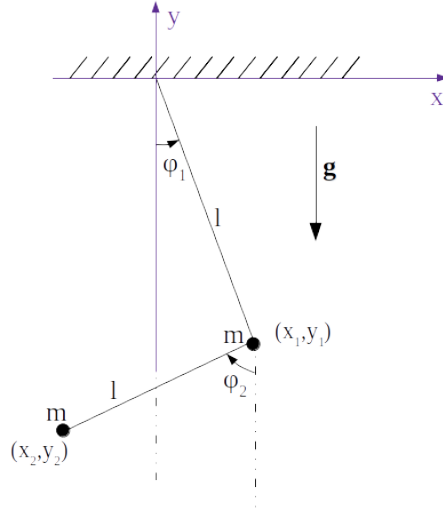
$$\det \begin{pmatrix} -2\omega^2 \alpha_{11}^{(0)} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_1} \Big|_0 & \dots & -2\omega^2 \alpha_{1N}^{(0)} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_N} \Big|_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -2\omega^2 \alpha_{N1}^{(0)} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_N \partial q_1} \Big|_0 & \dots & -2\omega^2 \alpha_{NN}^{(0)} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_N} \Big|_0 \end{pmatrix} = 0$$

Przykład: Wahadło podwójne

Rozważono wahadło podwójne, którego schemat przedstawiono na Rysunku 27. Na podstawie Rysunku 27 wyznaczono współrzędne uogólnione opisujące ruch wahadła podwójnego:

$$\begin{aligned}
x_1 &= l \sin \varphi_1 & x_2 &= l \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2 \\
y_1 &= -l \cos \varphi_1 & y_2 &= -l \cos \varphi_1 - l \cos \varphi_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= l \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 & \dot{x}_2 &= l (\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) \\
\dot{y}_1 &= l \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 & \dot{y}_2 &= l (\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2)
\end{aligned}$$



Rysunek 27: Schemat wahadła podwójnego

Wyznaczono energię kinetyczną układu:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \\
 &= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \sin^2 \varphi_1 + \\
 &\quad + \dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos^2 \varphi_2 + \\
 &\quad + \dot{\varphi}_1^2 \sin^2 \varphi_1 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \varphi_2) = \\
 &= \frac{1}{2}ml^2[2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] .
 \end{aligned}$$

Wyznaczono energię potencjalną układu:

$$V = mgy_1 + mgy_2 = -mgl(2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) .$$

W celu wyznaczenia położenia równowagi skorzystano z warunku na punkt równowagi – równanie (54), czyli wyznaczono ekstremum dla energii potencjalnej V :

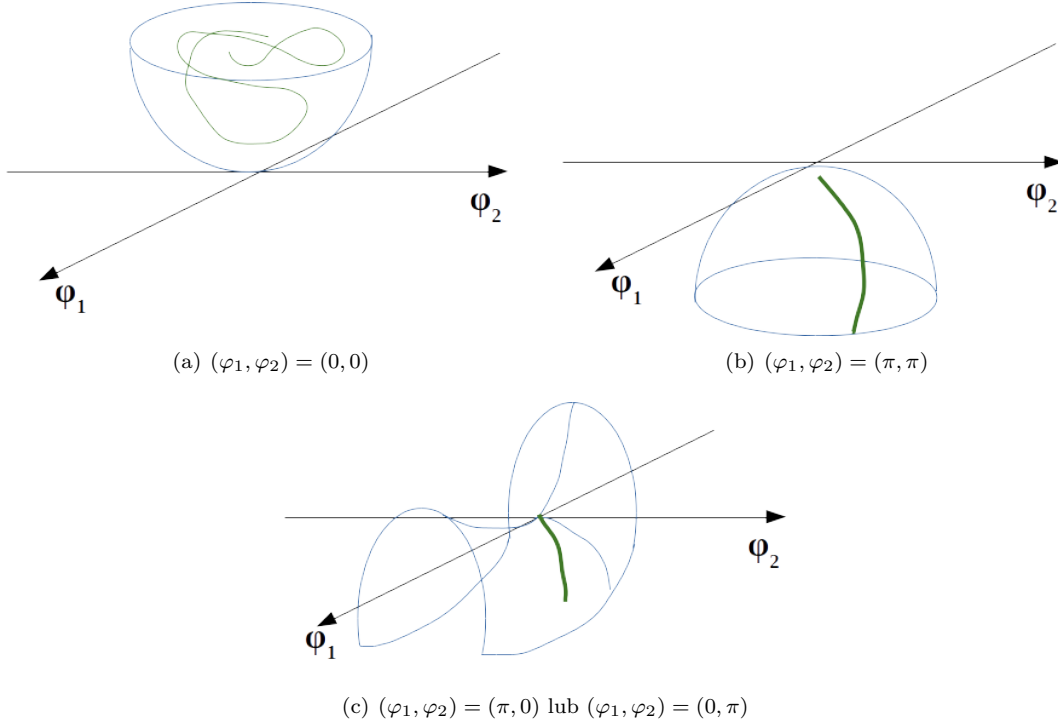
$$\begin{aligned}
 0 = \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = 2mgl \sin \varphi_1 &\implies \varphi_1 = 0, \pi \\
 0 = \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = mgl \sin \varphi_2 &\implies \varphi_2 = 0, \pi
 \end{aligned}$$

Następnie wyznaczono punkt równowagi trwałej spośród wyznaczonych powyżej położeń. Na Rysunku 28 przedstawiono możliwe sytuacje dla wyznaczonych położeń:

- punkt $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$ jest minimum energii potencjalnej, czyli ciało nie będzie miało wystarczającej energii potencjalnej, aby oddalić się od otoczenia punktu równowagi – jest to położenie równowagi trwałej;
- punkt $(\varphi_1, \varphi_2) = (\pi, \pi)$ jest maximum energii potencjalnej – jest to położenie równowagi chwiejnej;
- punkt $(\varphi_1, \varphi_2) = (\pi, 0)$ lub punkt $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, \pi)$ jest punktem siodłowym – jest to położenie równowagi chwiejnej.

Potem zdefiniowano położenie, które znajduje się w otoczeniu punktu równowagi: $(\varphi_1, \varphi_2) = (0 + \delta_{\varphi_1}, 0 + \delta_{\varphi_2})$, dla którego znaleziono lagranżjan. Najpierw wyznaczono energię kinetyczną T i potencjalną V dla zdefiniowanego punktu, korzystając z szeregu Taylora dla $\cos x$:

$$T \approx \frac{1}{2}ml^2 (2\dot{\delta}_{\varphi_1}^2 + \dot{\delta}_{\varphi_2}^2 + 2\dot{\delta}_{\varphi_1}\dot{\delta}_{\varphi_2})$$



Rysunek 28: Schemat sytuacji dla położeń równowagi wahadła podwójnego

$$V \approx -mgl \left[2 \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{\varphi_1}^2 \right) + 1 - \frac{1}{2} \delta_{\varphi_2}^2 \right] = -3mgl + mgl\delta_{\varphi_1}^2 + \frac{1}{2}mgl\delta_{\varphi_2}^2$$

Następnie wyznaczono lagranżjan:

$$L = \frac{1}{2}ml^2 (2\dot{\delta}_{\varphi_1}^2 + \dot{\delta}_{\varphi_2}^2 + 2\dot{\delta}_{\varphi_1}\dot{\delta}_{\varphi_2}) + 3mgl - mgl\delta_{\varphi_1}^2 - \frac{1}{2}mgl\delta_{\varphi_2}^2$$

i obliczono równanie Lagrange'a II rodzaju dla δ_{φ_1} i δ_{φ_2} :

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_{\varphi_1}} - \frac{\partial L}{\partial \delta_{\varphi_1}}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_{\varphi_2}} - \frac{\partial L}{\partial \delta_{\varphi_2}}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}ml^2 (4\dot{\delta}_{\varphi_1} + 2\dot{\delta}_{\varphi_2}) \right] + 2mgl\delta_{\varphi_1}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}ml^2 (2\dot{\delta}_{\varphi_1} + 2\dot{\delta}_{\varphi_2}) \right] + mgl\delta_{\varphi_2}$$

$$0 = 2ml^2\ddot{\delta}_{\varphi_1} + ml^2\ddot{\delta}_{\varphi_2} + 2mgl\delta_{\varphi_1}$$

$$0 = ml^2\ddot{\delta}_{\varphi_1} + ml^2\ddot{\delta}_{\varphi_2} + mgl\delta_{\varphi_2}$$

$$0 = 2\ddot{\delta}_{\varphi_1} + \ddot{\delta}_{\varphi_2} + \frac{2g}{l}\delta_{\varphi_1}$$

$$0 = \ddot{\delta}_{\varphi_1} + \ddot{\delta}_{\varphi_2} + \frac{g}{l}\delta_{\varphi_2}$$

Potem rozwiązano układ równań:

$$\begin{cases} 0 = 2\ddot{\delta}_{\varphi_1} + \ddot{\delta}_{\varphi_2} + \frac{2g}{l}\delta_{\varphi_1} \\ 0 = \ddot{\delta}_{\varphi_1} + \ddot{\delta}_{\varphi_2} + \frac{g}{l}\delta_{\varphi_2} \end{cases}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\delta}_{\varphi_1} \\ \ddot{\delta}_{\varphi_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2g}{l} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{\varphi_1} \\ \delta_{\varphi_2} \end{pmatrix} \quad (60)$$

dla którego rozwiązaniem jest:

$$\begin{pmatrix} \delta_{\varphi_1} \\ \delta_{\varphi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \gamma) \quad (61)$$

Podstawiono równanie (61) do równania (60):

$$0 = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \gamma) + \begin{pmatrix} \frac{2g}{l} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \gamma)$$

$$0 = \begin{pmatrix} -2\omega^2 + \frac{2g}{l} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 + \frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \gamma)$$

. Obliczono wyznacznik pierwszej macierzy:

$$\det \begin{pmatrix} -2\omega^2 + \frac{2g}{l} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 + \frac{g}{l} \end{pmatrix} = 2 \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} \right)^2 - \omega^4,$$

który przyrównano do zera:

$$2 \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} \right)^2 - \omega^4 = 0$$

i wyznaczono częstość małych drgań wokół położenia równowagi:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \frac{g}{l}) = \frac{\omega^2}{\sqrt{2}} & \implies \omega^2 = \frac{\frac{g}{l}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ (-\omega^2 + \frac{g}{l}) = -\frac{\omega^2}{\sqrt{2}} & \implies \omega^2 = \frac{\frac{g}{l}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Następnie wyznaczono mody własne dla każdej częstości:

a) dla częstości $\omega^2 = \frac{\frac{g}{l}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$0 = \begin{pmatrix} -\frac{2\frac{g}{l}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{2g}{l} & -\frac{\frac{g}{l}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ -\frac{\frac{g}{l}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} & -\frac{\frac{g}{l}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \frac{\frac{g}{l}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -2 + 2 + \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2}A_1 - A_2 &= 0 \\ -A_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} A_2 = \sqrt{2}A_1$$

obie masy wahadła podwójnego poruszają się zgodnie w fazie dla niższej częstości drgań

b) dla częstości $\omega^2 = \frac{\frac{g}{l}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$ wykonano obliczenia jak dla poprzedniej częstości i otrzymano: $A_2 = -\sqrt{2}A_1$, czyli obie masy wahadła podwójnego poruszają się przeciwnie w fazie dla wyższej częstości drgań.

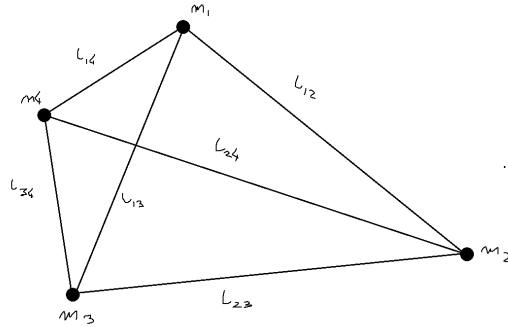
Ogólne rozwiązanie zagadnienia wahadła podwójnego jest postaci:

$$\begin{pmatrix} \delta_{\varphi_1} \\ \delta_{\varphi_2} \end{pmatrix} = A_1^{(a)} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos \left(\sqrt{\frac{\frac{g}{l}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}} t + \gamma^{(a)} \right) + A_1^{(b)} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos \left(\sqrt{\frac{\frac{g}{l}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}} t + \gamma^{(b)} \right).$$

10 Mechanika bryły sztywnej

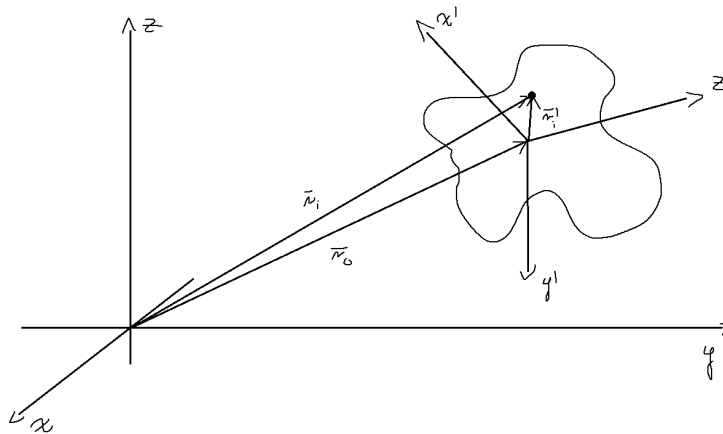
10.1 Opis położenia i prędkości

Rozważono poruszającą się bryłę złożoną z mas punktowych m_1, \dots, m_n pozostających w stałej odległości względem siebie. Niech wektor \vec{r}_i będzie położeniem masy m_i mierzonym w pewnym układzie inercyjnym, nazywanym dalej układem laboratoryjnym.



Rysunek 29: Bryła sztywna (wielkość $l_{ij} = \text{const}$ oznacza odległość między masami punktowymi m_i i m_j)

Wprowadzono również primowany układ współrzędnych obracający się wraz z bryłą, którego początek znajduje się w środku masy bryły. Ten układ będzie dalej nazywany układem bryły. Niech \vec{r}'_i będzie położeniem masy m_i mierzonym w tym układzie.



Rysunek 30: Prezentacja omawianych układów.

Związek pomiędzy położeniami w obu układach ma postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}'_i \quad (62)$$

gdzie \vec{r}_0 jest położeniem środka masy bryły względem układu laboratoryjnego. Różniczkując powyższe równanie po czasie otrzymano wzór

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{v}'_i + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

gdzie \vec{v}_0 oznacza prędkość początku układu bryły mierzoną w układzie laboratoryjnym, \vec{v}'_i - prędkość masy m_i mierzona w układzie bryły, $\vec{\omega}$ - prędkość kątowna układu bryły. W układzie bryły żadna z mas się nie porusza, więc $\vec{v}'_i = 0$. W związku z tym powyższy wzór upraszcza się do postaci

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i \quad (63)$$

10.2 Energia bryły sztywnej

Korzystając ze wzoru (63) można zapisać wyrażenie na sumaryczną energię kinetyczną bryły

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_0^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\omega \times \vec{r}'_i)^2$$

Przekształcono środkowy składnik:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) = M \vec{R}' \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) = 0$$

W pierwszym przejściu skorzystano z właściwości iloczynu skalarnego i wektorowego:

$$\vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = \vec{r}'_i \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\omega})$$

W kolejnym przejściu oznaczono przez M całkowitą masę układu, a przez \vec{R}' położenie środka masy w układzie bryły, które naturalnie jest równe 0.

$$M \vec{R}' = \sum_i^n m_i \vec{r}'_i = 0$$

Pozostałe dwa składniki noszą nazwę części translacyjnej i rotacyjnej energii kinetycznej bryły.

$$T_{trans} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_0^2 = \frac{1}{2} M v_0^2$$

$$T_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega \times \vec{r}'_i)^2$$

$$T = T_{trans} + T_{rot}$$

Warto zauważyć, że gdy $\vec{v}_0 = 0$, to znaczy gdy początek układu bryły pozostaje nieruchomy względem układu laboratoryjnego, zachodzi $T = T_{rot}$, co pozwala zidentyfikować T_{rot} jako energię ruchu obrotowego bryły, a T_{trans} jako energię ruchu postępowego środka masy bryły.

10.3 Tensor momentu bezwładności

Dla dalszych rozważań przydatne będzie przypomnienie sobie jak można wyrazić iloczyn wektorowy używając symbolu całkowicie antysymetrycznego:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon^{ijk} A_j B_k \hat{e}_i$$

Przydatna będzie również następująca tożsamość:

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon^{kij} \epsilon^{klm} = \delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}$$

Przekształcono teraz wyrażenie na T_{rot} używając powyższych zależności:

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} m_{\alpha} (\omega \times \vec{r}'_{\alpha})^2 = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} m_{\alpha} \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \epsilon^{kij} \epsilon^{klm} \omega^i r'_{\alpha}{}^j \omega^l r'_{\alpha}{}^m = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,l,m=1}^3 \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}) r'_{\alpha}{}^j r'_{\alpha}{}^m \omega^i \omega^l = \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^3 \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r'_{\alpha}{}'^2 \delta^{il} - r'_{\alpha}{}^i r'_{\alpha}{}^l) \omega^i \omega^l \end{aligned}$$

gdzie $r_\alpha'^2 = (r_\alpha^1)^2 + (r_\alpha^2)^2 + (r_\alpha^3)^2$. Wprowadzenie wielkości

$$I_{il} = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha (r_\alpha'^2 \delta^{il} - r_\alpha'^i r_\alpha'^l)$$

pozwala zapisać wyrażenie na energię ruchu obrotowego w zwięzłej formie

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^3 I_{il} \omega^i \omega^l = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I} \vec{\omega} \quad (64)$$

Wielkość \mathbf{I} nazywano tensorem momentu bezwładności:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Współczynniki leżące na głównej przekątnej nazwano momentami głównymi, natomiast współczynniki pozadiagonalne momentami dewiacji. Dokonując zamiany oznaczeń: $r_\alpha^1 \rightarrow x_\alpha, r_\alpha^2 \rightarrow y_\alpha, r_\alpha^3 \rightarrow z_\alpha$ otrzymano

$$\mathbf{I} = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \begin{bmatrix} y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2 & -x_\alpha' y_\alpha' & -x_\alpha' z_\alpha' \\ -x_\alpha' y_\alpha' & x_\alpha'^2 + z_\alpha'^2 & -y_\alpha' z_\alpha' \\ -x_\alpha' z_\alpha' & -z_\alpha' y_\alpha' & x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 \end{bmatrix}$$

Zauważono, że $I_{ij} = I_{ji}$, co znaczy, że \mathbf{I} jest rzeczywistą macierzą symetryczną. Zgodnie z odpowiednim twierdzeniem matematycznym każdą macierz tego typu można zdiagonalizować. Oznacza to, że istnieje układ współrzędnych $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, w którym tensor momentu bezwładności rozważanej bryły ma postać

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_3 \end{bmatrix}$$

Osie $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ nazwano osiami głównymi bryły.

Uwaga. Dotychczasowe rozważania dotyczyły dyskretnego układu n mas punktowych. Można je jednak powtórzyć również dla ciągłych rozkładów mas. Aby obliczyć współczynniki tensora bezwładności dla rozkładu ciągłego wystarczy zastąpić sumowanie po masach punktowych przez całkowanie odpowiedniej funkcji gęstości po objętości ciała.

$$\sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \dots \rightarrow \int_V d^3r \rho(\vec{r}) \dots$$

Rozważono teraz sytuację, w której ruch bryły jest ograniczony więzami w taki sposób, że jest możliwy tylko obrót wokół osi o kierunku wyznaczonym przez wektor $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Prędkość kątowna przyjmuje wtedy postać $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$. Podstawiając to do (64) otrzymano wyrażenie na energię rotacyjną przy obrocie wokół stałej osi

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i,l \in \{x,y,z\}} I_{il} n_i n_l \omega^2 = \frac{1}{2} I_{\hat{n}} \omega^2$$

Wprowadzoną wielkość

$$I_{\hat{n}} = \sum_{i,l \in \{x,y,z\}} I_{il} n_i n_l$$

nazwano momentem bezwładności bryły względem osi wyznaczonej przez wektor \hat{n} .

10.4 Moment pędu

Moment pędu mas m_1, \dots, m_n względem początku układu współrzędnych zdefiniowano jako

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{\alpha}$$

Wstawiając \vec{r}_{α} z (62) i $\dot{\vec{r}}_{\alpha} = \vec{v}_{\alpha}$ z (63) otrzymano

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\vec{r}_0 + \vec{r}_{\alpha}') \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}') = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \vec{r}_{\alpha}' \times \vec{v}_0 + \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}') + \vec{r}_{\alpha}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}'))$$

Drugi i trzeci iloczyn wektorowy są równe 0, ponieważ początek układu primowanego umieszczono w środku masy bryły. Powyższy wzór redukuje się zatem do postaci

$$\vec{L} = \vec{L}_0 + \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}')$$

gdzie

$$\vec{L}_0 = M \vec{r}_0 \times \vec{v}_0$$

Zauważano, że jeśli środek masy pozostaje w spoczynku względem układu laboratoryjnego, to $\vec{L}_0 = 0$. Przekształcono iloczyn wektorowy występujący w drugim składniku momentu pędu \vec{L} :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\alpha}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}') &= \sum_{i,j,k \in \{x,y,z\}} \epsilon^{ijk} \hat{e}_i' r_{\alpha j}' (\omega \times \vec{r}_{\alpha}')_k = \\ &= \sum_{i,j,k,m,l \in \{x,y,z\}} \epsilon^{ijk} \hat{e}_i' r_{\alpha j}' \epsilon^{kml} \omega_l r_{\alpha m}' = \\ &= \sum_{i,j,m,l \in \{x,y,z\}} \hat{e}_i' (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) r_{\alpha j}' \omega_l r_{\alpha m}' = \\ &= \sum_{i,l \in \{x,y,z\}} \hat{e}_i' \left(r_{\alpha}'^2 \delta_{il} - r_{\alpha i}' r_{\alpha l}' \right) \omega_l \end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}') = \sum_{i,l \in \{x,y,z\}} \hat{e}_i' I_{il} \omega_l$$

$$\vec{L} = \vec{L}_0 + \sum_{i,l \in \{x,y,z\}} \hat{e}_i' I_{il} \omega_l = \vec{L}_0 + \mathbf{I} \vec{\omega}$$

10.5 Dynamika bryły sztywnej

Policzono pochodną czasową momentu pędu:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

gdzie d' - pochodna w układzie bryły. Wielkość \vec{N} nazwano momentem siły. Rozważono teraz szczególną sytuację, w której $\vec{L}_0 = 0$. Jeżeli osie układu związanego z bryłą ustawiono tak, aby były zgodne z osiami głównymi, to wyrażenie na moment pędu bryły przyjmie prostą postać

$$\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_x \omega_x \\ \tilde{I}_y \omega_y \\ \tilde{I}_z \omega_z \end{bmatrix} \quad (65)$$

Podstawiono to do iloczynu wektorowego z równania (65):

$$\vec{\omega} \times \vec{L} = \det \left(\begin{bmatrix} \hat{e}'_x & \hat{e}'_y & \hat{e}'_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_x \omega_x & I_y \omega_y & I_z \omega_z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} (I_z - I_y) \omega_y \omega_z \\ (I_x - I_z) \omega_x \omega_z \\ (I_y - I_x) \omega_x \omega_y \end{bmatrix}$$

Otrzymano więc następujący układ równań:

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = N'_x \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = N'_y \\ I_x \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = N'_z \end{cases}$$

Są to tzw. równania Eulera.

10.6 Prawa zachowania

Okazuje się, że z równań Eulera daje się wyprowadzić prawa zachowania. Rozważono sytuację, w której $\vec{N} = 0$. Jeżeli i -te równanie pomnożono przez ω_i i zsumowano je stronami, to otrzymano:

$$I_x^2 \omega_x \dot{\omega}_x + I_y^2 \omega_y \dot{\omega}_y + I_z^2 \omega_z \dot{\omega}_z = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) \right) = \frac{d}{dt} T_{rot} = 0 \quad (66)$$

co oznacza, że wielkość w nawiasach jest zachowana. W wyrażeniu tym można rozpoznać energię rotacyjną ze wzoru (64). Otrzymano więc prawo zachowania energii. Kolejne prawo zachowania otrzymano mnożąc i -te równanie Eulera przez $I_i \omega_i$ i sumując stronami.

$$I_x^2 \omega_x \dot{\omega}_x + I_y^2 \omega_y \dot{\omega}_y + I_z^2 \omega_z \dot{\omega}_z = \frac{d}{dt} (I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2) = \frac{d}{dt} \vec{L}^2 = 0 \quad (67)$$

Zatem zachowany jest również kwadrat momentu pędu.

$$\vec{N} = 0 \implies T_{rot} = const, \quad \vec{L}^2 = const$$

10.7 Kąty Eulera

Niech $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ będą wersorami osi kartezjańskiego układu współrzędnych. Rozważono przekształcenie tego układu $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z) \rightarrow (\hat{e}_{x'}, \hat{e}_{y'}, \hat{e}_{z'})$ składające się z trzech obrotów:

1. Obrót wokół osi \hat{e}_z o kąt ϕ . W wyniku tego obrotu \hat{e}_x przejdzie na $\hat{x}_\phi = \cos\phi \hat{e}_x + \sin\phi \hat{e}_y$.
2. Obrót wokół osi \hat{x}_ϕ o kąt θ . Po tym obrocie \hat{e}_z przejdzie na $\hat{e}_{z'} = \cos\theta \hat{e}_z + \sin\theta \hat{y}_\phi$.
3. Obrót wokół osi $\hat{e}_{z'}$ o kąt ψ .

Kąty (ϕ, θ, ψ) nazwano kątami Eulera. Wiedząc, który kąt odpowiada któremu obrotowi, można wyrazić prędkość kątową za pomocą kątów Eulera:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{e}_z + \dot{\theta} \hat{x}_\phi + \dot{\psi} \hat{e}_{z'}$$

Znaleziono jej postać w układzie początkowym:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\phi} \hat{e}_z + \dot{\theta} (\cos(\phi) \hat{e}_x + \sin(\phi) \hat{e}_y) + \dot{\psi} (\sin(\theta) \sin(\phi) \hat{e}_x - \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{e}_y + \cos(\theta)) \hat{e}_z = \\ &= (\dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \sin(\theta) \sin(\phi)) \hat{e}_x + (\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\phi)) \hat{e}_y + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta)) \hat{e}_z \end{aligned}$$

Aby znaleźć wyrażenie na prędkość kątową w układzie primowanym należy wykonać transformację odwrotną:

$$\phi \rightarrow -\psi$$

$$\theta \rightarrow -\theta$$

$$\psi \rightarrow -\phi$$

Zatem prędkość kątową wyrażoną w układzie primowanym ma postać

$$\vec{\omega} = [\dot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi)] \hat{e}_{x'} + [-\dot{\theta} \sin(\psi) + \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi)] \hat{e}_{y'} + [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)] \hat{e}_{z'}$$

10.8 Bąk swobodny

Rozważono dowolne, obracające się ciało, na które nie działa niezrównoważony moment siły. Takie ciało nazwano bąkiem swobodnym. Wybrano układ związany z bąkiem w taki sposób, aby tensor bezwładności bąka był w nim diagonalny. Osie oznaczono tak, aby spełniona była nierówność

$$I_x \leq I_y \leq I_z$$

Dla bąka swobodnego zachowana jest energia i kwadrat momentu pędu. Równanie zachowania energii

$$I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 = 2E$$

można zapisać w postaci

$$\frac{\omega_x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{I_x}}\right)^2} + \frac{\omega_y^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{I_y}}\right)^2} + \frac{\omega_z^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{I_z}}\right)^2} = 1$$

Jest to równanie elipsoidy o stosunkach

$$\frac{1}{\sqrt{I_x}} : \frac{1}{\sqrt{I_y}} : \frac{1}{\sqrt{I_z}}$$

Na tej samej zasadzie równanie zachowania kwadratu momentu pędu

$$I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 = \vec{L}^2$$

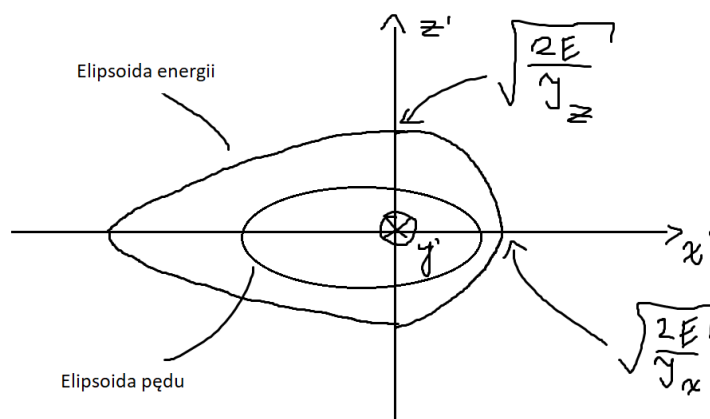
jest równaniem elipsoidy

$$\frac{\omega_x^2}{\left(\frac{L}{I_x}\right)^2} + \frac{\omega_y^2}{\left(\frac{L}{I_y}\right)^2} + \frac{\omega_z^2}{\left(\frac{L}{I_z}\right)^2} = 1$$

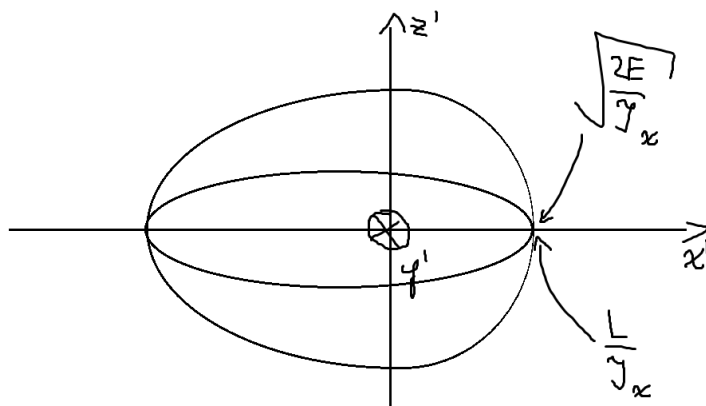
o stosunkach

$$\frac{1}{I_x} : \frac{1}{I_y} : \frac{1}{I_z}$$

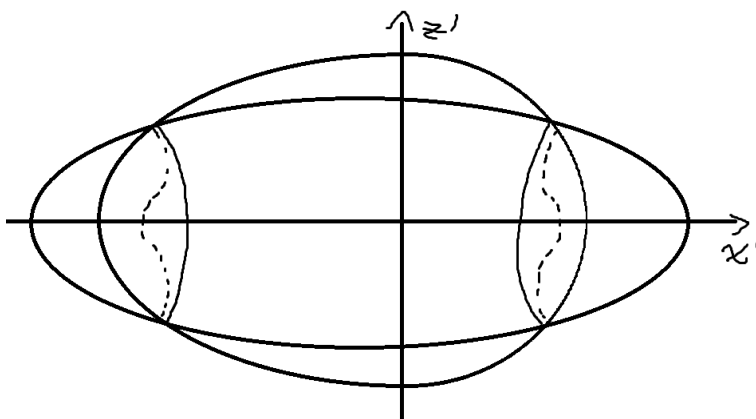
Z powyższych rozważań wynika, że wektor $\vec{\omega}$ może przyjmować tylko wartości leżące na przecięciu elipsoid energii i kwadratu momentu pędu. Wyróżniono kilka klas przecięć:



Rysunek 31: Przecięcie jest zbiorem pustym. Sytuacja niefizyczna.



Rysunek 32: Minimalna wartość kwadratu momentu pędu odpowiadająca danej energii.



Rysunek 33: Prędkość kątowna może przyjmować wartości rozmieszczone wokół osi x' .

Dalsze zwiększanie kwadratu momentu pędu spowoduje zetknięcie się elipsoid kolejno na osiach y' i z' . Minimalna prędkość, przy której możliwy jest obrót bąka wokół y' wynosi

$$\omega'_y = \frac{L}{I_y} = \sqrt{\frac{2E}{I_y}}$$

Im większy jest zakres wartości przyjmowanych przez wektor prędkości kątowej, tym większe możliwe zaburzenia w ruchu obrotowym bryły.

11 Równania Hamiltona

Formalizm lagranżjanowski jest równoważny formalizmowi hamiltonowskiemu, w którym funkcję lagranżjanu przejmują hamiltonian, a równanie Lagrange'a II rodzaju zostaje zastąpione przez równania Hamiltona. Różnicą tych formalizmów jest stosowanie innych zmiennych, które są od siebie niezależne: w formalizmie lagranżjanowskim są to: położenie q_I i prędkość v_I (zależność

$$v_I = \dot{q}_I \quad (68)$$

jest stosowana dopiero w równaniu ruchu), w formalizmie hamiltonowskim są to: położenie q_I i pęd p_I zdefiniowany jako

$$p_I = \frac{\partial L}{\partial v_I}. \quad (69)$$

Przy tak zdefiniowanym pędzie p_I równanie Lagrange'a II rodzaju można zapisać:

$$0 = \dot{p}_I - \frac{\partial L}{\partial q_I}. \quad (70)$$

Stosuje się inny formalizm w poszczególnych działach fizyki, mając na uwadze łatwiejszy sposób opisu danego zagadnienia fizycznego. W Tabeli 2 przedstawiono podstawowe porównanie obu formalizmów: lagranżjanowskiego i hamiltonowskiego.

Tabela 2: Porównanie formalizmów: lagranżjanowskiego i hamiltonowskiego

	mechanika lagranżjanowska	mechanika hamiltonowska
zmienne (wielkości niezależne)	$q_I, v_I = \dot{q}_I$	$q_I, p_I = \frac{\partial L}{\partial v_I}$
charakterystyka	lagranżjan $L(q_I, v_I, t)$	hamiltonian $H(q_I, p_I, t)$
równanie Lagrange'a II rodzaju	$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_I} - \frac{\partial L}{\partial q_I}$ $v_I = \dot{q}_I$	$0 = \dot{p}_I - \frac{\partial L}{\partial q_I}$ $v_I = \dot{q}_I$ $v_I(q_I, p_I, t)$
zachowanie dla cząstki swobodnej	$\left. \begin{matrix} q_I = x \\ v_I = \dot{x} \end{matrix} \right\} L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$	$\left. \begin{matrix} q_I = x \\ p_I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \end{matrix} \right\}$
zastosowanie	teoria pola	mechanika kwantowa mechanika statystyczna

W celu wyznaczenia równań Hamiltona obliczono:

- zmianę lagranżjanu przy małym wychyleniu:

$$\delta L = \sum_{I=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_I} \delta q_I + \sum_{I=1}^N \frac{\partial L}{\partial v_I} \delta v_I \stackrel{(69)}{=} \sum_{I=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_I} \delta q_I + \sum_{I=1}^N p_I \delta v_I \quad (71)$$

- różniczkę sumy $\sum_{I=1}^N p_I v_I$:

$$\delta \left(\sum_{I=1}^N p_I v_I \right) = \sum_{I=1}^N \delta p_I v_I + \sum_{I=1}^N p_I \delta v_I \quad (72)$$

- różniczkę wyrażenia $\sum_{I=1}^N p_I v_I - L$:

$$\begin{aligned}
\delta \left(\sum_{I=1}^N p_I v_I - L \right) &\stackrel{(71)(72)}{=} \sum_{I=1}^N \delta p_I v_I + \sum_{I=1}^N p_I \delta v_I - \sum_{I=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_I} \delta q_I - \sum_{I=1}^N p_I \delta v_I = \\
&\stackrel{(68)(69)}{=} \sum_{I=1}^N \delta p_I \dot{q}_I + \sum_{I=1}^N p_I \delta v_I - \sum_{I=1}^N \dot{p}_I \delta q_I - \sum_{I=1}^N p_I \delta v_I = \\
&= \sum_{I=1}^N \dot{q}_I \delta p_I - \sum_{I=1}^N \dot{p}_I \delta q_I
\end{aligned} \tag{73}$$

Następnie zdefiniowano funkcję – hamiltonian:

$$H(q_I, p_I, t) = \sum_{I=1}^N p_I v_I(q_J, p_J, t) - L(q_I, v_I(q_J, p_J, t), t) . \tag{74}$$

Biorąc pod uwagę fakt, że równanie (73) jest różniczką hamiltonianu otrzymano zależności:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_I} = -\dot{p}_I \\ \frac{\partial H}{\partial p_I} = \dot{q}_I \end{cases} . \tag{75}$$

które są równaniami Hamiltona.

Następnie pokazano możliwość przejścia pomiędzy formalizmem lagranżjanowskim i hamiltonowskim:

- stosując zależność równania Lagrange'a II rodzaju

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_I} &= \frac{\partial}{\partial q_I} \left(\sum_{k=1}^N p_k v_k(q_J, p_J, t) - L(q_I, v_I(q_M, p_M, t), t) \right) = \\
&= \sum_{k=1}^N p_k \frac{\partial v_k}{\partial q_I} - \frac{\partial L}{\partial q_I} - \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial v_I} \frac{\partial v_I}{\partial q_I} = \\
&\stackrel{(69)}{=} \sum_{k=1}^N p_k \frac{\partial v_k}{\partial q_I} - \frac{\partial L}{\partial q_I} - \sum_{k=1}^N p_k \frac{\partial v_I}{\partial v_I} = \\
&= -\frac{\partial L}{\partial q_I} \stackrel{(70)}{=} -\dot{p}_I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_I} &= \frac{\partial}{\partial p_I} \left(\sum_{k=1}^N p_k v_k(q_J, p_J, t) - L(q_I, v_I(q_M, p_M, t), t) \right) = \\
&= v_I + \sum_{k=1}^N p_k \frac{\partial v_k}{\partial p_k} - \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial p_I} = \\
&\stackrel{(69)}{=} v_I + \sum_{k=1}^N p_k \frac{\partial v_k}{\partial p_k} - \sum_{k=1}^N p_k \frac{\partial v_k}{\partial p_I} = \\
&= v_I \stackrel{(68)}{=} \dot{q}_I
\end{aligned}$$

- stosując zależność równań Hamiltona

$$\begin{aligned}
-\dot{p}_I &\stackrel{(75)}{=} \frac{\partial H}{\partial q_I} = -\frac{\partial L}{\partial q_I} \\
\dot{q}_I &\stackrel{(75)}{=} \frac{\partial H}{\partial p_I} = v_I
\end{aligned}$$

Zatem potwierdzono równoważność opisu formalizmem lagranżjanowskim i hamiltonowskim.

Przykład:Oscylator harmoniczny

Lagranżjan dla oscylatora harmonicznego jest postaci:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 . \quad (76)$$

Pęd zgodnie z zależnością opisaną równaniem (69) wynosi:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} , \quad (77)$$

następnie przekształcając powyższe równanie wyznaczono prędkość \dot{x} :

$$\dot{x} = \frac{p}{m} . \quad (78)$$

Potem zgodnie ze wzorem (74) wyznaczono hamiltonian dla oscylatora harmonicznego, korzystając z równań (76),(77),(78):

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 .$$

W celu przedstawienia przestrzeni fazowej (2N-wymiarowej przestrzeni o współrzędnych q_I, p_I) dla oscylatora harmonicznego należało wyznaczyć położenie x i pęd p , zatem najpierw obliczono odpowiednie różniczki po czasie:

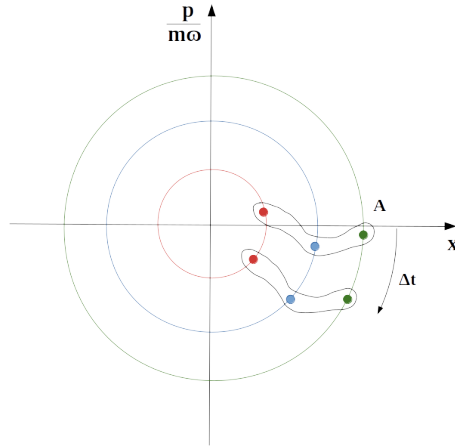
$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{m}\dot{p} = -\omega^2 x ,$$

a potem wyznaczono położenie x i pęd p :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \gamma) \\ p(t) &= m\dot{x}(t) = -mA\omega \sin(\omega t + \gamma) \end{aligned} .$$

Następnie pęd p podzielono przez $m\omega$, aby otrzymać funkcję wyrażaną w jednostkach położenia x :

$$\frac{p(t)}{m\omega} = -A \sin(\omega t + \gamma) .$$

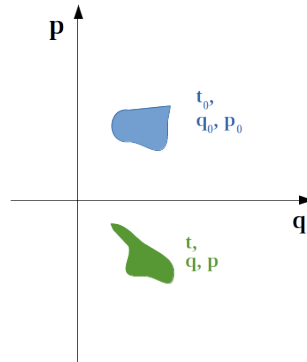


Rysunek 34: Przestrzeń fazową dla oscylatora harmonicznego

Na Rysunku 34 przedstawiono przestrzeń fazową dla oscylatora harmonicznego. Przy tak skonstruowanym wykresie punkty materialne przemieszczają się w czasie z taką samą prędkością kątową – zachowany jest kształt (i pole powierzchni) narysowanego obszaru A. Fakt ten jest treścią twierdzenia Liouville’a.

Twierdzenie Liouville’a

Podczas ewolucji układów spełniających równania Hamiltona zachowana jest objętość (w przypadku przestrzeni dwuwymiarowej – pole) zajmowana przez te układy w przestrzeni fazowej.



Rysunek 35: Ewolucja pola w przestrzeni fazowej

Dowód: Objętość w przestrzeni fazowej jest $V_f(t)$ jest zależna od czasu:

$$V_f(t) = \int_{V_f(t)} d^N q d^N p . \quad (79)$$

W celu uproszczenia rachunków rozważono sytuację dla 1 stopnia swobody ($N = 1$), wtedy wzór (79) przyjmuje postać:

$$V_f(t) = \int_{V_f(t)} dq dp , \quad (80)$$

następnie zmieniono zmienne pod całką (nowe zmienne dq_0, dp_0 są niezależne od czasu):

$$V_f(t) = \int_{V_0} |J| dq_0 dp_0 ,$$

gdzie $|J|$ jest jacobianem zamiany zmiennych:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial q_0} & \frac{\partial q}{\partial p_0} \\ \frac{\partial p}{\partial q_0} & \frac{\partial p}{\partial p_0} \end{pmatrix} = \frac{\partial q}{\partial q_0} \frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\partial q}{\partial p_0} \frac{\partial p}{\partial q_0}. \quad (81)$$

Zrózniczkowano objętość $V_f(t)$ po czasie:

$$\frac{d}{dt} V_f(t) = \int_{V_0} \left| \frac{dJ}{dt} \right| dq_0 dp_0, \quad (82)$$

od czasu zależy tylko jacobian J . W celu przeprowadzenia zależności jacobianu J od czasu t przypominano wyprowadzane w Rozdziale 6 przekształcenie dla położenia $\vec{r}_k(q_1, \dots, q_N, t)$ zależnego od współrzędnych uogólnionych q_I oraz czasu t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_J} &= \sum_{I=1}^N \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_I \partial q_J} \dot{q}_I + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_J \partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_J} \left(\sum_{I=1}^N \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_I} \dot{q}_I + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_J} \end{aligned} \quad (83)$$

Zależność jacobianu J od czasu t wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &\stackrel{(81)}{=} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q}{\partial q_0} \frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\partial q}{\partial p_0} \frac{\partial p}{\partial q_0} \right) = \\ &\stackrel{(83)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial q_0} \dot{q} \right) \frac{\partial p}{\partial p_0} + \frac{\partial q}{\partial q_0} \left(\frac{\partial}{\partial p_0} \dot{p} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial p_0} \dot{q} \right) \frac{\partial p}{\partial q_0} - \frac{\partial q}{\partial p_0} \left(\frac{\partial}{\partial q_0} \dot{p} \right) = \\ &\stackrel{(75)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial q_0} \frac{\partial H}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\partial q}{\partial q_0} \left(\frac{\partial}{\partial p_0} \frac{\partial H}{\partial q} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial p_0} \frac{\partial H}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial q_0} + \frac{\partial q}{\partial p_0} \left(\frac{\partial}{\partial q_0} \frac{\partial H}{\partial q} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial q_0 \partial p_0} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_0 \partial q_0} = 0, \end{aligned}$$

zatem równanie (83) jest równe 0: $\frac{d}{dt} V_f(t) = 0$, czyli $V_f(t) = \text{const}$, co oznacza, że objętość jest zachowana.

Twierdzenie Poincaré'go o powrocie

Niech przekształcenie $T: X \rightarrow X$ zachowuje objętość w zbiorze X oraz niech objętość tego zbioru jest skończona. Wówczas dla każdego zbioru $A \subset X$ o dodatniej objętości prawie każdy punkt $x_0 \in A$ powraca do A po pewnej liczbie iteracji przekształcenia T ($\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ T^n(x_0) \in A$).

Prawie każdy oznacza, że objętość zbioru punktów, które nie mają tej własności jest równa zero.

Dowód:

Niech zbiór punktów B , który w chwili t_0 znajdował się w zbiorze A , będzie zbiorem, który nigdy nie powróci do zbioru A . Zatem część wspólna zbioru B i przekształceń $T^n(B)$ jest zbiorem pustym:

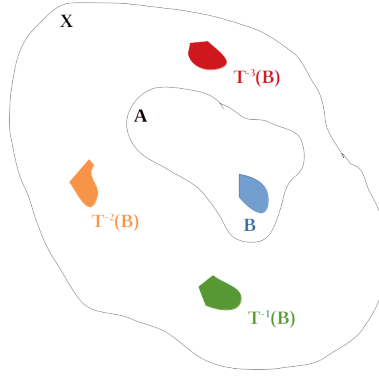
$$B \cap T^n(B) = \emptyset \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Powyższe równanie pomnożono obustronnie przez T^{-n-k} :

$$T^{-(n+k)}(B) \cap T^{-k}(B) = \emptyset.$$

Następnie dokonano zamiany zmiennych: $-(n+k) \rightarrow -m$ oraz $-k \rightarrow -n$, gdzie $m \neq n$ i otrzymano:

$$T^{-m}(B) \cap T^{-n}(B) = \emptyset.$$



Rysunek 36: Schemat przekształceń T w zbiorze X

Jest niemożliwe, aby w zbiorze X zmieściła się nieskończona liczba przeciwobrazów B . Taka sytuacja jest możliwa tylko i wyłącznie, gdy objętość zbioru B jest równa 0.

Podstawowym zastosowaniem twierdzenia Poincaré'ego o powrocie jest prawdopodobieństwo. Twierdzenie to nie mówi o realnych układach mechanicznych.

12 Równanie Hamiltona-Jacobiego

Przypomnienie: Zasada ekstremalnego działania Hamiltona (Rozdział 6)

Rozważono ruch rzeczywisty $q(t)$ układu o lagranżjanie $L(q, \dot{q}, t)$, gdy układ przesuwa się od q_0 do q w przedziale czasu (t_0, t) . Działanie Hamiltona $S(q_0, t_0, q, t)$ jest zdefiniowane:

$$S = \int_{t_0}^t L dt . \quad (84)$$

Powyższe równanie przekształcono:

$$L = \frac{dS}{dt} . \quad (85)$$

Następnie rozpisano różniczkę $\frac{dS}{dt}$:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{I=1}^N \frac{\partial S}{\partial q_I} \dot{q}_I ,$$

którą podstawiono ją do równania (85):

$$L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{I=1}^N \frac{\partial S}{\partial q_I} \dot{q}_I . \quad (86)$$

W celu przeprowadzenia kolejnych przekształceń przypomniano wyprowadzane w Rozdziale 6 przekształcenie dla położenia $\vec{r}_k(q_1, \dots, q_N, t)$ zależnego od współrzędnych uogólnionych q_I oraz czasu t :

$$\dot{\vec{r}}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum_{I=1}^N \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I} \dot{q}_I + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$$

Pamiętając, że położenie i prędkość jest rozpatrywana jako niezależne zmienne, zatem:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_I} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_I} . \quad (87)$$

Po przypomnieniu równania (87) przekształcono $\frac{\partial S}{\partial q_I}$:

$$\frac{\partial S}{\partial q_I} \stackrel{(87)}{=} \frac{\partial \dot{S}}{\partial \dot{q}_I} \stackrel{(85)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_I} \stackrel{(69)}{=} p_I \quad (88)$$

Otrzymane powyżej przekształcenie podstawiono do równania (86):

$$L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{I=1}^N p_I \dot{q}_I$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\sum_{I=1}^N p_I \dot{q}_I - L \right) \quad (89)$$

Pamiętając o równaniu (74) przekształcono równanie (89):

$$0 = \frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q_I, \frac{\partial S}{\partial q_I}, t \right) \quad (90)$$

i otrzymano równanie Hamiltona-Jacobiego.

Twierdzenie

Niech $S = S(q_i, \alpha_I, t)$ jest rozwiązaniem równania Hamiltona-Jacobiego, przy czym α_I ($I = 1, \dots, N$) są stałymi dowolnymi. Wtedy $\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha_I}$ jest całką pierwszą równania Hamiltona, czyli $\beta_I = \text{const}$.

Twierdzenie Jacobiego

Niech $S = S(q_i, \alpha_I, t)$ jest rozwiązaniem równania Hamiltona-Jacobiego. Wówczas przy rozsądnych założeniach (czyli że funkcja jest odpowiednio gładka, różniczkowalna, itp.) funkcje $q_I = q_I(t, \alpha_I, \beta_I)$, $p_I = p_I(t, \alpha_I, \beta_I)$ określone za pomocą związków:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_I} = \beta_I = \text{const} \quad (91)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_I} = p_I \quad (92)$$

są rozwiązaniami równań Hamiltona.

Przykład: Cząstka swobodna

Hamiltonian cząstki swobodnej jest dany wzorem:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 . \quad (93)$$

Zgodnie ze wzorem (88) pęd cząstki swobodnej wynosi:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} . \quad (94)$$

Podstawiając równania (93) i (94) do równania (90) otrzymano równanie Hamiltona-Jacobiego dla cząstki swobodnej:

$$0 = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 . \quad (95)$$

Zgodnie ze wzorem (84) wyznaczono działanie S dla cząstki swobodnej:

$$S(x, t) = -Et + S_0(x) , \quad (96)$$

gdzie E jest energią, $S_0(x)$ – pewną funkcją położenia x . Otrzymany wzór na działanie S podstawiono do równania (95), otrzymano:

$$0 = -E + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 .$$

Powyższy wzór przekształcono, aby wyznaczyć funkcję $S_0(x)$:

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} = \pm \sqrt{2mE} \quad \implies \quad S_0 = \pm \sqrt{2mE}(x - x_0) .$$

Otrzymany wzór podstawiono do równania (96):

$$S(x, t) = -Et \pm \sqrt{2mE}(x - x_0) , \quad (97)$$

Zatem omawiany przypadek jest zagadaniem mającym 1 stopień swobody oraz 2 stałe (E, x_0). W celu wyznaczenia położenia x skorzystano z twierdzenia Jacobiego. Stałą α_I w rozważanym przypadku jest energia E , wtedy równanie (91) przyjmuje postać:

$$\text{const} \stackrel{(91)}{=} \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \sqrt{\frac{m}{2E}}(x - x_0) .$$

Otrzymałą stałą nazwano t_0 . Wtedy po przekształceniu wzoru (97) otrzymano wzór na położenie x :

$$x = x_0 \pm \sqrt{\frac{2E}{m}}(t - t_0) .$$

Sprawdzono też przypadek, jeśli za stałą α_I przyjęto stałą x_0 , wtedy równanie (91) przyjmuje postać:

$$\text{const} \stackrel{(91)}{=} \frac{\partial S}{\partial x_0} = \pm \sqrt{2mE} .$$

13 Teoria zderzeń

Aby badać różne zjawiska, od charakteru oddziaływań ciał po ich strukturę wewnętrzną, bardzo często rozważa się **zderzenia wielociałowe**. Zderzenia takie można rozpatrywać w obrazie klasycznym (jaki tutaj będzie przedstawiony) oraz kwantowym (wykraczającym poza ramy tego wykładu). Należy zdawać sobie sprawę, że o ile **kwantowa teoria zderzeń** dostarcza wielu komplikacji i problemów, to korzysta ona z pojęć powstałych na gruncie **klasycznej teorii zderzeń**. Celem tej części wykładu jest przedstawienie tych właśnie podstawowych pojęć.

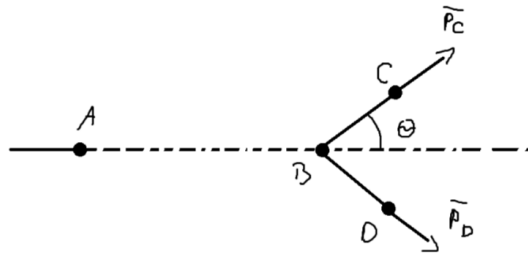
Kąt rozproszenia, parametr zderzenia

Rozważono proces zachodzący według następującego schematu:

$$A + B \rightarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

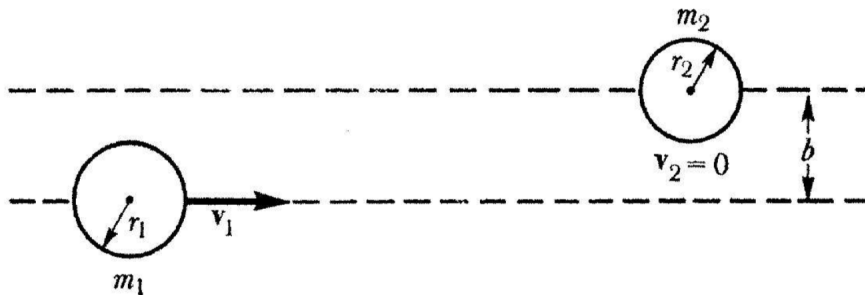
Schemat ten oznacza pewnego rodzaju oddziaływanie, które zachodzi pomiędzy ciałami A oraz B , w wyniku którego powstają ciała C_n . Ogólnie takie zjawiska noszą nazwę **zderzeń**. Jeżeli $n = 2$, to proces ten nazywany jest **zderzeniem dwuciałowym**. Ponadto, może zajść taka sytuacja, że $A = C_1, B = C_2$. Wtedy zderzenie to jest **elastyczne**. W przeciwnym wypadku zderzenie będzie nosiło nazwę **nieelastycznego**.

Rozważając zderzenie dwuciałowe, można je rozpatrzyć na podstawie poniższego rysunku:



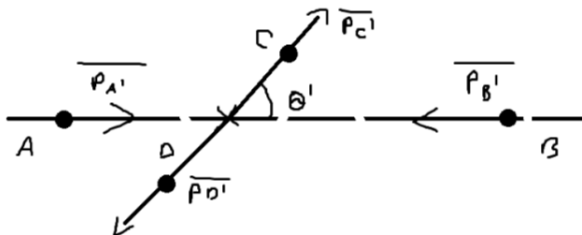
Rysunek 37: Schematyczne przedstawienie zderzenia

Kąt θ widoczny na Rysunku 37 nazywany jest **kątem rozproszenia**. Oznacza on kąt między pędem początkowym i końcowym cząstki padającej. Gdyby nie było ciała rozpraszającego, to oczywistym jest, iż ten kąt wynosi 0. Jeżeli $\theta = \pi$ to można powiedzieć, iż cząstka rozproszyła się do tyłu (Dobrym przykładem jest kula bilardowa, która odbija się od ścianki. Jeżeli jej ruch po zderzeniu ze ścianką odbywa się dokładnie w przeciwną stronę to wtedy kąt rozpraszania wynosi π). Istotna jest także jeszcze jedna wielkość przy opisie zderzeń, która znajdzie swoje zastosowanie nieco później. Nosi ona nazwę **parametru zderzenia** b i oznacza odległość między prostą, wzdłuż której cząstka padająca zbliża się do ciała rozpraszającego, a równoległą do niej prostą, przechodzącą przez środek ciała rozpraszającego. Graficzne przedstawienie tej wielkości znajduje się na Rysunku 38:



Rysunek 38: Graficzne wyjaśnienie wielkości zwanej *parametrem zderzenia*

Rysunek 39 odnosi się do układu, w którym całe zderzenie obserwowane jest z zewnątrz, czyli ciało rozpraszające spoczywa, a cząstka padająca na nie pada. Taki układ nosi nazwę **układu laboratoryjnego**. Można się zastanowić co się stanie po przejściu do **układu środka masy (CM)**. Można sobie wyobrazić, iż w CM zachodzi następująca sytuacja:



Rysunek 39: Zderzenie elastyczne w układzie CM

W tej sytuacji zachodzi:

$$\vec{p}_A = -\vec{p}_B$$

$$\vec{p}_C = -\vec{p}_D$$

Oczywistym jest fakt, że układy LAB i CM mogą zostać ze sobą powiązane. Potrzeba więc znaleźć przepis na przejście między układami pamiętając o fakcie, iż w ogólności $\theta \neq \theta'$.

Zaczynając od wyrażenia na energię stanu początkowego dla układu środka masy:

$$E = \frac{1}{2m_A} p_A'^2 + \frac{1}{2m_B} p_B'^2$$

Indeks A odnosi się do cząstki padającej, B do cząstki będącej centrum rozproszenia. Układ CM ma to do siebie, że wektory \vec{p}_A' oraz \vec{p}_B' mają równe długości, zatem można zapisać:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) p_A'^2.$$

Poza tym zachodzi również:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) p_C'^2.$$

Zderzenia są elastyczne, zatem masy są takie same. Z Rysunku 1 można zauważyć, że (prosta trygonometria):

$$\text{tg}(\theta) = \frac{V_{C\perp}}{V_{C\parallel}}.$$

Rozpisując dalej warunek na $\text{tg}(\theta)$ (patrzac na Rysunek 39):

$$\text{tg}(\theta) = \frac{V_{C\perp}'}{V_B' + V_{C\parallel}'}$$

Pamiętając, że w układzie CM $m_A V_A' = m_B V_B'$ można rozpisać powyższą zależność:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{V_{C\perp}'}{\frac{m_A}{m_B} V_A' + V_{C\parallel}'} = \frac{V_C' \sin(\theta')}{\frac{m_A}{m_B} V_C' + V_C' \cos(\theta')}$$

Ostatecznie wyrażenie na tangens kąta rozproszenia:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\sin(\theta')}{\frac{m_A}{m_B} + \cos(\theta')}.$$

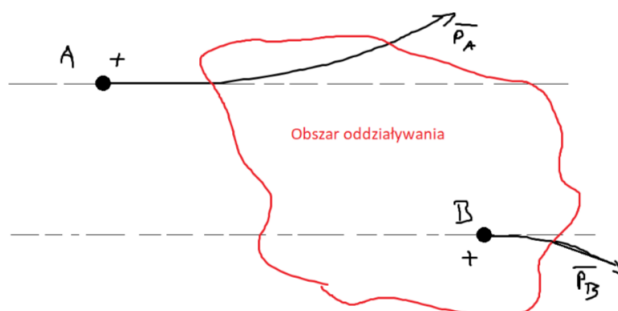
Jest to warunek wiążący ze sobą układy CM oraz LAB. Wynik ten daje pewne ciekawe wnioski jeśli założy się sytuację, w której $m_A = m_B$:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\sin(\theta')}{1 + \cos(\theta')} = \frac{2\sin(\frac{\theta'}{2})\cos(\frac{\theta'}{2})}{1 + 2\cos^2(\frac{\theta'}{2}) - 1} = \operatorname{tg}(\frac{\theta'}{2}).$$

Oznacza to zatem, że w układzie CM kąt rozpraszania jest **dwukrotnie większy** od kąta rozpraszania w LAB. Jeżeli zatem w układzie CM cząstki rozpraszają się pod kątem π , to w układzie LAB (jeżeli mają równe masy) rozpraszają się pod kątem $\frac{\pi}{2}$.

Różniczkowy i całkowity przekrój czynny

Zasadniczym problemem jaki można dalej rozważyć jest to, jak w powiększeniu wygląda proces zderzenia (w układzie LAB). Schematycznie przedstawia to Rysunek 40:



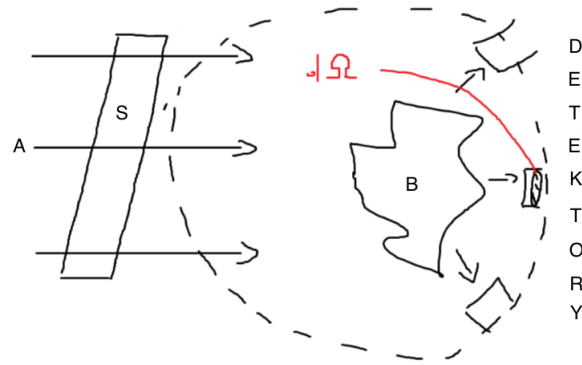
Rysunek 40: Mikroskopowe spojrzenie na zjawisko rozpraszania, uwzględniające fakt istnienia pewnego obszaru, w którym cząstka „czuje” obecność centrum rozproszeniowego

Jak widać, cząstka A wcale nie musi faktycznie UDERZYĆ w cząstkę B, aby można było mówić o ich wzajemnym oddziaływaniu. Może się zdarzyć sytuacja, w której cząstka A będzie oddziaływać z cząstką B, co pozwoli zmienić wektory ich pędów, przez co możliwym jest badanie kątów rozpraszania. Oczywiście jest jednak, że zanim cząstka padająca zbliży się na wystarczającą odległość, żeby móc oddziaływać, to znajduje się w obszarze, w którym „nie podlega oddziaływaniom”. Wygodnie jest zatem zdefiniować (lub raczej założyć) **istnienie obszaru oddziaływania** czyli obszaru, poza którym cząstka może być traktowana jako swobodna. Założenie to sprowadza się do warunku, że:

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \rightarrow \min_{|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

Okazuje się, że dla dużej ilości oddziaływań mikrofizycznych to założenie jest spełnione. Pytanie: jak z fizycznego punktu widzenia zrealizować takie zderzenie i jak mierzyć w nim jakieś wielkości?

Należy wziąć zlepek cząstek B zajmujący pewien obszar przestrzeni i zacząć bombardować go z pewnej strony cząstkami A. Cały obszar, w którym występują zderzenia należy obudować detektorami, które pozwolą wykryć wybicie cząstek B ze skupiska lub odchylenie cząstek A od ich pierwotnego toru (w skrócie - zarejestruje oddziaływanie A→B). Schematycznie przedstawia to Rysunek 41:



Rysunek 41: Schematyczne zobrazowanie realizacji detekcji cząstek rozproszonych z wiązki A przez centrum rozproszenia B

Tak zbudowany układ pozwala zmierzyć, ile cząstek wleci do detektora w jednostce czasu, czyli pozwala stworzyć wielkość:

$$dN(\theta, \phi).$$

Wielkość ta nie jest jednak czymś, co jednoznacznie mówi o oddziaływaniu, które zaszło. Jeżeli wzrośnie liczba cząstek padających, to liczba cząstek wykrytych również wzrośnie.

Z punktu widzenia doświadczenia, warto byłoby mieć wielkość definiującą prawdopodobieństwo wykrycia zdarzenia przez detektor. Potrzeba zatem zdefiniować strumień cząstek jako:

$$I = \frac{N}{S\Delta t}$$

a za jego pomocą można scharakteryzować współczynnik:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{dN(\theta, \phi)}{d\Omega}.$$

Współczynnik ten mówi o tym, jaka część (dN) strumienia cząstek (I) została rozproszona w części kąta bryłowego ($d\Omega$), w której znajduje się detektor. Taka wielkość nazywana jest **różniczkowym przekrojem czynnym na rozpraszanie** i jest wielkością wyrażającą prawdopodobieństwo zarejestrowania cząstek w obszarze kąta bryłowego $d\Omega$. Kąt ten zdefiniowany jest (w układzie sferycznym) jako:

$$d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$$

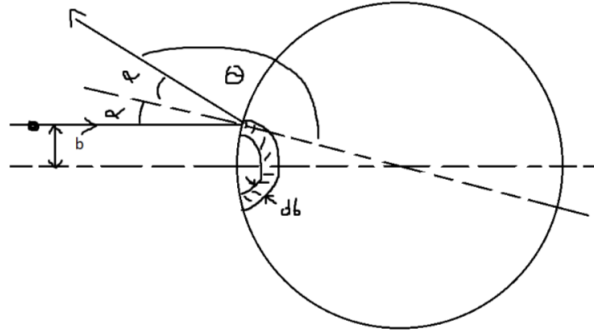
Gdyby teraz wysumować różniczkowe przekroje czynne po wszystkich możliwych częściach kąta bryłowego, otrzymany wynik byłby całką z różniczkowego przekroju czynnego po całym kącie bryłowym $d\Omega$, która nosi nazwę **całkowitego przekroju czynnego na rozpraszanie**:

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Przykłady

Rozpraszanie na sztywnej kuli

Niech będzie dana kula, w stronę której wystrzeliwane są cząstki. W ogólności cząstki nie będą trafiać w jej środek, zatem można założyć (mówiąc dodatkowo, że kąt padania i odbicia jest taki sam), że trajektoria cząstki będzie taka, jak zaprezentowana na Rysunku 42:



Rysunek 42: Układ prezentujący rozpraszanie na sztywnej kuli

Kąt odbicia α (związany w pewien sposób z kątem rozproszenia θ) będzie taki sam na całym pierścieniu tej kuli, który jest w odległości b od jej środka. Można zatem ograniczyć analizę zagadnienia do małego promienia pierścienia db . Wielkość b jest wcześniej wspomnianym parametrem zderzenia. Zależność między kątem odbicia a kątem rozproszenia jest następująca:

$$\theta = \pi - 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$$

co można wyznaczyć geometrycznie z rysunku.

Bardzo łatwo jest znaleźć teraz element powierzchni dS :

$$dS = R^2 \sin(\alpha) d\alpha d\phi,$$

oraz liczbę cząstek rejestrowanych dN :

$$dN = I dS \cos(\alpha).$$

Wykorzystując wzór na sinus podwójonego kąta:

$$dN = I \cos(\alpha) R^2 \sin(2\alpha) d\alpha d\phi = I \frac{1}{2} \sin(\pi - \theta) R^2 \frac{1}{2} d\theta d\phi$$

dotatkowo wykorzystano tu fakt, że $d\theta = -2d\alpha$. Ostatecznie:

$$dN = I \frac{R^2}{4} \sin(\theta) d\theta d\phi.$$

Zatem aby obliczyć różniczkowy przekrój czynny, należy skorzystać z relacji:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{dN(\theta, \phi)}{d\Omega}.$$

Znając wszystkie wielkości, można je podstawić do powyższego wzoru otrzymując:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{\frac{1}{4} I R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}{\sin(\theta) d\theta d\phi} = \frac{R^2}{4}.$$

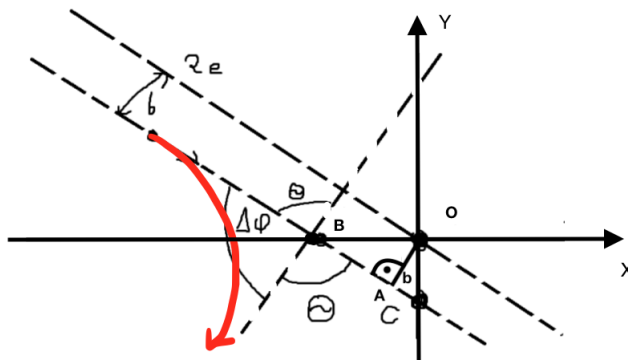
Wynik ten staje się bardziej przejrzysty, jeżeli policzy się całkowity przekrój czynny:

$$\sigma_{tot} = \int \frac{R^2}{4} d\Omega = \frac{R^2}{4} 4\pi = \pi R^2.$$

Wynik ten oznacza, że obszar w jaki uderzają cząstki jest kołem o promieniu równym promieniowi kuli (R). Zatem przekrój jest utożsamiany z kulą o promieniu R , która stanowi przeszkodę dla nadlatujących cząstek.

Rozpraszanie Rutherforda

W tym przykładzie zostanie omówione bodajże nasłyniejsze doświadczenie zderzeniowe - doświadczenie Rutherforda, w którym badał on razem ze swoimi współpracownikami rozpraszanie cząstek α na jądrach złota w cienkiej folii. Doświadczenie to jest o tyle ważne, że służyło mu ono później jako argument na rzecz jądrowego modelu atomu. Niech dany będzie układ taki, jak na Rysunku 43:



Rysunek 43: Układ prezentujący rozpraszanie Rutherforda

W zagadnieniu tym, potencjał rozpraszający dany jest następującym wzorem:

$$V = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha < 0$$

Można zauważyć, że występuje tutaj analogia do zagadnienia Keplera. Dla przypomnienia, trajektoria jest tam opisana następującym zestawem zależności:

$$\rho(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}$$

$$p = \frac{L^2}{\mu\alpha} < 0$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} > 0$$

Zakres kątów dozwolonych w zjawisku należy zmodyfikować tak, aby ta trajektoria dobrze opisywała zadany problem. Z analizy własności funkcji cosinus wynika, że możliwe kąty ϕ to takie, dla których spełniona jest zależność:

$$\frac{1}{2}\Delta\phi = \arccos\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Kiedy zakres kątów jest już ustalony, można przystąpić do poszukiwania wielkości potrzebnych do obliczenia przekroju czynnego. Pytanie brzmi zatem: jak wygląda parametr zderenia b ? Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy przejść przez pewne rachunki.

Przechodząc do układu biegunowego i podstawiając zależności na ρ :

$$x = \rho \cos(\phi) = \frac{p \cos(\phi)}{1 + \epsilon \cos(\phi)}$$

$$y = \rho \sin(\phi) = \frac{p \sin(\phi)}{1 + \epsilon \cos(\phi)}$$

Teraz, aby znaleźć równania opisujące asymptoty tej trajektorii, należy rozpatrzyć granice:

$$\lim_{\cos(\phi) \rightarrow -\frac{1}{\epsilon}} \frac{y}{x} = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2(\phi)}}{\cos(\phi)} = \mp \sqrt{\epsilon^2 - 1}$$

$$\lim_{\cos(\phi) \rightarrow -\frac{1}{\epsilon}} (y \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1}x = \pm p \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}})$$

skąd równania asymptot mają postać:

$$y = \mp \sqrt{\epsilon^2 - 1}x \pm p \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}.$$

Mając wyznaczone równania asymptot, można skorzystać z Rysunku 43 i geometrycznych zależności na nim widocznych, aby wyznaczyć parametr zderzenia b .

Po pierwsze można zauważyć, że długości odcinków OB i OC dane są wzorami:

$$|OB| = \frac{-p\epsilon}{\epsilon^2 - 1}$$

$$|OC| = \frac{-p\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$

znak minus występuje w obu wyrażeniach, gdyż opisują one długości odcinków, które nie mogą być ujemne. Ze względu na fakt, że $p < 0$, znak minus zapewnia dodatniość tych wyrażeń.

Teraz, korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie BOC można wyznaczyć długość odcinka BC :

$$|BC| = \sqrt{|OB|^2 + |OC|^2} = \frac{-p\epsilon^2}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}.$$

Natomiast z twierdzenia Talesa, można wyznaczyć długość odcinka OA :

$$|OA| = \frac{|OB||OC|}{|BC|} = \frac{-p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$

Czym jest długość odcinka OA ? Niczym innym, jak właśnie parametrem zderzenia b . Wyrażając go poprzez wprowadzone wcześniej wielkości:

$$\begin{aligned} b = |OA| &= \frac{-p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} = \frac{p(-\frac{1}{\epsilon})}{\sqrt{1 - (\frac{1}{\epsilon})^2}} = \frac{-p\cos(\frac{1}{2}\Delta\phi)}{\sqrt{1 - \cos^2(\frac{1}{2}\Delta\phi)}} = -p\text{ctg}(\frac{1}{2}\Delta\phi) = -p\text{ctg}(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) = \\ &= -p\text{tg}(\frac{\theta}{2}) = -\frac{L^2}{\mu\alpha}\text{tg}(\frac{\theta}{2}). \end{aligned}$$

Dodatkowo, gdy cząstka ucieknie do nieskończoności:

$$p_\infty = \mu v_\infty$$

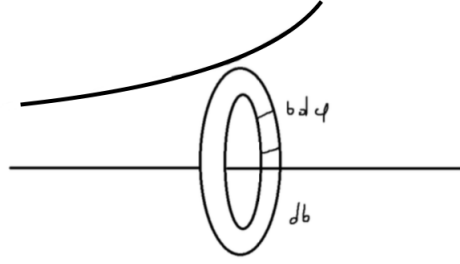
$$|\vec{L}| = |\vec{r}_\infty \times \vec{p}_\infty| = b\mu v_\infty$$

Zatem uwzględniając te zależności:

$$\begin{aligned} b &= -\frac{L^2}{\mu\alpha}\text{tg}(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{\mu\alpha}b^2\mu^2v_\infty^2\text{tg}(\frac{\theta}{2}) \\ &\downarrow \\ b &= \frac{-\alpha}{\mu v_\infty^2}\text{ctg}(\frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

co jest ostatecznym wyrażeniem na parametr zderzenia.

Teraz aby przejść dalej, należy zastanowić się nad wyrażeniem dN opisującym liczbę cząstek rejestrowanych przez detektory wykrywające rozproszenie. Wiadomym jest, że zjawisko ma symetrię wzdłuż osi x widocznej na Rysunku 43, zatem można rozpatrywać cząstki wpadające w pierścień o grubości db , którego fragment powierzchni $dS = bdbd\phi$, co przedstawione jest schematycznie na Rysunku 44:



Rysunek 44: Pierścień rozpraszania cząstek

Dla takiego układu można zapisać:

$$dN = I b d b d \phi = I b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta d\phi = I \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta d\phi,$$

co po podstawieniu do wyrażenia na różniczkowy przekrój czynny daje:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{I \alpha^2}{2 \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{1}{\mu^2 v_\infty^4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta d\phi \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta d\phi} = \frac{\alpha^2}{4 \mu^2 v_\infty^4} \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Wynik ten jest właśnie **wzorem Rutherforda** na różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie ładunku na nieruchomym, naładowanym centrum rozpraszającym. Pomimo faktu, że wzór ten został wyprowadzony przez Rutherforda, do dzisiaj bardzo często się z niego korzysta. Niesamowitym zbiegiem okoliczności jest fakt, że gdyby ten przekrój czynny obliczyć metodami mechaniki kwantowej, wynik okazuje się być **dokładnie taki sam** jak dla przypadku klasycznego. Nie jest to prawdą dla innych rodzajów oddziaływań, jednak dzięki temu przypadkowi można było odkryć istnienie jądra atomowego.

Całkowity przekrój czynny w tym przypadku jest równy:

$$\sigma_{tot} = \infty.$$

14 Przekształcenia kanoniczne

Niech będzie dany nowy zestaw współrzędnych uogólnionych: q_I oraz Q_I . Dodatkowo, niech ma on następujące własności:

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial Q_I}{\partial q_J} &\neq 0 \\ q_I &= q_I(Q_J, t) \\ \dot{q}_I &= \dot{q}_I(Q_J, \dot{Q}_J, t). \end{aligned}$$

Dla takiego zestawu, równanie Lagrange'a II rodzaju

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_I} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_I}$$

przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_I} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_I} = \frac{d}{dt} \sum_{J=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_J} \frac{\partial \dot{q}_J}{\partial \dot{Q}_I} - \sum_{J=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_J} \frac{\partial q_J}{\partial Q_I} - \sum_{J=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_J} \frac{\partial \dot{q}_J}{\partial Q_I} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{J=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_J} \frac{\partial q_J}{\partial Q_I} - \sum_{J=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_J} \frac{\partial q_J}{\partial Q_I} - \sum_{J=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_J} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_J}{\partial Q_I} = \sum_{J=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_J} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_J} \right) \frac{\partial q_J}{\partial Q_I} = 0, \end{aligned}$$

z czego zerowanie się ostatniego równania wynika z zerowania się wnętrza nawiasu w sumie.

Jak widać, taka zamiana zmiennych nie wpłynęła na postać równania Lagrange'a II rodzaju. Pytanie brzmi następująco: jak teraz wygląda sprawa mechaniki hamiltonowskiej w nowych współrzędnych? Na początek niech będą dane pędy uogólnione w nowym zestawie współrzędnych:

$$\begin{aligned} p_I &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_I} \\ P_I &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_I} \\ P_I &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_I} = \sum_{J=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_J} \frac{\partial \dot{q}_J}{\partial \dot{Q}_I} = \sum_{J=1}^N p_J \frac{\partial q_J}{\partial Q_I} \end{aligned}$$

Spełnienie równań Hamiltona (będących równaniami ruchu w przestrzeni fazowej) nie jest z góry zapewnione przy dowolnej zamianie zmiennych. Kluczowym problemem niniejszego rozdziału jest znalezienie warunku na transformację zmiennych zachowującą równania Hamiltona.

Aby to zrobić, należy zadać transformację współrzędnych w postaci:

$$\begin{aligned} q_I &= q_I(Q_J, P_J, t) \\ p_I &= p_I(Q_J, P_J, t) \end{aligned}$$

Przy takiej zamianie współrzędnych można odwołać się do zasady wariacyjnej Hamiltona na przestrzeni fazowej.

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \{ H = \sum_{I=1}^N p_I \dot{q}_I - L \} = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{I=1}^N p_I \dot{q}_I - H \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{I=1}^N \delta p_I \dot{q}_I + \sum_{I=1}^N p_I \frac{d}{dt} \delta q_I - \sum_{I=1}^N \frac{\partial H}{\partial p_I} \delta p_I - \sum_{I=1}^N \frac{\partial H}{\partial q_I} \delta q_I \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{I=1}^N \delta p_I \dot{q}_I - \sum_{I=1}^N \dot{p}_I \delta q_I - \sum_{I=1}^N \frac{\partial H}{\partial q_I} \delta q_I - \sum_{I=1}^N \frac{\partial H}{\partial p_I} \delta p_I \right) dt = \end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(- \sum_{I=1}^N \delta q_I \left(\dot{p}_I + \frac{\partial H}{\partial q_I} \right) + \sum_{I=1}^N \delta p_I \left(\dot{q}_I - \frac{\partial H}{\partial p_I} \right) \right) dt = 0$$

W wyrażeniach w wewnętrznych nawiasach powstały równania Hamiltona, co pozwala napisać, że wariacja działania istotnie jest równa 0.

Teraz zbierając wszystkie pozyskane dotąd informacje, powstały dwa układy:

- zestaw „małych” współrzędnych q_I, p_I ,
- zestaw „dużych” współrzędnych Q_I, P_I .

Dla zestawu „małych” współrzędnych łatwo jest zapisać równania Hamiltona:

$$\dot{q}_I = \frac{\partial H}{\partial p_I}$$

$$\dot{p}_I = - \frac{\partial H}{\partial q_I}$$

Pytanie brzmi, kiedy (dla jakich przekształceń) dla „dużych” współrzędnych można zapisać:

$$\dot{Q}_I = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_I}$$

$$\dot{P}_I = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_I}$$

W ogólności nie jest to takie proste, aby zadać te przekształcenia. Możliwe jest jednak znalezienie **warunku dostatecznego**, który pozwala znaleźć postać przekształceń zachowujących równania Hamiltona. Aby to zrobić, należy zapostulować takie oto warunki:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{I=1}^N p_I \dot{q}_I - H \right) dt = 0$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{I=1}^N P_I \dot{Q}_I - \mathcal{H} \right) dt = 0$$

Odejmując te wyrażenia od siebie:

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{I=1}^N (p_I \dot{q}_I - P_I \dot{Q}_I) - (H(q_k, p_k, t) - \mathcal{H}(Q_k, P_k, t)) \right) dt$$

Przyjmując hipotezę, iż funkcja podcałkowa jest zapisana jako $\frac{d\Phi}{dt}$, można przekształcić powyższe wyrażenie w następujący sposób:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi}{dt} = \delta \Phi \Big|_{t_0}^{t_1} = \{ \Phi = \Phi(Q_k, P_k) \} = \left(\sum_{I=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial Q_I} \delta Q_I + \sum_{I=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial P_I} \delta P_I \right) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Na końcach przedziału wyrażenie w nawiasie jest automatycznie równe 0, zatem zeruje się cała powyższa całka. O ile więc słuszna jest hipoteza o funkcji podcałkowej, to wszystko jest w porządku i może ona zostać finalnie zapisana w postaci:

$$d\Phi = \left(\sum_{I=1}^N (p_I dq_I - P_I dQ_I) - (H(q_k, p_k, t) - \mathcal{H}(Q_k, P_k, t)) \right) dt,$$

co pozwala powiedzieć, że wszystkie przekształcenia Φ spełniające powyższy warunek są tzw. **przekształceniami kanonicznymi** zachowującymi równania Hamiltona na przestrzeni fazowej w nowym układzie współrzędnych, tj.: $(q_I, p_I) \rightarrow (Q_I, P_I)$. Należy jednak zwrócić uwagę, że pomimo zachowania równań Hamiltona, sam hamiltonian może ulec zmianie.

Wyprowadzenie tego warunku odbyło się przy założeniu, że współrzędnymi w przestrzeni fazowej są położenia i pędy. Być może wcale nie musi tak być. Mianowicie, następująca postać nieco zmodyfikowanego warunku:

$$d\left(\Phi + \sum_{I=1}^N P_I Q_I\right) = \left(\sum_{I=1}^N (p_I dq_I + Q_I dP_I) - (H - \mathcal{H})\right) dt$$

może sugerować, jakby to dq_I i dP_I były zmiennymi niezależnymi. Oznaczając teraz:

$$S = \Phi + \sum_{I=1}^N P_I Q_I$$

i zauważając jednocześnie, że:

$$p_I = \frac{\partial S}{\partial q_I}$$

$$Q_I = \frac{\partial S}{\partial P_I}$$

można się zastanowić nad zależnością hamiltonianów obu układów. Okazuje się, że spełniają one relację:

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

zatem hamiltoniany (w najprostszym przypadku, w którym najczęściej rozważania się kończą) mogą różnić się co najwyżej o pochodną czasową funkcji podcałkowej. Parametryzacja nowego układu może zatem odbywać się poprzez część starych i nowych współrzędnych.

Kilka własności przekształceń kanonicznych

Przekształcenia rozważane są w ustalonej chwili t .

1. Identyczność. Przekształcenie tożsamościowe jest przekształceniem kanonicznym.

$$(q_I, p_I) \longrightarrow_{\Phi=0} (q_I, p_I)$$

2. Złożenie przekształceń.

Niech będą dane dwa przekształcenia Φ_1 i Φ_2 . Wynikiem złożenia przekształceń kanonicznych jest także przekształcenie kanoniczne.

$$(q_I, p_I) \longrightarrow_{\Phi=0} (\tilde{q}_I, \tilde{p}_I)$$

$$(\tilde{q}_I, \tilde{p}_I) \longrightarrow_{\Phi=0} (Q_I, P_I)$$

$$d\Phi_1 = \sum_{I=1}^N (p_I dq_I - \tilde{p}_I d\tilde{q}_I)$$

$$d\Phi_2 = \sum_{I=1}^N (\tilde{p}_I d\tilde{q}_I - P_I dQ_I)$$

$$d(\Phi_1 + \Phi_2) = \sum_{I=1}^N (p_I dq_I - P_I dQ_I)$$

3. Inwersja.

Przekształcenie odwrotne do przekształcenia kanonicznego jest również przekształceniem kanonicznym.

$$(q_I, p_I) \longrightarrow_{\Phi=0} (Q_I, P_I)$$

$$d\Phi = \sum_{I=1}^N (p_I dq_I - P_I dQ_I)$$

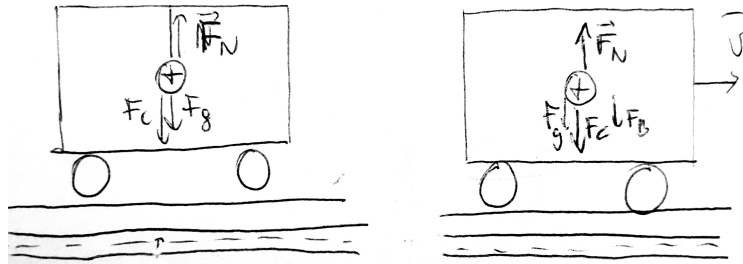
$$d(-\Phi) = \sum_{I=1}^N (P_I dQ_I - p_I dq_I)$$

15 Szczególna teoria względności

15.1 Problemy z zasadą względności

Prawa Newtona obowiązują w inercjalnych układach odniesienia i są niezmiennicze względem transformacji Galileusza.

Transformacja Galileusza nie jest stosowana dla praw elektromagnetyzmu. Zilustrowano to na przykładzie poniżej (Rysunek 45).



Rysunek 45: Wózek z cząstką naładowaną dodatnio

Wózek z cząstką o ładunku dodatnim zawieszoną na nitce porusza się jednostajnie z prędkością v względem układu związanego z powierzchnią Ziemi. Obserwator 1 jest nieruchomy w obranym układzie, obserwator 2 porusza się razem z wózkiem. Równoległe do toru wózka znajduje się nieskończenie długi przewód z nieruchomymi ładunkami ujemnymi. Siły działające na cząstkę zaobserwowane przez 1 i 2:

- siła grawitacji, reakcji nitki, Coulomba
- siła grawitacji, reakcji nitki, Coulomba, siła wynikająca z oddziaływania z polem magnetycznym wytworzonym przez poruszające się względnie ładunki w przewodniku

Można zauważyć, że w zależności od prędkości z jaką porusza się obserwator i wózek, zaobserwowano różne siły.

15.2 Elementy szczególnej teorii względności

Postulaty Einsteina:

- Prawa fizyki są jednakowe we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.
- Prędkość światła w próżni c jest taka sama we wszystkich układach inercjalnych. Nie zależy od ruchu źródła światła i odbiornika.

15.3 Transformacja Lorentza

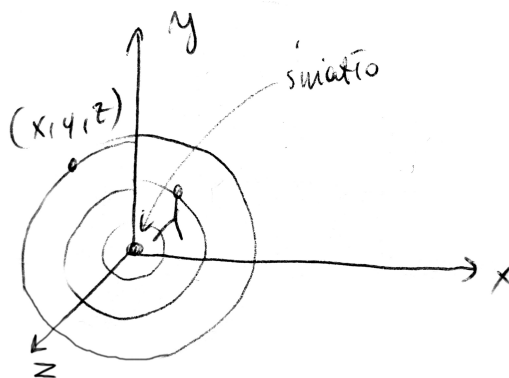
Rozpatrzono dwa układy poruszające się względem siebie ruchem jednostajnym. Transformacja Galileusza jest postaci:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{v}t \\ x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Poszukiwana transformacja nie wyróżnia układów odniesienia i spełnia postulaty Einsteina. Wyprowadzono transformację Lorentza modyfikując transformację Galileusza o czynnik γ zależny od wartości prędkości. Założono, że transformacja jest liniowa. Dla wygody przyjęto ruch w kierunku x .

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \gamma(\vec{r} - vt), & \gamma(|\vec{v}|) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ x &= \gamma(x' + vt') = \gamma(\gamma(x - vt) + vt') = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt' \\ \gamma vt' &= \gamma^2 vt + (1 - \gamma^2)x \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 v} x \right)\end{aligned}$$

Rozpatrzono sytuację, w której w początku układu współrzędnych znajduje się źródło światła. Emituje ono impuls rozchodzący się symetrycznie we wszystkich kierunkach. Opis rozchodzenia się takiej fali jest równoważny dla obu obserwatorów.



Rysunek 46: Impuls świetlny rozchodzący się we wszystkich kierunkach.

$$\begin{aligned}x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 & x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\ \gamma^2(x - vt)^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 \gamma^2 \left(t - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{x}{v} \right)^2 \\ \gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 xvt + \gamma^2 v^2 t^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 \gamma^2 t^2 - c^2 2(\gamma^2 - 1) \frac{x}{v} t + \frac{(\gamma^2 - 1)^2}{\gamma^2} \frac{x^2}{v^2} c^2 \\ t^2(\gamma^2 v^2 + c^2 - c^2 \gamma^2) + 2xt(-\gamma^2 v + c^2(\gamma^2 - 1)\frac{1}{v}) + x^2(\gamma^2 - 1 - c^2 \frac{(\gamma^2 - 1)^2}{\gamma^2} \frac{1}{v^2}) &= 0\end{aligned}$$

Aby powyższe wyrażenie było prawdziwe dla każdego t i x , należy wyzerować współczynniki:

$$\begin{cases} -\gamma^2 v + c^2(\gamma^2 - 1)\frac{1}{v} = 0 \\ \gamma^2 - 1 - \frac{c^2}{v^2} \frac{(\gamma^2 - 1)^2}{\gamma^2} = 0 \\ \gamma^2 v^2 + c^2 - c^2 \gamma^2 = 0 \end{cases}$$

$$(c^2 - v^2)\gamma^2 = c^2 \implies \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Otrzymano wartość współczynnika γ po przekształceniu współczynnika przy t^2 . Taką samą wartość współczynnika γ można otrzymać, gdy zostaną przekształcone pozostałe warunki.

Ostatecznie transformacja Lorentza ma postać:

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + vt') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \\x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

15.4 Wnioski z transformacji Lorentza

15.4.1 Transformacja Galileusza

Transformację Galileusza można rozważać jako przypadek graniczny transformacji Lorentza:

$$\begin{aligned}\text{Gdy } v &\longrightarrow 0, \quad \frac{v}{c} \ll 1 \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \longrightarrow 1 \\ x' &= x - vt \\ t' &= t\end{aligned}$$

15.4.2 Dylatacja czasu

Rozważmy dwa zdarzenia:

$$\begin{aligned}\text{zdarzenie 1} & \quad (x_1, 0, 0) \quad \text{chwila } t_1 \\ \text{zdarzenie 2} & \quad (x_2, 0, 0) \quad \text{chwila } t_2\end{aligned}$$

Odstęp czasu pomiędzy zdarzeniami w układzie primowanym:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1) - \frac{\gamma v}{c^2}(x_2 - x_1) \\ x_1 = x_2 & \implies \Delta t' = \gamma \Delta t\end{aligned}$$

Dla obserwatora nieruchomego względem zdarzeń, odstęp czasu pomiędzy zdarzeniami jest krótszy. Odstęp czasu jaki zaobserwowano w poruszającym się układzie jest dłuższy o czynnik γ .

15.4.3 Skrócenie Lorentza

Rozważono pręt o długości L , który spoczywa w pewnym układzie. Pomiar długości w układzie spoczywającym:

$$\begin{aligned}L &\iff \exists t : x_p(t) - x_l(t) = L \\ t = 0 & \quad x_l = 0 \\ t = 0 & \quad x_p = L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t_l' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_l\right) = 0 \\ x_l' &= \gamma(x_l - vt) = 0 \\ t_p' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_p\right) = -\frac{\gamma v L}{c^2} \\ x_p' &= \gamma(x_p - vt) = \gamma L\end{aligned}$$

Pomiar długości w układzie primowanym:

$$\begin{aligned}t_l' &= 0 \\ t_p' = 0 &= \gamma\left(t_p - \frac{v}{c^2}x_p\right) \implies t_p = \frac{v}{c^2}x_p\end{aligned}$$

$$x_p' = \gamma(x_p - vt_p) = \gamma\left(L - v \frac{v}{c^2}L\right) = \frac{L(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{\gamma}$$

Długość obiektu względem ruchomego obserwatora jest krótsza o współczynnik $1/\gamma$.

15.4.4 Transformacja prędkości

Współrzędne w kierunkach prostopadłych nie zmieniają się. Wzory na transformację prędkości mają postać:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

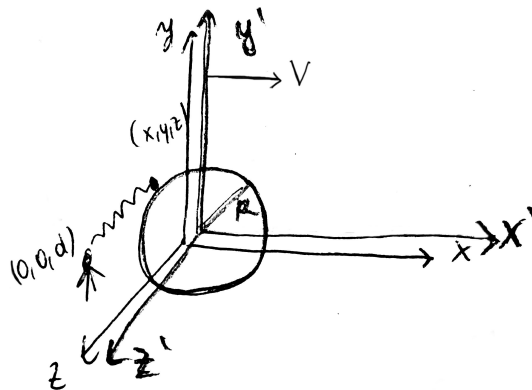
$$u_y = \frac{dy}{dt} \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}$$

$$u'_x = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})}$$

15.4.5 Okrąg w kształcie kiełbasy

Rysunek przedstawia szybko poruszający się świecący okrąg. Okrąg ten spoczywa w układzie primowanym.



Rysunek 47: Świecący okrąg.

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= R^2 \\ \frac{(x - vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 &= R^2 \\ z' &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

t_0 jest czasem emisji, a t czasem detekcji

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = c^2(t_0 - t)^2$$

$$t = t_0 - \frac{1}{c}\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}$$

$$\frac{\left(x - vt_0 + \frac{v}{c}\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 = R^2$$

$$x \rightarrow \mp \infty$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + d^2} \approx \sqrt{x^2} = |x| = \mp x$$

$$\frac{\left(x(1 \mp \frac{v}{c}) - vt_0\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 = R^2$$

$$\frac{\left(1 \mp \frac{v}{c}\right)^2 \left(x - \frac{v}{1 \mp \frac{v}{c}}t_0\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 = R^2$$

$$\frac{\left(x - \frac{v}{1 \mp \frac{v}{c}}t_0\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{1 \pm \frac{v}{c}}{1 \mp \frac{v}{c}}}\right)^2} + y^2 = R^2$$

Obserwator zobaczy elipsę:

półoś x	$R\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$	$R\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$
Środek elipsy	$\frac{v}{1-\frac{v}{c}}t_0$	$\frac{v}{1+\frac{v}{c}}t_0$
półoś y	R	R

15.4.6 Kula w kształcie kuli

Rozważono świecąca kulę poruszającą się z dużą prędkością, jak na Rysunku 48.

$$r' = c(t' - t'_\theta)$$

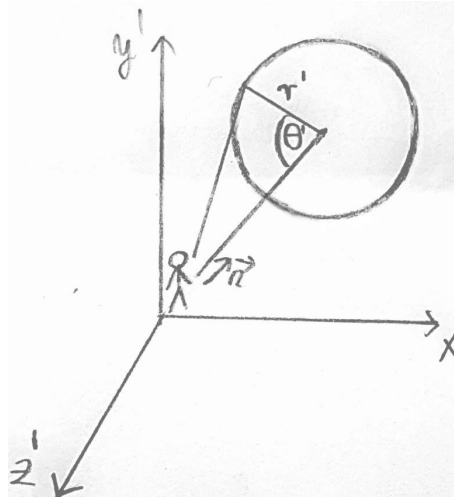
$$\vec{r}' \cdot \vec{n} = x'n'_x + y'n'_y + zn'_z = -ct'_\theta \cos \theta'$$

$$\frac{x - vt_\theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} n'_x + yn'_y + zn'_z = -c \frac{t_\theta - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cos \theta'$$

$$\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(n'_x - \frac{v}{c} \cos \theta' \right) + yn'_y + zn'_z = -c \frac{t_\theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\cos \theta' - \frac{v}{c} n'_x \right)$$

$$xn_x + yn_y + zn_z = -ct_\theta \cos \theta$$

Kształt kuli widziany przez obserwatora nie zmienia się.

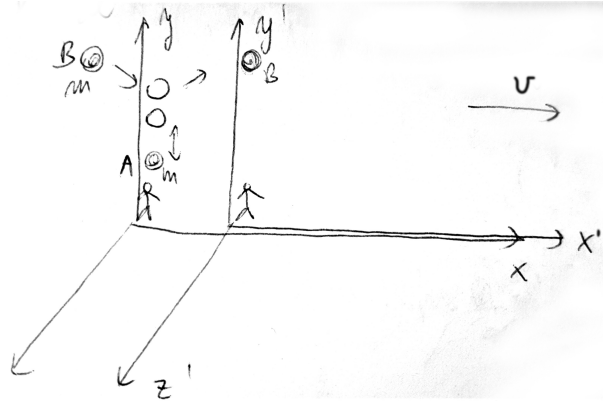


Rysunek 48: Świecąca kula.

16 Dynamika relatywistyczna

16.1 Pęd w dynamice relatywistycznej

Rozpatrzono zderzenie dwóch cząstek A i B o równych masach i związane z nimi układy. Układ primowany związany z cząstką B porusza się z prędkością v wzdłuż osi x układu nieprimowanego. Sytuację przedstawia Rysunek 49.



Rysunek 49: Zderzenie dwóch takich samych mas wzdłuż osi y . Masa B porusza się z prędkością relatywistyczną wzdłuż osi x .

$$u_{Ax} = 0$$

$$u_{Ay} = u_0$$

$$u'_{Bx} = 0$$

$$u'_{By} = -u_0$$

$$u_{Bx} = \frac{u'_{Bx} - (-v)}{1 - \frac{(-v)u'_{Bx}}{c^2}} = v$$

$$u_{By} = \frac{u'_{By}}{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(-v)^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{(-v)u'_{Bx}}{c^2}\right)} = -u_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Pędy cząstek A i B zdefiniowane klasycznie:

$$p_{Ax} = 0$$

$$p_{Ay} = mu_0$$

$$p'_{Bx} = mv$$

$$p'_{By} = -mu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Widać, że całkowity pęd nie jest zachowany.

$$P_y = p_{Ax} + p_{By} = mu_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) > 0$$

Rozpatrzono tę samą sytuację w układzie środka masy CM. Najpierw znaleziono prędkości cząstek w układzie CM i prędkość układu.

$$u_{Ax}^{CM} = \frac{u_{Ax} - u_{CM}}{1 - \frac{u_{Ax}u_{CM}}{c^2}} = -u_{CM}$$

$$u_{Bx}^{CM} = \frac{u_{Bx} - u_{CM}}{1 - \frac{u_{Bx}u_{CM}}{c^2}} = \frac{v - u_{CM}}{1 - \frac{vu_{CM}}{c^2}} = u_{CM}$$

$$\frac{v^2}{c^2}u_{CM}^2 - 2u_{CM} + v = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\frac{v^2}{c^2} = \left(2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2$$

$$u_{CM} = \frac{1}{2\frac{v^2}{c^2}} \left(2 \pm 2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{c^2}{v^2} \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$u_{By}^{CM} = \frac{u_{By}}{1 - \frac{u_{Bx}u_{CM}}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_{CM}^2}{c^2}} = -u_0 \sqrt{2\left(1 - \frac{c^2}{v^2} + \frac{c^2}{v^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)}$$

$$u_{Ay}^{CM} = \frac{u_{Ay}}{1 - \frac{u_{Ax}u_{CM}}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_{CM}^2}{c^2}} = u_0 \sqrt{2\left(1 - \frac{c^2}{v^2} + \frac{c^2}{v^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)}$$

Zderzenia

a) Zderzenie centralne

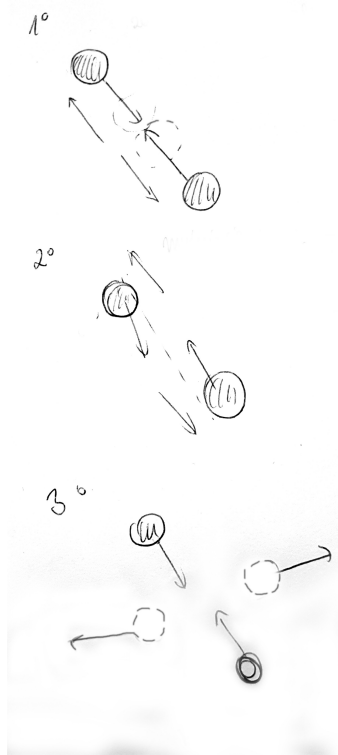
po zderzeniu

$$\begin{aligned}\tilde{u}_A^{CM} &= -\vec{u}_A^{CM} = \vec{u}_B^{CM} \\ \tilde{u}_B^{CM} &= -\vec{u}_B^{CM} = \vec{u}_A^{CM}\end{aligned}$$

b) Muśnięcie

po zderzeniu

$$\begin{aligned}\tilde{u}_A^{CM} &= \vec{u}_A^{CM} = -\vec{u}_B^{CM} \\ \tilde{u}_B^{CM} &= \vec{u}_B^{CM} = -\vec{u}_A^{CM}\end{aligned}$$



Rysunek 50: Ilustracja rozpatrywanych zderzeń.

c) Zderzenie pod kątem

po zderzeniu

$$\tilde{u}_{Ay}^{CM} = 0 = \tilde{u}_{By}^{CM}$$

$$\tilde{u}_{Ay} = 0 = \tilde{u}_{By}$$

przed zderzeniem

$$P_y = p_{Ax} + p_{By} = mu_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) > 0$$

po zderzeniu

$$\tilde{P}_y = 0$$

Klasyczna zasada zachowania pędu jest nie do pogodzenia z postulatami teorii względności.

16.2 Pęd

W dynamice relatywistycznej masa ciała zależy od prędkości. Z nową definicją masy pęd przybiera postać:

$$\vec{p} = m(u)\vec{u} \quad m(u) \xrightarrow{u \ll c} m$$

$$0 = m(0)u_0 - m(v)u_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \implies m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

16.3 Siła

Równanie ruchu wygląda następująco:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m(\vec{u})\vec{u}) = \frac{d}{dt}(\gamma(u)m\vec{u})$$

16.4 Energia

Wyprowadzono wyrażenie na energię kinetyczną:

$$T = \int F dx = \int \frac{d}{dt}(\gamma mu) dx = \int d(\gamma mu) \frac{dx}{dt} = \int d(\gamma mu) u = m \int u d\left(\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right) =$$

$$= m \int_0^v u \left(\frac{du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{u(-\frac{2u}{c^2})du}{-2(1 - \frac{u^2}{c^2})^{3/2}} \right) = m \int_0^v u \frac{1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2}}{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{3/2}} du = \left[\begin{array}{l} \xi = \frac{u}{c} \\ du = c d\xi \end{array} \right] =$$

$$= mc^2 \int_0^{v/c} \frac{\xi d\xi}{(1 - \xi^2)^{3/2}} = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \Big|_0^{v/c} = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

W granicy $v \ll c$, $v \rightarrow 0$ otrzymano klasyczny wzór na energię kinetyczną:

$$T \xrightarrow{v \ll c} mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} mv^2$$

Energia całkowita cząstki jest sumą energii kinetycznej T oraz spoczynkowej mc^2

$$E = T + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{v \ll c} E = mc^2$$

16.5 Transformacja Lorentza energii i pędu

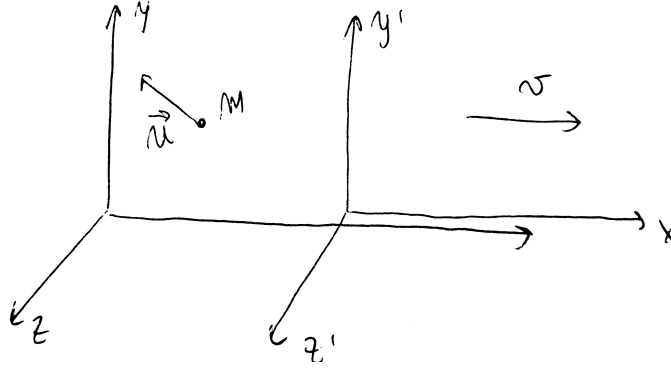
Wyprowadzono transformację Lorentza dla ogólnego przypadku, gdy cząstka ma pewną prędkość \vec{u} o niezerowych składowych x, y, z , oraz x', y', z' w układzie primowanym poruszającym się wzdłuż osi x z prędkością v . Sytuację przedstawia Rysunek 51.

- układ (xyz) :

$$E = m\gamma c^2 \quad \vec{p} = m\gamma\vec{u} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2}}}$$

- układ $(x'y'z')$:

$$E' = m\gamma' c^2 \quad \vec{p}' = m\gamma'\vec{u}' \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{u}'^2}{c^2}}}$$



Rysunek 51: Masa poruszająca się z prędkością u , oraz dwa układy poruszające się względem siebie.

Transformacja Lorentza dla prędkości jest postaci:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad u'_{y,z} = \frac{u_{y,z} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

Przekształcono współczynnik γ i γ' :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma^2} &= 1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2} = 1 - \frac{u_x^2}{c^2} - \frac{u_y^2}{c^2} - \frac{u_z^2}{c^2} \\ \frac{1}{\gamma'^2} &= 1 - \frac{\vec{u}'^2}{c^2} = 1 - \frac{u'^2_x}{c^2} - \frac{u'^2_y}{c^2} - \frac{u'^2_z}{c^2} = \\ &= 1 - \frac{1}{c^2} \frac{(u_x - v)^2}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{u_y^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{u_z^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2} = \\ &= \frac{c^2 - 2u_x v + \frac{u_x^2 v^2}{c^2} - u_x^2 + 2u_x v - v^2 - (u_y^2 + u_z^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (c^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2)}{c^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} \end{aligned}$$

zatem:

$$\gamma' = \gamma \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

wtedy:

$$\begin{aligned} E' &= m\gamma'c^2 = \\ &= mc^2\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\left(1-\frac{u_xv}{c^2}\right) = \\ &= \frac{mc^2\gamma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m\gamma vu_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(E - vp_x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'_x &= m\gamma'u'_x = \\ &= m\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\left(1-\frac{u_xv}{c^2}\right)\frac{u_x-v}{1-\frac{u_xv}{c^2}} = \\ &= \frac{m\gamma u_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m\gamma v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(p_x - v\frac{E}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'_y &= m\gamma'u'_y = \\ &= m\gamma\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{u_xv}{c^2}\right)\frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{u_xv}{c^2}} = \\ &= p_y \end{aligned}$$

$$p'_z = p_z$$

Ostatecznie transformacja Lorentza ma postać

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (E - vp_x)$$

$$p'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(p_x - v \frac{E}{c^2} \right)$$

$$p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z$$

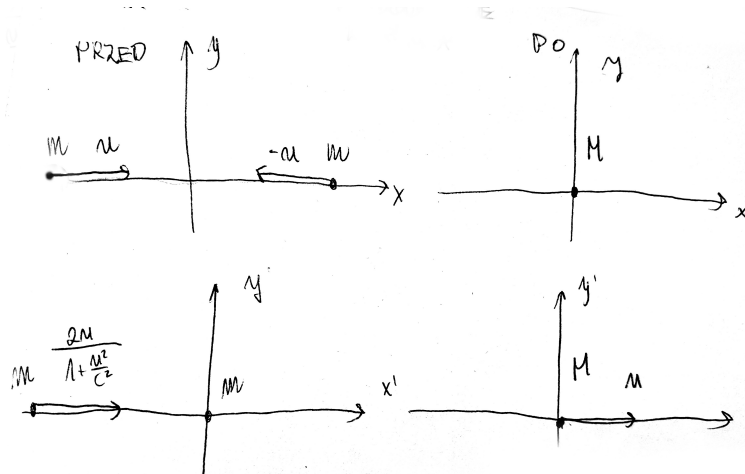
$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(ct - \frac{v}{c} x \right)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(x - \frac{v}{c} ct \right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Poniżej rozpatrzono zderzenie w układzie CM dwóch cząstek o tej samej masie, tej samej prędkości i przeciwnych zwrotach. Równocześnie rozpatrzono tę samą sytuację w układzie primowanym dla którego środek masy porusza się. Sytuacja została przedstawiona na Rysunku 52.



Rysunek 52: Górne rysunki przedstawiają zderzenie dwóch mas w układzie CM, dolne innym układzie inercyjnym.

- układ (xyz) :

$$E_{przed} = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad E_{po} = Mc^2$$

z zasady zachowania energii otrzymano wartość masy M :

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

- układ $(x'y'z')$:

$$E'_{przed} = mc^2 + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} \right)^2}} \quad E'_{po} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{2mc^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem w E'_{przed} przekształcono:

$$1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} \right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2} \frac{4u^2}{1 + 2\frac{u^2}{c^2} + \frac{u^4}{c^4}} = \frac{1 - 2\frac{u^2}{c^2} + \frac{u^4}{c^4}}{1 + 2\frac{u^2}{c^2} + \frac{u^4}{c^4}} = \frac{(1 - \frac{u^2}{c^2})^2}{(1 + \frac{u^2}{c^2})^2},$$

wtedy E'_{przed} jest postaci:

$$E'_{przed} = mc^2 \left(1 + \frac{1 + \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) = \frac{2mc^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Otrzymano zależność: $E'_{przed} = E'_{po}$, czyli spełniona jest zasada zachowania energii.

Rozważono w jednym wymiarze ruch masy m w kierunku x , wtedy $E^2 - p^2c^2$ jest postaci:

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m^2c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2v^2c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2c^4 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2c^4,$$

czyli $E^2 - p^2c^2$ nie zależy od układu odniesienia i jest równe $E^2 - p^2c^2 = m_{inv}^2c^4$, gdzie m_{inv} jest masą niezmienniczą, równą całkowitej energii cząstek mierzonej w układzie CM.

17 Elementy rachunku wariacyjnego

Początki rachunku wariacyjnego sięgają końca XVII wieku. Poszukiwano wtedy rozwiązania *zagadnienia brachistochrony*, czyli znalezienia równania krzywej, po której porusza się punkt materialny pod wpływem siły ciężkości, a która minimalizuje czas podróży pomiędzy dwoma, dowolnie zadanymi punktami. Problem ten obrazuje podstawowe zagadnienie rachunku wariacyjnego, mianowicie znalezienie ekstremum (zazwyczaj minimum) **funkcjonału**, czyli wielkości wyrażonej za pomocą całki, której wartość **zależy od drogi całkowania**, jest więc zależna od postaci krzywej łączącej dwie konkretne wartości zmiennej całkowania.

W ogólnej postaci problem wariacyjny sprowadza się do znalezienia funkcji $y = y(x)$, dla której funkcjonal \mathcal{S} , określony jako:

$$\mathcal{S} = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y(x), \frac{dy}{dx}, x\right) dx,$$

przyjmuje wartość ekstremalną. Wyprowadzenie warunku na funkcję $y(x)$ będącego krzywą łączącą punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) nie jest najistotniejsze dla zrozumienia tego rozdziału, dlatego dociekliwszy czytelnik może poszukać wyprowadzeń w wielu pozycjach z literatury. Bardziej istotne jest zrozumienie istoty działania pewnych metod, o których za chwilę. Mówiąc bardzo skrótowo, wyprowadzenie opiera się na rozpatrzeniu „nieoptymalnych” trajektorii $Y(x)$ będących odstępstwem od „optymalnej” trajektorii $y(x)$ w następujący sposób:

$$Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x),$$

gdzie α jest jakimś ustalonym parametrem reprezentującym „rozmiar” odchylenie od trajektorii $y(x)$. Wszystkie trajektorie mają zaczynać się i kończyć w tych samych punktach, co narzuca dodatkowe więzy. Sprowadzając problem do zagadnienia minimalizacji funkcji (elementarny rachunek różniczkowy) okazuje się, że warunkiem na uzyskanie optymalnej trajektorii jest:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Równanie to nazywane jest **równaniem Eulera-Lagrange’a (E-L)**, a jego zastosowania są niezwykle szerokie. W tym rozdziale omówione zostaną dwa przykłady.

Przykłady zastosowania równania E-L

Najkrótsza krzywa łącząca dwa punkty

Pierwszym przykładem na zastosowanie równania E-L jest problem znalezienia najkrótszego drogi łączącej dwa punkty na płaszczyźnie. Sprowadza się on do odnalezienia równania krzywej łączącej te dwa punkty, która jednocześnie ma najkrótszą długość. Choć może wydawać się oczywiste, że jest to linia prosta, to na tym przykładzie dobrze jest prześledzić zasadę działania rachunku wariacyjnego - pomoże ona stwierdzić, czy oczekiwania są zgodne ze stworzonym modelem.

Rysunek 53 przedstawia to zagadnienie, wraz z zaznaczoną przykładową krzywą $y(x)$ łączącą dwa punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) . Długość małego wycinka krzywej jest równa $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ponieważ dodatkowo:

$$dy = \frac{dy}{dx} dx \equiv y'(x) dx,$$

wyrażenie to może zostać przepisane do postaci:

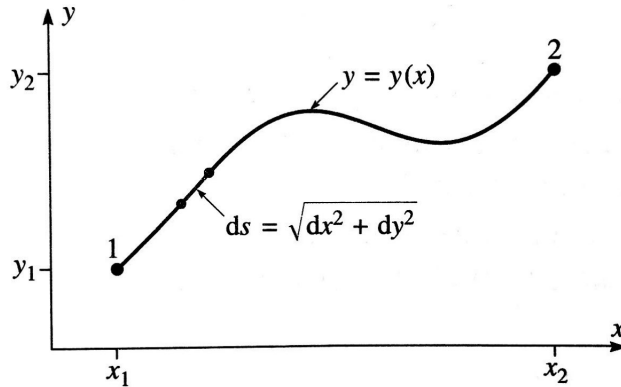
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

W ten sposób całkowita długość odcinka krzywej zawartego między punktami 1 i 2 wynosi:

$$\mathcal{L} = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Wyrażenie to ma standardową postać funkcjonalu \mathcal{S} , gdzie funkcja f dana jest wzorem:

$$f(y, y', x) = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$



Rysunek 53: Krzywa łącząca dwa punkty płaszczyzny

Aby skorzystać teraz z równania E-L należy obliczyć dwie pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Przy takich warunkach równanie E-L sprowadza się do postaci:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Skoro pochodna funkcji $\frac{\partial f}{\partial y'}$ jest równa 0, to funkcja ta jest stałą, która może być oznaczona poprzez C . Oznacza to, że:

$$y'^2 = C^2(1 + y'^2),$$

co po prostych przekształceniach pozwala uzyskać $y'^2 = const$. Z racji tego funkcja $y'(x)$ jest także stałą, którą, która może być nazwana m . Całkując teraz równanie:

$$y'(x) = m,$$

można uzyskać ostateczną postać funkcji $y(x)$ będącej szukaną trajektorią:

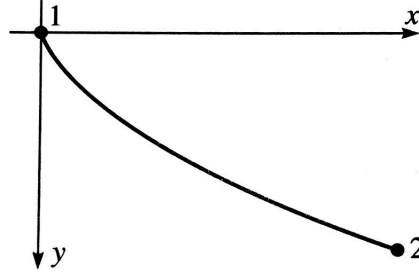
$$y(x) = mx + b,$$

co faktycznie udowadnia, że najkrótszą krzywą łączącą dwa punkty na płaszczyźnie jest prosta.

Problem brachistochrony

Za drugi przykład niech posłuży poruszony we wstępie do tego rozdziału problem brachistochrony.

Niech dane będą dwa punkty 1 i 2, z których jeden jest położony wyżej nad ziemią. Zadanie, jakiemu musi sprostać wprowadzony wcześniej rachunek wariacyjny to znalezienie kształtu beztarciowego toru kolejki górskiej w taki sposób, aby po puszczeniu wagonika z punktu znajdującego się wyżej dotarł on do drugiego w najkrótszym możliwym czasie. Zagadnienie przedstawione jest schematycznie na Rysunku 54:



Rysunek 54: Zagadnienie brachistochrony jako poszukiwanie toru, po którym wagonik kolejki puszczony z punktu 1 dotrze do punktu 2 w najkrótszym czasie

Zgodnie z zasadą zachowania energii, prędkość wagonika na wysokości y wynosi $v = \sqrt{2gy}$. Jako, że tutaj v jest funkcją y , warto żeby to właśnie y zostało wybrane jako zmienna niezależna. Oznacza to, że tor ruchu jest opisany równaniem (które jest szukane):

$$x = x(y).$$

Odległość ds dwóch bliskich punktów toru można zapisać w postaci $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(y)^2 + 1}dy$, gdzie $x'(y) = \frac{dx}{dy}$. Czas przejazdu wagonika między punktami 1 i 2 opisuje wyrażenie:

$$t_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \frac{ds}{v},$$

zatem zgodnie z wyprowadzonymi wcześniej wielkościami:

$$t_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_2} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}} dy.$$

W tej sytuacji, funkcjonalem \mathcal{S} jaki należy minimalizować jest właśnie powyższe wyrażenie na czas, tylko że tutaj zmienne x oraz y są zamienione. Funkcja podcałkowa ma postać:

$$f(x, x', y) = \frac{\sqrt{x'^2 + 1}}{\sqrt{y}}.$$

Pamiętając zatem o fakcie zamiany zmiennych, należy wypisać równanie E-L dla tej funkcji. Dla ustalenia uwagi niech będzie odnotowane, że w tej sytuacji przyjmuje ono postać:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial x'}.$$

Funkcja f jest niezależna od x , zatem różniczkowanie po tej zmiennej da wartość 0. Oznacza to zatem (z E-L), że $\frac{\partial f}{\partial x'}$ jest stałą. Obliczając ją i podnosząc do kwadratu (dla ułatwienia) otrzymuje się:

$$\frac{x'^2}{y(1 + x'^2)} = const = \frac{1}{2a},$$

gdzie stała (także dla ułatwienia) została oznaczona jako $\frac{1}{2a}$. Równanie to łatwo rozwiązać względem zmiennej x' :

$$x' = \sqrt{\frac{y}{2a - y}},$$

co prowadzi do:

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2a - y}} dy.$$

Stosując podstawienie $y = a(1 - \cos(\theta))$ można obliczyć tę całkę otrzymując:

$$x = a \int (1 - \cos(\theta)) d\theta = a(\theta - \sin(\theta)) + \text{const.}$$

Ostatecznie, komplet równań opisujących w sposób parametryczny szukaną krzywą to:

$$x = a(\theta - \sin(\theta))$$

$$y = a(1 - \cos(\theta)),$$

gdzie stała całkowania została położona 0, ze względu na warunki początkowe: punkt 1 ma współrzędne $x = y = 0$, więc początkowa wartość θ również jest równa 0. Stała a powinna zostać dobrana w taki sposób, żeby krzywa przechodziła przez punkt (x_2, y_2) . Wprawne oko zauważy, że krzywa zadana tymi równaniami rozwiązująca problem brachistochrony to w istocie cykloida, czyli krzywa zakreślana przez punkt na obwodzie koła o promieniu a , toczącego się w tym przypadku po dolnej stronie osi x .