Wstęp do Optyki i Fizyki Materii Skondensowanej

1100-3003



Wiązania chemiczne i cząsteczki

Wydział Fizyki UW Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl Potr.Fita@fuw.edu.pl



Przybliżenie Borna Oppenheimera

Pełny nierelatywistyczny hamiltonian układu jąder i elektronów:

$$\begin{split} H(\vec{r}, \vec{R}) \Psi(\vec{r}, \vec{R}) &= \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \nabla_i^2 - \sum_N \frac{\hbar^2}{2M_N} \nabla_N^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{N,i} \frac{Z_N e^2}{|\vec{r}_i - \vec{R}_N|} + \\ &+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{N < K} \frac{Z_N Z_K e^2}{|\vec{R}_N - \vec{R}_K|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i < j} \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \\ &= \hat{T}_e + \hat{T}_N + V(\vec{r}, \vec{R}) + V_e(\vec{r}) + G(\vec{R}) \end{split}$$

 $m, \vec{r}_i, i - \text{elektrony}$ $M_N, \vec{R}_N, Z_N - jądra$

Współrzędne podukładu elektronowego i podukładu jądrowego (jonowego) są przemieszane, separacja zmiennych elektronowych i jądrowych jest niemożliwa

 $u(\vec{z}, \vec{D})u(\vec{z}, \vec{D}) = cu(\vec{z}, \vec{D})$

Trzeba zastosować przybliżenie adiabatyczne Borna-Oppenheimera

Przybliżenia

$$\widehat{T}_N + E_{el}(\vec{r}, \vec{R}) + G(\vec{R})]\chi^n(\vec{R}) = E^n \chi^n(\vec{R})$$

Energia kinetyczna drgań (oscylacji) i rotacji (obrotów) separują się, ponieważ zakładamy "małe" drgania i powolne obroty.

$$\left[\hat{T}_{osc} + \hat{T}_{rot} + E_{el}^n(\vec{r}, \vec{R}) + G(\vec{R})\right]\chi^n(\vec{R}) = E^n\chi^n(\vec{R})$$

Operatory działają na różne współrzędne: możemy rozdzielić zmienne.

$$\chi^{n}(\vec{R}) = \chi^{n}_{osc}(R)\chi^{n}_{rot}(\theta,\varphi)$$
$$E^{n} = E^{n}_{osc} + E^{n}_{rot}$$

Co daje:

$$\Psi(\vec{r},\vec{R}) = \chi^n(\vec{R})\Psi_{el}^n(\vec{r},\vec{R}) = \chi_{osc}^n(R)\chi_{rot}^n(\theta,\varphi)\Psi_{el}^n(\vec{r},\vec{R})$$
$$E^n = E_{osc}^n + E_{rot}^n + E_{el}^n$$



Rotacjami

• Oscylacjami

Przybliżenia

kinetyczna drgań (oscylacji) Energia i rotacji (obrotów) separują się, ponieważ zakładamy "maje" Po kolei zajmiemy się: drgania i powolne obroty.

$$\left[\hat{T}_{osc} + \hat{T}_{rot} + E_{el}^{n}(\vec{r}, \vec{R}) + G(\vec{R})\right] \chi^{n}$$

Operatory działają na rozdzielić zmienne

Co daje:

$$\Psi(\vec{r},\vec{R}) = \chi^n(\vec{R}) = \chi^n_{osc}(R)\chi^n_{rot}(\theta,\varphi)\Psi^n_{el}(\vec{r},\vec{R})$$
$$E^n = E^n_{osc} + E^n_{rot} + E^n_{el}$$



alna

 $[\widehat{T}_N + E_{el}(\vec{r}, \vec{R}) + G(\vec{R})]\chi^n(\vec{R}) = E^n \chi^n(\vec{R})$



<u>Równanie Schrodingera na ruch jąder w potencjale odpychającym</u> $G(\vec{R})$:

$$\left[\widehat{T}_{N} + E_{el}^{n}(\vec{r},\vec{R}) + G(\vec{R})\right]\chi^{n}(\vec{R}) = E^{n}\chi^{n}(\vec{R})$$

potencjał efektywny

The Self-consistent Field Method

Metoda pola samouzgodnionego, metoda orbitali molekularnych

Dla każdego orbitalu atomowego φ_A początek układu współrzędnych jest w innym punkcie (orbitale są centrowane na różnych jądrach atomowych). Metodę tę nazywa się **LCAO-MO** (Linear Combination of Atomic Orbitals).

"Teoretycznie" można brać dowolne kombinacje orbitali atomowych, ale w rzeczywistości bierzemy pewne "właściwe" (wynikające z symetrii układu – teoria grup).

Elektronowa funkcja falowa w postaci iloczynu orbitali molekularnych nie jest ścisłą funkcją własną hamiltonianu, ponieważ nie uwzględnia korelacji ruchów elektronów.

Można tę funkcję poprawić przez dodanie wyrazów odpowiadających kombinacjom innych orbitali atomowych (innym konfiguracjom atomowym). Metoda ta nosi nazwę oddziaływania konfiguracji – **CI** (**C**onfiguration Interaction)

W najdokładniejszych obliczeniach elektronowa funkcja falowa dla stanu podstawowego cząsteczki wodoru H2 uwzględnia 100 konfiguracji atomowych (W. Kołos).

$$\Psi_i(\vec{r}) = \sum_A c_A^i \varphi_A(\vec{r})$$

Metoda orbitali molekularnych

LCAO

Rozwiązanie numeryczne hamiltonianu elektronowego (dla zadanej konfiguracji jąder)

$$H_{el}(\vec{r},\vec{R})\Psi_{el}^{k}(\vec{r},\vec{R}) = [\hat{T}_{e} + V(\vec{r},\vec{R}) + V_{e}(\vec{r})]\Psi_{el}^{k}(\vec{r},\vec{R}) = E_{el}^{k}(\vec{R})\Psi_{el}^{k}(\vec{r},\vec{R})$$

Każdy z orbitali jednoelektronowych $\varphi_n^{sp}(\vec{r}_n, s_n)$ musi być inny – dwa spinorbitale mogą mieć tę samą część orbitalną φ , ale wtedy muszą mieć różny spin

$$\varphi_n^{sp}(\vec{r}_n, s_n) = \varphi_n^{sp}(\vec{r}_n) \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \text{ or } \varphi_n^{sp}(\vec{r}_n) \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}$$

Funkcja $\Psi_{el}^k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots s_1, s_2, s_3, \dots)$ (poniżej) NIE jest dobrą funkcją falową elektronów - dlaczego?

$$\Psi_{el}^{k}(\vec{r}_{1},\vec{r}_{2},\vec{r}_{3},\ldots s_{1},s_{2},s_{3},\ldots) = \varphi_{1}^{sp}(\vec{r}_{1},s_{1})\varphi_{2}^{sp}(\vec{r}_{2},s_{2})\ldots\varphi_{n}^{sp}(\vec{r}_{n},s_{n})$$

Metoda orbitali molekularnych

Metoda LCAO

Rozwiązanie równania elektronowego wymaga metod numerycznych

$$H_{el}(\vec{r},\vec{R})\Psi_{el}^{k}(\vec{r},\vec{R}) = [\hat{T}_{e} + V(\vec{r},\vec{R}) + V_{e}(\vec{r})]\Psi_{el}^{k}(\vec{r},\vec{R}) = E_{el}^{k}(\vec{R})\Psi_{el}^{k}(\vec{r},\vec{R})$$

Jedna z metod: LCAO-MO z przybliżeniem Hartree-Focka – metoda samouzgodniona (rozwiązania iteracyjne), *n*-elektronowa funkcja falowa w postaci pojedynczego wyznacznika Slatera, automatycznie zapewniającego antysymetryczność funkcji falowej ze względu na przestawienie dwóch dowolnych elektronów:

$$\Psi_{el}^{k}(\vec{r}_{1},\vec{r}_{2},\vec{r}_{3},\dots,s_{1},s_{2},s_{3},\dots) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \varphi_{1}^{sp}(\vec{r}_{1},s_{1}) & \varphi_{1}^{sp}(\vec{r}_{2},s_{2}) & \dots & \varphi_{1}^{sp}(\vec{r}_{n},s_{n}) \\ \varphi_{2}^{sp}(\vec{r}_{1},s_{1}) & \varphi_{2}^{sp}(\vec{r}_{2},s_{2}) & \dots & \varphi_{2}^{sp}(\vec{r}_{n},s_{2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n}^{sp}(\vec{r}_{1},s_{1}) & \varphi_{n}^{sp}(\vec{r}_{2},s_{2}) & \dots & \varphi_{n}^{sp}(\vec{r}_{n},s_{n}) \end{vmatrix}$$

Każdy z jednoelektronowych spinorbitali $\varphi_n^{sp}(\vec{r}_n, s_n)$ musi być inny – dwa spinorbitale mogą np. mieć tę samą część orbitalną, ale wtedy muszą się różnić spinem

$$\varphi_n^{sp}(\vec{r}_n, s_n) = \varphi_n^{sp}(\vec{r}_n) \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \text{lub } \varphi_n^{sp}(\vec{r}_n) \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}$$

Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali $arphi_A$ i $arphi_B$.

 $\Psi = c_A \varphi_A + c_B \varphi_B$

Skoro jądra są jednakowe:

$$\begin{aligned} |c_A|^2 &= |c_B|^2 \Rightarrow c_A = \pm c_B \\ \Psi_+ &= N_+(\varphi_A + \varphi_B) \\ \Psi_- &= N_-(\varphi_A - \varphi_B) \\ S &= \int \varphi_A \varphi_B \, d\vec{r} \quad \text{overlap integral (całka nakrywania)} \\ N_+ &= \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}} \quad N_- = \frac{1}{\sqrt{2(1-S)}} \end{aligned}$$

Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .

$$\Psi = c_A \varphi_A + c_B \varphi_B$$

$$S = \int \varphi_A \varphi_B \, d\vec{r} \quad \text{overlap integral (całka nakrywania)}$$





Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .

$$\Psi = c_A \varphi_A + c_B \varphi_B$$

$$S = \int \varphi_A \varphi_B \, d\vec{r} \quad \text{overlap integral (całka nakrywania)}$$



Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

12 A

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali $arphi_A$ i $arphi_B$.



3 A

Molecules

Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali $arphi_A$ i $arphi_B$.

$$\Psi = c_A \varphi_A + c_B \varphi_B$$

 $S = \int \varphi_A \varphi_B \, d\vec{r}$ overlap integral (*całka nakrywania*)







Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .

$$\Psi_{+} = c_{A}\varphi_{A} + c_{B}\varphi_{B} \qquad \Psi_{-} = c_{A}\varphi_{A} - c_{B}\varphi_{B}$$

$$S = \int \varphi_{A}\varphi_{B} d\vec{r} > 0 \quad \text{overlap integral}$$

$$\varepsilon_{\pm} = \int \Psi_{\pm}^{*}\hat{H}^{0}\Psi_{\pm}d\vec{r}$$

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{H_{AA} + H_{AB} + H_{BA} + H_{BB}}{2(1+S)}$$

$$\varepsilon_{-} = \frac{H_{AA} - H_{AB} - H_{BA} + H_{BB}}{2(1-S)}$$

$$H_{AA} = \int \varphi_{A}^{*}\hat{H}^{0}\varphi_{B}d\vec{r} < 0$$

$$H_{AB} = \int \varphi_{A}^{*}\hat{H}^{0}\varphi_{B}d\vec{r} < 0$$

...

Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .

Cząsteczki - dygresja

Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .



Exciton-polaritons in microcavities



Electromagnetic field distribution inside a cavity

Hamiltonian matrix form

$$H = \begin{pmatrix} E_{ph}(k_{\parallel}) & \frac{\hbar\Omega}{2} \\ \frac{\hbar\Omega}{2} & E_{exc}(k_{\parallel}) \end{pmatrix}$$



vacuum field Rabi splitting i.e. exciton-photon coupling Ω , determines exciton polariton modes:







Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .

$$\Psi_{\pm} = c_A \varphi_A \pm c_B \varphi_B$$
$$S = \int \varphi_A \varphi_B \ d\vec{r} > 0 \quad \text{overlap integral}$$



Oznaczenia orbitali

• $\lambda = |m_l|$ rzut orbitalnego momentu pędu na oś cząsteczki

- $\lambda = 0 \sigma$ -orbitals. Orbitale te nie ulegają zmianie przy obrotach wokół osi cząsteczki
- $\lambda = 1 \pi$ -orbitals. Orbitale te zmieniają znak przy obrocie o π .
- g gerade (even, *parzyste*) parzyste przy inwersji
 względem środka cząsteczki
- *u* ungerade (odd, *nieparzyste*).
- \pm symetria przy odbiciu względem dowolnej płaszczyzny zawierającej oś cząsteczki.

 Liczba na początku – numer porządkowy orbitalu danego typu.

Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .

$$\begin{split} \Psi_{\pm} &= c_A \varphi_A \pm c_B \varphi_B \\ S &= \int \varphi_A \varphi_B \; d\vec{r} > 0 \quad \text{overlap integral} \end{split}$$



Fig. 8.13 The parity classification of orbitals in a homonuclear diatomic molecule: (a) g, (b) u.

Oznaczenia orbitali

• $\lambda = |m_l|$ rzut orbitalnego momentu pędu na oś cząsteczki

• $\lambda = 0 - \sigma$ -orbitals. Orbitale te nie ulegają zmianie przy obrotach wokół osi cząsteczki

• $\lambda = 1 - \pi$ -orbitals. Orbitale te zmieniają znak przy obrocie o π .

g – gerade (even, *parzyste*) parzyste przy inwersji
 względem środka cząsteczki

• *u* – ungerade (odd, *nieparzyste*).

• \pm – symetria przy odbiciu względem dowolnej płaszczyzny zawierającej oś cząsteczki.

 Liczba na początku – numer porządkowy orbitalu danego typu.

Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .

 $\Psi_{\pm} = c_A \varphi_A \pm c_B \varphi_B$ $S = \int \varphi_A \varphi_B \ d\vec{r} > 0 \quad \text{overlap integral}$



Fig. 8.20 The origin of the +/- symmetry classification: (a) a π_- -orbital, (b) a π_+ -orbital.

Oznaczenia orbitali

• $\lambda = |m_l|$ rzut orbitalnego momentu pędu na oś cząsteczki

- $\lambda = 0 \sigma$ -orbitals. Orbitale te nie ulegają zmianie przy obrotach wokół osi cząsteczki
- $\lambda = 1 \pi$ -orbitals. Orbitale te zmieniają znak przy obrocie o π .
- g gerade (even, *parzyste*) parzyste przy inwersji względem środka cząsteczki
- *u* ungerade (odd, *nieparzyste*).
- $\bullet\pm-$ symetria przy odbiciu względem dowolnej płaszczyzny zawierającej oś cząsteczki.
- Liczba na początku numer porządkowy orbitalu danego typu.

H₂⁺ ion

Funkcja próbna (trial functions) atomu wodoru – metoda wariacyjna (variational method)

 \mathcal{E}_+

 $\Psi_+ = N_+ (1s_A + 1s_B)$

 $\Psi_- = N_-(1s_A - 1s_B)$





Fig. 8.6 Contour diagrams of the (a) bonding and (b) antibonding orbitals (1σ and 2σ , respectively) of the hydrogen molecule–ion in the LCAO approximation.

1*s*

 E_{at}

H₂⁺ ion

Funkcja próbna (trial functions) atomu wodoru – metoda wariacyjna (variational method)

 $\Psi_+ = N_+ (1s_A + 1s_B)$

 $\Psi_{-}=N_{-}(1s_{A}-1s_{B})$





Fig. 8.5 The molecular potential energy curves for the hydrogen molecule-ion.



Homonuclear diatomic molecules molecular orbital energy scheme













27.11.2019



Light molecules (incl. N₂)

R Kowalczyk

Metoda orbitali molekularnych

Metoda LCAO

Rozwiązanie równania elektronowego wymaga metod numerycznych

$$H_{el}(\vec{r},\vec{R})\Psi_{el}^{k}(\vec{r},\vec{R}) = [\hat{T}_{e} + V(\vec{r},\vec{R}) + V_{e}(\vec{r})]\Psi_{el}^{k}(\vec{r},\vec{R}) = E_{el}^{k}(\vec{R})\Psi_{el}^{k}(\vec{r},\vec{R})$$

Jedna z metod: LCAO-MO z przybliżeniem Hartree-Focka – metoda samouzgodniona (rozwiązania iteracyjne), *n*-elektronowa funkcja falowa w postaci pojedynczego wyznacznika Slatera, automatycznie zapewniającego antysymetryczność funkcji falowej ze względu na przestawienie dwóch dowolnych elektronów:

$$\Psi_{el}^{k}(\vec{r}_{1},\vec{r}_{2},\vec{r}_{3},\dots s_{1},s_{2},s_{3},\dots) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \varphi_{1}^{sp}(\vec{r}_{1},s_{1}) & \varphi_{1}^{sp}(\vec{r}_{2},s_{2}) & \dots & \varphi_{1}^{sp}(\vec{r}_{n},s_{n}) \\ \varphi_{2}^{sp}(\vec{r}_{1},s_{1}) & \varphi_{2}^{sp}(\vec{r}_{2},s_{2}) & \dots & \varphi_{2}^{sp}(\vec{r}_{n},s_{2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n}^{sp}(\vec{r}_{1},s_{1}) & \varphi_{n}^{sp}(\vec{r}_{2},s_{2}) & \dots & \varphi_{n}^{sp}(\vec{r}_{n},s_{n}) \end{vmatrix}$$

Każdy z jednoelektronowych spinorbitali $\varphi_n^{sp}(\vec{r}_n, s_n)$ musi być inny – dwa spinorbitale mogą np. mieć tę samą część orbitalną, ale wtedy muszą się różnić spinem

$$\varphi_n^{sp}(\vec{r}_n, s_n) = \varphi_n^{sp}(\vec{r}_n) \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \operatorname{lub} \varphi_n^{sp}(\vec{r}_n) \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}$$

Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .

 $\Psi = c_A \varphi_A + c_B \varphi_B$ $S = \int \varphi_A \varphi_B \ d\vec{r} > 0 \quad \text{overlap integral}$



Fig. 8.20 The origin of the +/- symmetry classification: (a) a π_- -orbital, (b) a π_+ -orbital.

Oznaczenia orbitali

• $\lambda = |m_l|$ rzut orbitalnego momentu pędu na oś cząsteczki

- $\lambda = 0 \sigma$ -orbitals. Orbitale te nie ulegają zmianie przy obrotach wokół osi cząsteczki
- $\lambda = 1 \pi$ -orbitals. Orbitale te zmieniają znak przy obrocie o π .
- g gerade (even, *parzyste*) parzyste przy inwersji względem środka cząsteczki
- *u* ungerade (odd, *nieparzyste*).
- $\bullet \pm -$ symetria przy odbiciu względem dowolnej płaszczyzny zawierającej oś cząsteczki.
- Liczba na początku numer porządkowy orbitalu danego typu.

Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali $arphi_A$ i $arphi_B$.

- Symbole termów ${}^{2s+1}\Lambda$
- $\Lambda = |\sum \lambda|$ całkowity orbitalny moment pędu
- $\Lambda = 0 \Sigma$ -orbitals.
- $\Lambda = 1 \Pi$ -orbitals.
- *g* gerade (even, *parzyste*) parity, inversion through the center of the molecule
- *u* ungerade (odd, *nieparzyste*).

 $\bullet \pm$ - reflection symmetry with respect to any plane containing the axis of the molecule.

See: Atkins, Fridman Molecular Quantum Mechanics

Oznaczenia orbitali

- $\lambda = |m_l|$ rzut orbitalnego momentu pędu na oś cząsteczki
- $\lambda = 0 \sigma$ -orbitals. Orbitale te nie ulegają zmianie przy obrotach wokół osi cząsteczki
- $\lambda = 1 \pi$ -orbitals. Orbitale te zmieniają znak przy obrocie o π .
- g gerade (even, *parzyste*) parzyste przy inwersji
 względem środka cząsteczki
- *u* ungerade (odd, *nieparzyste*).
- \pm symetria przy odbiciu względem dowolnej płaszczyzny zawierającej oś cząsteczki.
- Liczba na początku numer porządkowy orbitalu danego typu.

Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂

Symbole termów ${}^{2s+1}\Lambda$

- $\Lambda = |\sum \lambda|$ całkowity orbitalny moment pędu
- $\Lambda = 0 \Sigma$ -orbitals.
- $\Lambda = 1 \Pi$ -orbitals.
- *g* gerade (even, *parzyste*) parity, inversion through the center of the molecule
- *u* ungerade (odd, *nieparzyste*).

 \bullet \pm - reflection symmetry with respect to any plane containing the axis of the molecule.

See: Atkins, Fridman Molecular Quantum Mechanics





Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂





Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂





Dwuatomowe cząsteczki homojądrowe, np. H₂, Li₂, N₂, O₂



Electrons energy strongly depends on the distance between nuclei.

E(R) - usually in numerical form.

Approximations: Morse potential eg. Lithium

 $V(r) = D_e \left[1 - e^{-\alpha (r - r_0)} \right] + V(r_0)$

Approximations: Lenard-Jones potential

$$V(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6} \right] + V(r_{0})$$



P. Kowalczyk

Electrons energy strongly depends on the distance between nuclei.



Electrons energy strongly depends on the distance between nuclei.

E(R) - usually in numerical form.

Approximations: Morse potential eg. Lithium

$$V(r) = D_e [1 - e^{-\alpha(r - r_0)}] + V(r_0)$$

Approximations: Lenard-Jones potential

$$V(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6} \right] + V(r_0)$$



LETTER

Nature 549, 242 (2017)

doi:10.1038/nature23879

Hardware-efficient variational quantum eigensolver for small molecules and quantum magnets

Abhinav Kandala¹*, Antonio Mezzacapo¹*, Kristan Temme¹, Maika Takita¹, Markus Brink¹, Jerry M. Chow¹ & Jay M. Gambetta¹

Figure 1 | Quantum chemistry on a superconducting quantum processor. Solving electronic-structure problems on a quantum computer relies on mappings between fermionic and qubit operators. a, Parity mapping of eight spin orbitals (drawn in blue and red, not to scale) onto eight qubits, which are then reduced to six qubits owing to fermionic spin and parity symmetries. The length of the bars indicate the parity of the spin orbitals that are encoded in each qubit. b, False-coloured optical micrograph of the superconducting quantum processor with seven transmon qubits. These qubits are coupled via two coplanar waveguide resonators (violet) and have individual coplanar waveguide resonators

for control and read-out. c, Hardware-efficient quantum circuit for trialstate preparation and energy estimation, shown here for six qubits. For each iteration k, the circuit is composed of a sequence of interleaved single-qubit rotations $U^{q,d}(\theta_k)$ and entangling unitary operations $U_{\rm ENT}$ that entangle all of the qubits in the circuit. A final set of post-rotations $(I, X_{-\pi/2} \text{ or } Y_{\pi/2})$ before the qubits are read out is used to measure the expectation values of the individual Pauli terms in the Hamiltonian and to estimate the energy of the trial state, d, An example of the pulse sequence for the preparation of a six-qubit trial state, in which $U_{\rm ENT}$ is implemented as a sequence of two-qubit cross-resonance gates.





Figure 3 | Application to quantum chemistry. a-c, Experimental results (black filled circles), exact energy surfaces (dotted lines) and density plots (shading; see colour scales) of outcomes from numerical simulations, for several interatomic distances for H₂ (a), LiH (b) and BeH₂ (c). The experimental and numerical results presented are for circuits of depth d=1. The error bars on the experimental data are smaller than the size of the markers. The density plots are obtained from 100 numerical

outcomes at each interatomic distance. The top insets in each panel highlight the qubits used for the experiment and the cross-resonance gates (arrows, labelled CR_{c-t} ; where 'c' denotes the control qubit and 't' the target qubit) that constitute U_{ENT} . The bottom insets are representations of the molecular geometry (not to scale). For all the three molecules, the deviation of the experimental results from the exact curves is well explained by the stochastic simulations.

PHYSICAL REVIEW X 8, 011021 (2018)



(a)

Classical step

O Quantum step

FIG. 3. H₂ energy spectrum as a function of internuclear distance. Swarm particle energies for each bond length are histogrammed after application of a linear-response expansion and Gaussian filter. Energy estimates obtained by a peak finding routine are indicated by dots with theoretically predicted energy levels shown as solid lines. An unphysical spurious state emerges at internuclear distances greater than ~1.2 Å due to uncorrected incoherent errors. Inset shows errors in the estimated ground- and excited-state energies as compared to chemical accuracy $(1.6 \times 10^{-3} \text{ Ha})$.

Phys. Rev X 8 011021 (2018)

Final prepare

True aroun

reparabl

(c)



Fig. 1 Schematic depiction of the ADAPT-VQE algorithm described presented. Since step 1 occurs on classical hardware, it is not included in the illustration. $\vec{\theta}^{(n)}$ is the list of ansatz parameters at the *n*th iteration. The number of parameters, $len(\vec{\theta}^{(n)})$, is equal to the number of operators in the ansatz. "Operator Pool" refers to the collection of operators which are used to grow the ansatz one at-a-time. Each r_{θ}^{a} prepresents a generalized single or double excitation, and these operators are then spin-complemented. The orbital indices refer to spatial orbitals, and the overbar indicates β spin. Orbital indices without overbars have α spin. Note that growing the ansatz does not drain the pool, and so operators can show up multiple times if selected by the algorithm



Fig. 2 Dissociation curves for LiH, BeH₂, and H₆. Potential energy as a function of nuclear coordinate, Hartree units (**a**, **d**, **g**). Absolute energy differences from FCI, kcal/mol units (**b**, **e**, **h**). Shaded blue region represents area within "chemical accuracy" as 1 kcal/mol. Number of variational operators in associated ansatz (**c**, **f**, **i**). Notation: *e* indicates gradient norm threshold used such that $e_m = 10^{-m}$. In all curves, the FCI curve lies directly underneath the ADAPT(e_3) curve, and so is not visible

Nature Commun. 10, 3007 (2019)

27.11.2019

These were

Homonuclear diatomic molecules, eg. H₂, Li₂, N₂, O₂

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .



Cząsteczki

Dwuatomowe cząsteczki heterojądrowe, np. HCI, CO, itp.

$$\Psi_{\pm} = c_A \varphi_A \pm c_B \varphi_B \qquad |c_A|^2 = |c_B|^2 \Rightarrow c_A = \pm c_B$$
$$S = \int \varphi_A \varphi_B \, d\vec{r} > 0 \quad \text{całka nakrywania}$$

 $E_{at,B}$

 $E_{at,A}$



Dwuatomowe cząsteczki heterojądrowe, np. HCI, CO, itp.

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .

 $\Psi_{\pm} = c_A \varphi_A \pm c_B \varphi_B \qquad |c_A|^2 \neq |c_B|^2$ metoda wariacyjna $\varepsilon < \frac{\int \Psi_{\pm}^* \hat{H}^0 \Psi_{\pm} d\vec{r}}{\int \Psi_{\pm}^* \Psi_{\pm} d\vec{r}}$ $S = \int \varphi_A \varphi_B \, d\vec{r} > 0$ $\varepsilon(c_A^2 + c_B^2 + 2c_A c_B S) = c_A^2 H_{AA} + c_B^2 H_{BB} + 2c_A c_B S H_{AB}$ $\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_A} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_B} = 0$ $\begin{vmatrix} H_{AA} - \varepsilon & H_{AB} - \varepsilon S \\ H_{AB} - \varepsilon S & H_{BB} - \varepsilon \end{vmatrix} \begin{pmatrix} C_A \\ C_B \end{pmatrix} = 0$ \mathcal{E}_2 $E_{at,B}$ $H_{AA} \approx E_{at,A}$ $E_{at,A}$ $H_{BB} \approx E_{at,B}$ \mathcal{E}_1 Załóżmy, że $E_{at,A} < E_{at,B}$

Dwuatomowe cząsteczki heterojądrowe, np. HCI, CO, itp.

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali φ_A i φ_B .

 $\Psi_{\pm} = c_A \varphi_A \pm c_B \varphi_B \qquad |c_A|^2 \neq |c_B|^2$ metoda wariacyjna $\varepsilon < \frac{\int \Psi_{\pm}^* H^0 \Psi_{\pm} d\vec{r}}{\int \Psi_{\pm}^* \Psi_{\pm} d\vec{r}}$ $S = \int \varphi_A \varphi_B \, d\vec{r} > 0$ $\varepsilon(c_A^2 + c_B^2 + 2c_A c_B S) = c_A^2 H_{AA} + c_B^2 H_{BB} + 2c_A c_B S H_{AB}$ $\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_A} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_B} = 0$ $\begin{vmatrix} H_{AA} - \varepsilon & H_{AB} - \varepsilon S \\ H_{AB} - \varepsilon S & H_{BB} - \varepsilon \end{vmatrix} \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} = 0$ \mathcal{E}_2 $E_{at,B}$ $\varepsilon_1 \approx E_{at,A} - \frac{\left(H_{AB} - E_{at,A}S\right)^2}{E_{at,B} - E_{at,A}}$ $E_{at,A}$ $\varepsilon_2 \approx E_{at,B} - \frac{\left(H_{AB} - E_{at,B}S\right)^2}{E_{at,B} - F_{at,B}}$ \mathcal{E}_1

The bonding is strong when:

Duża wartość całki nakrywania S i proporcjonalnej do niej całki H_{AB} . Niewielka różnica energii orbitali atomowych $E_{at,A}$, $E_{at,B}$. Orbitale molekularne nie muszą być zbudowane z orbitali atomowych tego samego typu (s - s lub p - p).

 $\varepsilon(c_A^2 + c_B^2 + 2c_A c_B S) = c_A^2 H_{AA} + c_B^2 H_{BB} + 2c_A c_B S H_{AB}$



$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_A} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_B} = 0$$

$$\begin{bmatrix} H_{AA} - \varepsilon & H_{AB} - \varepsilon S \\ H_{AB} - \varepsilon S & H_{BB} - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} = 0$$

$$\varepsilon_1 \approx E_{at,A} - \frac{\left(H_{AB} - E_{at,A}S\right)^2}{E_{at,B} - E_{at,A}}$$

$$\varepsilon_2 \approx E_{at,B} - \frac{\left(H_{AB} - E_{at,B}S\right)^2}{E_{at,B} - E_{at,A}}$$

Cząsteczki - dygresja

Dwuatomowe cząsteczki heterojądrowe, np. HCI, CO, itp.

Ponieważ cząsteczka jest dwuatomowa szukamy kombinacji dwóch orbitali $arphi_A$ i $arphi_B$.



Exciton-polaritons in microcavities



Electromagnetic field distribution inside a cavity

Hamiltonian matrix form

$$H = \begin{pmatrix} E_{ph}(k_{\parallel}) & \frac{\hbar\Omega}{2} \\ \frac{\hbar\Omega}{2} & E_{exc}(k_{\parallel}) \end{pmatrix}$$



vacuum field Rabi splitting i.e. exciton-photon coupling Ω , determines exciton polariton modes:







Fig. M. Król

Example: HF molecule

F: $(1s)^2(2s)^2(2p)^5$ H: $(1s)^1$

- 1. Similar energy values have 2p of F and 1s of H.
- 2. Only $2p_z$ orbital gives non-zero overlap integral with 1s (bonding orbital σ).
- 3. 2 Fluorine electrons $2p_x$ i 2 electrons $2p_y$ are not involved in the HF molecular bonding and are called **lone pair** (*wolna para elektronowa*)
- 4. Similarly fluorine 1s and 2s atomic orbitals do not form a bond with the 1s hydrogen electron because of the large energy difference
- 5. Ground state: ${}^{1}\Sigma^{+}$



Hybridization and overlap integrals





27.11.2019

Hybridization sp, eg. BeH₂

The angle between the bonds is 180°.



Hybridization sp², eg. C_2H_4

The angle between bonds is 120°.

Ethylene C₂H₄





Hybridization sp³, eg. CH₄

The angle between bonds is 109,5°.

Methane CH₄

$$h_{1} = \frac{1}{2} (s + p_{x} + p_{y} + p_{z})$$

$$h_{2} = \frac{1}{2} (s + p_{x} - p_{y} - p_{z})$$

$$h_{3} = \frac{1}{2} (s - p_{x} + p_{y} - p_{z})$$

$$h_{4} = \frac{1}{2} (s - p_{x} - p_{y} + p_{z})$$



Hybridization sp³, eg. CH₄

The angle between bonds is 109,5°.

$$h_{1} = \frac{1}{2} (s + p_{x} + p_{y} + p_{z})$$

$$h_{2} = \frac{1}{2} (s + p_{x} - p_{y} - p_{z})$$

$$h_{3} = \frac{1}{2} (s - p_{x} + p_{y} - p_{z})$$

$$h_{4} = \frac{1}{2} (s - p_{x} - p_{y} + p_{z})$$



http://oen.dydaktyka.agh.edu.pl/dydaktyka/chemia/a_e_chemia/1_3_budowa_materii/01_04_03_2b.htm

Hybridization sp³, eg. CH₄

The angle between bonds is 109,5°.

$$h_{1} = \frac{1}{2} (s + p_{x} + p_{y} + p_{z})$$

$$h_{2} = \frac{1}{2} (s + p_{x} - p_{y} - p_{z})$$

$$h_{3} = \frac{1}{2} (s - p_{x} + p_{y} - p_{z})$$

$$h_{4} = \frac{1}{2} (s - p_{x} - p_{y} + p_{z})$$



Hybridization

	A summary of hybrid orbitals, valence bond theory, VSEPR,					
		resonance structures, and octet rule.				
	Linear	Trigonal planar	Tetrahedral	Trigonal bipyramidal	Octahedral	
html	sp	sp^2	sp ³	dsp^3	d^2sp^3	
orid.	BeH ₂	BH ₃	CH ₄	PF5	SF ₆	
/hył	BeF ₂	BF ₃	CF ₄	PCl ₅	IOF ₅	
120	CO ₂	CH ₂ O	CCl ₄	PFCl ₄	PF6 ⁻	
ct/c	HCN	(>C=O)	CH ₃ Cl	:SF4	SiF6 ²⁻	
h/ca	HC°CH	>C=C<	$\mathbf{NH4}^{+}$:TeF4	:BrF5	
chie		CO_{3}^{2}	:NH3	::ClF3	:IF5	
)~~C(benzene	:PF3	::BrF3	::XeF4	
o.ca		graphite	:SOF ₂	:::XeF2		
erlo		fullerenes	::OH2	:::I3 ⁻		
ıwat		•NO2	::SF ₂	(:::I I2 ⁻)		
ice.t		N ₃ ⁻		:::ICl2 ⁻		
cien		:002 (03)	SiO4 ⁴⁻			
vw.s		:502	PO4 ³⁻			
/~//		803	SO4 ²⁻			
http:/			ClO ₄ ⁻			
27.11.2	• a lone o	dd electron	: a lone ele	ectron pair		



Molecules

Hybridization

Uranium, a member of the actinide group of elements, can form molecules with five covalent bonds.

Each uranium atom has a total of 16 atomic orbitals that are available for bond formation. Gagliardi and Roos used an approach called CASSCF/CASPT2 to model how all the valence orbitals in one atom merge with those in the other atom to form the most stable chemical bond -- that is, the one with minimum energy.

Gagliardi and Roos found that the uraniumuranium bond is more complex than any other known diatomic bond: it contains three normal electron-pair bonds and four weaker one-electron bonds. They also find evidence for ferromagnetic coupling between two electrons, each localized on one of the atoms. This means that all the known forms of covalent bonding are found in the molecule.



The active molecular orbitals forming the chemical bond between two uranium atoms. The orbital label is given below each orbital, together with the number of electrons occupying this orbital or pair of orbitals in the case of degeneracy (image courtesy: *Nature* **433** 848).

Hybridization





27.11.2019

Benzene molecule

Wiązania σ (*sp*²) są "zlokalizowane" i tworzą sztywny szkielet, natomiast elektrony tworzące wiązania π są zdelokalizowane.

$$\Psi_{k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{n=1}^{6} e^{\frac{2\pi i}{6}kn} p_{z,n}$$
$$E_{k} = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{2\pi i}{6}k\right)$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, 3$$

Funkcje falowe tej postaci pokazują, że sześć orbitali atomowych $2p_z$ daje równoprawny wkład do wszystkich orbitali molekularnych.

Funkcje te odpowiadają falom biegnącym wokół pierścienia atomów węgla, w przeciwnych kierunkach dla dodatnich i ujemnych wartości k



Benzene molecule

$$\Psi_{k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{n=1}^{6} e^{\frac{2\pi i}{6}kn} p_{z,n}$$
$$E_{k} = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{2\pi i}{6}k\right)$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, 3$$



Friedrich August Kekule 1829 - 1896





