

# Wstęp do Optyki i Fizyki Materii Skondensowanej

1100-3003

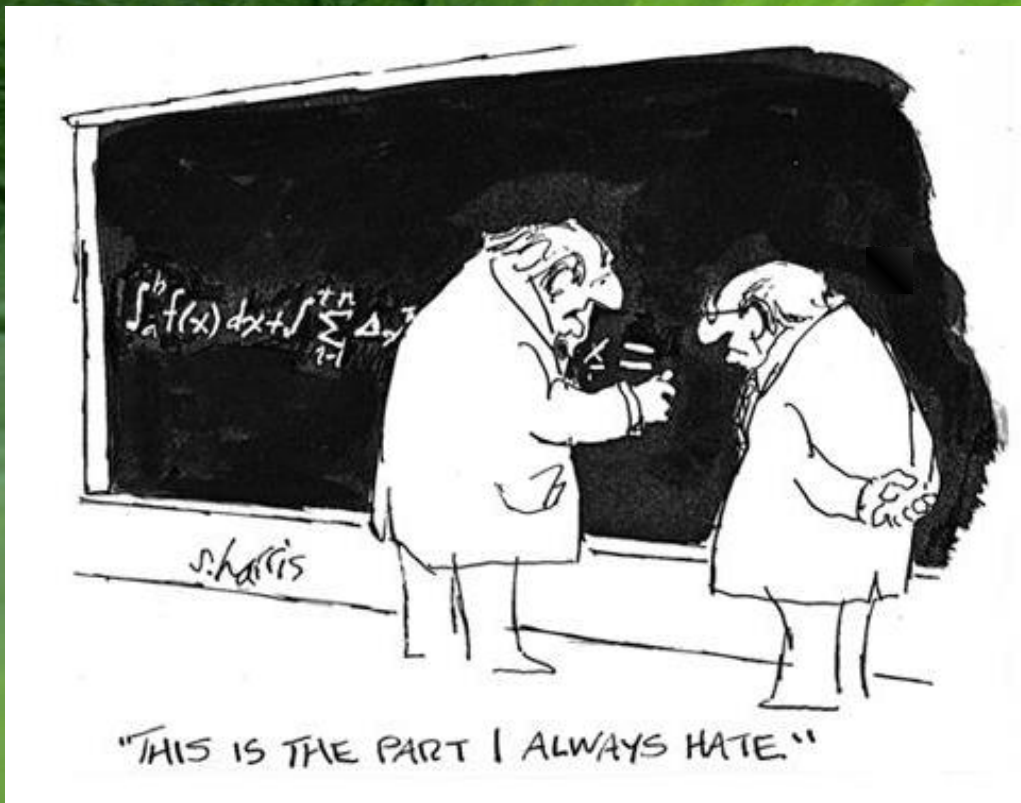
## Optyka 2

Wydział Fizyki UW

Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl

Potr.Fita@fuw.edu.pl

**Inżynieria**  
nanostruktur



# Fala elektromagnetyczna

## Notacja zespolona

Korzystamy ze wzoru Eulera:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

Dla fali o wektorze falowym  $\vec{k}$ :  
(Część urojoną pomijamy "w pamięci")

$$\vec{E} = E_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{n}$$

Tu  $E_0$  może być zespolone, wtedy zawiera informację o fazie:

$$E_0 = |E_0| e^{i\phi}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} E_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (\hat{k} \times \hat{n})$$

Natężenie światła:

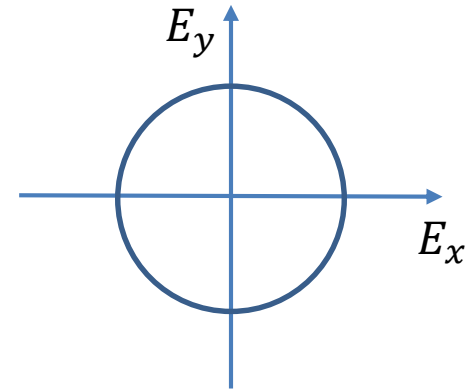
$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \sim |\vec{E}|^2$$

# Polaryzacja światła

$$\vec{k} = (0, 0, k_z)$$
$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(k_z z - \omega t) = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} E_x e^{i\varphi_x} \\ E_y e^{i\varphi_y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(k_z z - \omega t)} \right]$$

1.  $E_y = 0$
2.  $E_x = E_y = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0$  oraz  $\varphi_x = \varphi_y$
3.  $E_x = E_y = E_0$  oraz  $\varphi_x - \varphi_y = \frac{\pi}{2}$



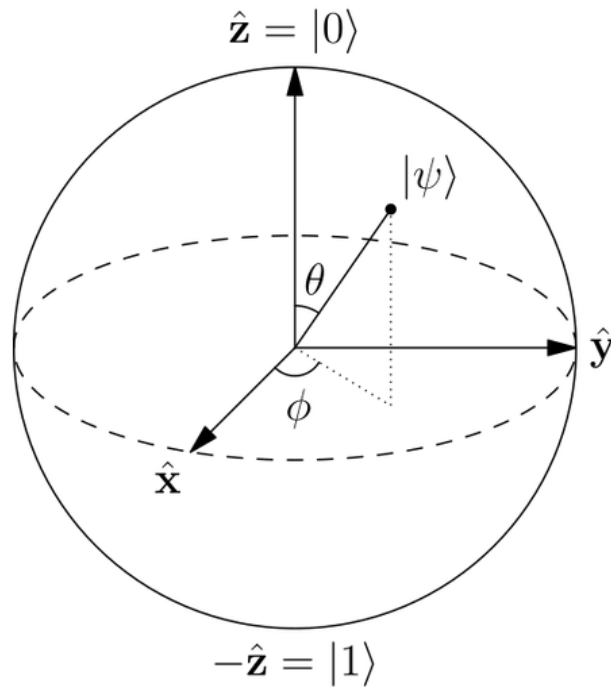
$$\vec{E}_x = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{E}_y = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_D = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{E}_A = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_{\sigma^+} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$
$$\vec{E}_{\sigma^-} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

# Polaryzacja światła

Bloch sphere

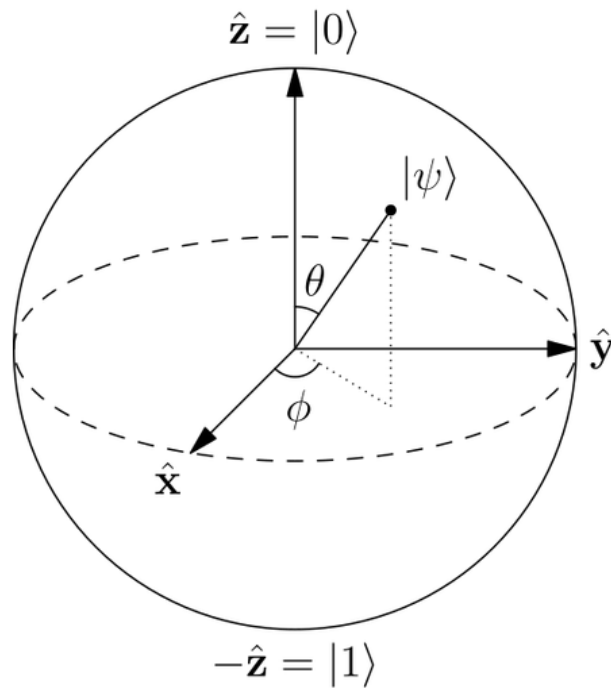


$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$\psi_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \psi_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$
$$\psi_{z+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \uparrow \quad \psi_{z-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \downarrow$$

# Polaryzacja światła

Poincaré  
Bloch sphere



$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

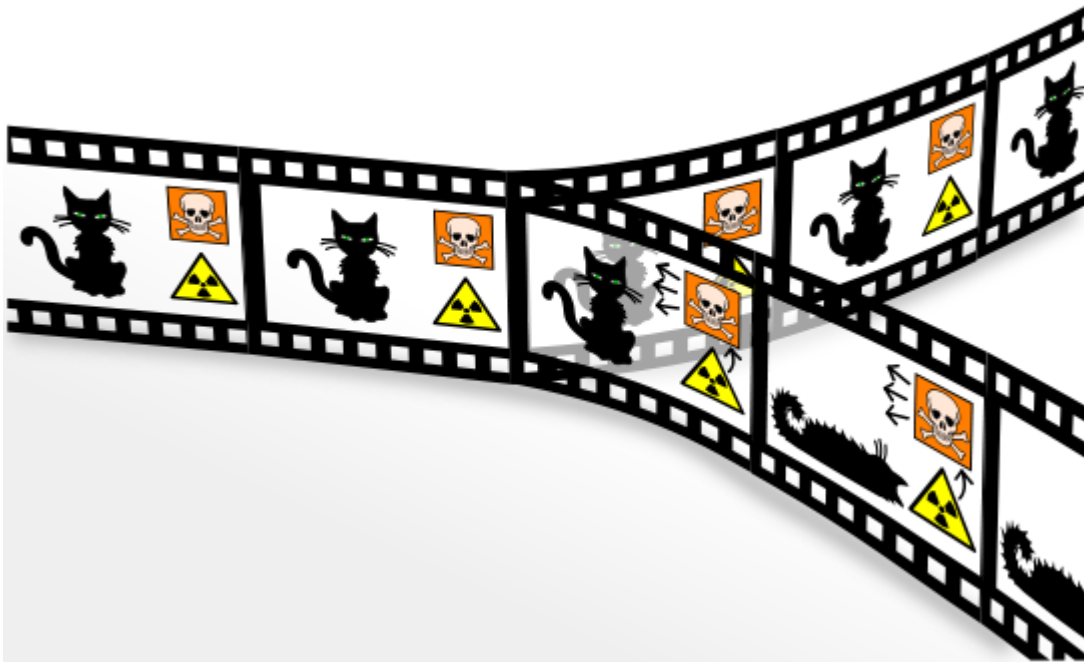
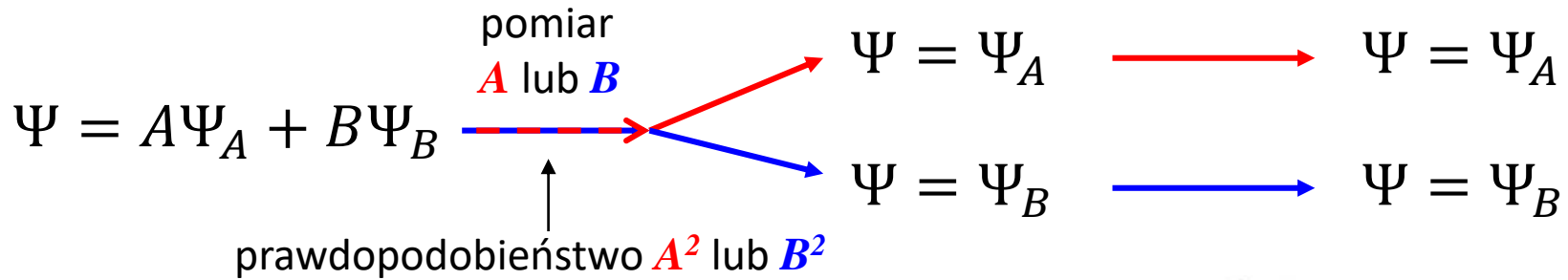
$$\psi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ \psi_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \sigma^-$$

$$\psi_{z+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{z-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

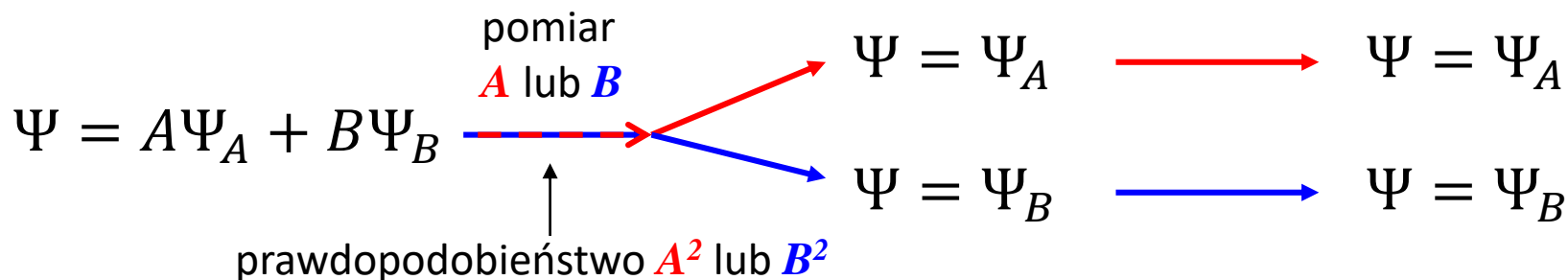
# Świat klasyczny i kwantowy

Ewolucja funkcji falowej jest DETERMINISTYCZNA. Jednak w momencie pomiaru „dowiadujemy” się w jakim stanie jest funkcja (tzw. *redukcja f. falowej*)



# Świat klasyczny i kwantowy

Ewolucja funkcji falowej jest DETERMINISTYCZNA. Jednak w momencie pomiaru „dowiadujemy” się w jakim stanie jest funkcja (tzw. *redukcja f. falowej*)



Czasami ważna jest KOLEJNOŚĆ pomiaru:

Pomiar = obserwable = operatory = reguły komutacji

Zasady nieoznaczoności Heisenberga (położenie i pęd, energia i czas, rzuty momentów pędu itd).

$$[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$$

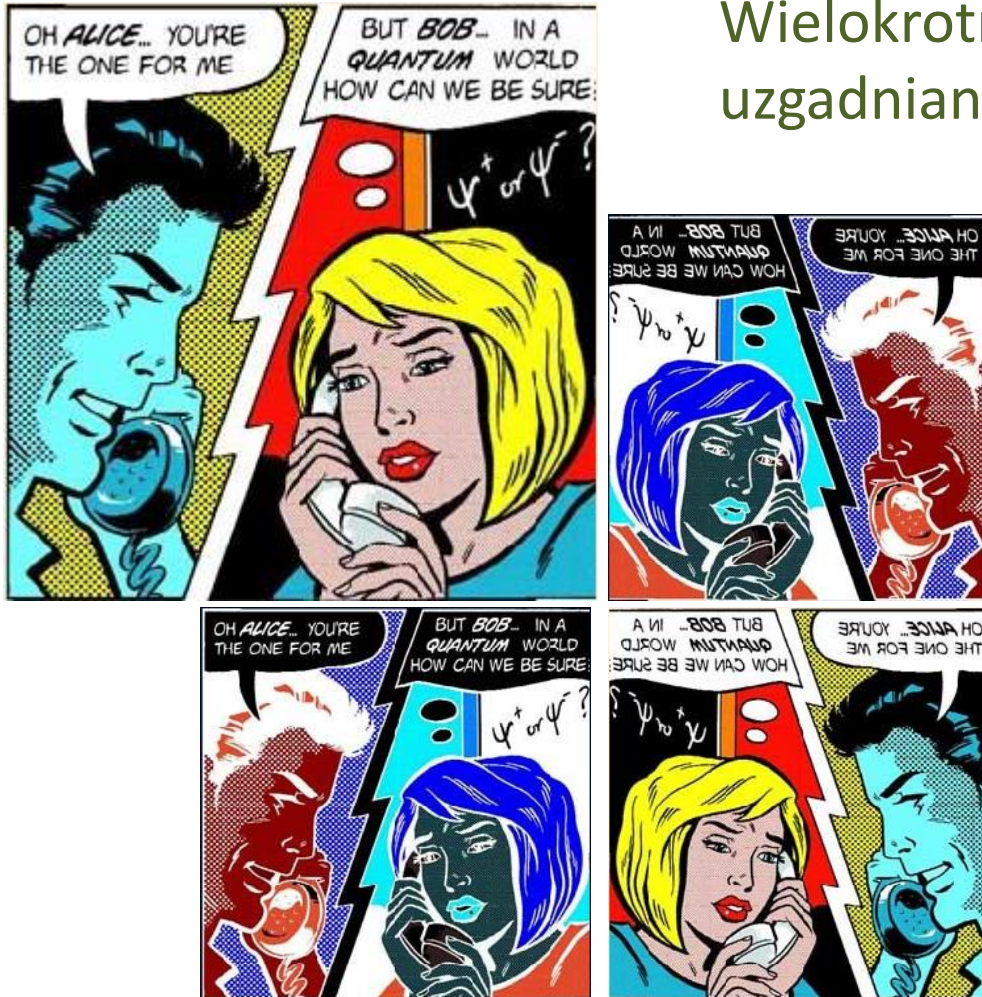
$$\Delta p \Delta x \geq \frac{1}{2} \hbar$$

$$\hat{U}\hat{W}\Psi \neq \hat{W}\hat{U}\Psi \quad \text{gdy} \quad \hat{U}\hat{W} - \hat{W}\hat{U} = [\hat{U}, \hat{W}] \neq 0$$

Zasada superpozycji stanów. Stany splątane

# Kryptografia kwantowa

Wielokrotna i bezpieczna procedura uzgadniania klucza jednorazowego



<http://wug.physics.uiuc.edu/courses/phys214/fall04/>



# Kryptografia kwantowa



Charles Bennett



Gilles Brassard

## Wielokrotna i bezpieczna procedura uzgadniania klucza jednorazowego

### QUANTUM CRYPTOGRAPHY: PUBLIC KEY DISTRIBUTION AND COIN TOSsing

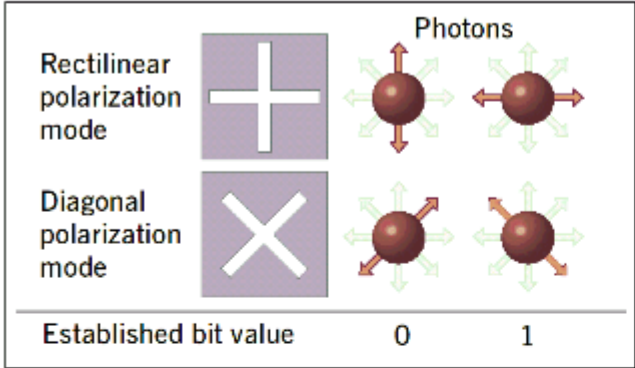
Charles H. Bennett (IBM Research, Yorktown Heights NY 10598 USA)  
Gilles Brassard (dept. IRO, Univ. de Montreal, H3C 3J7 Canada)

International Conference on Computers, Systems & Signal Processing Bangalore, India December 10-12, 1984

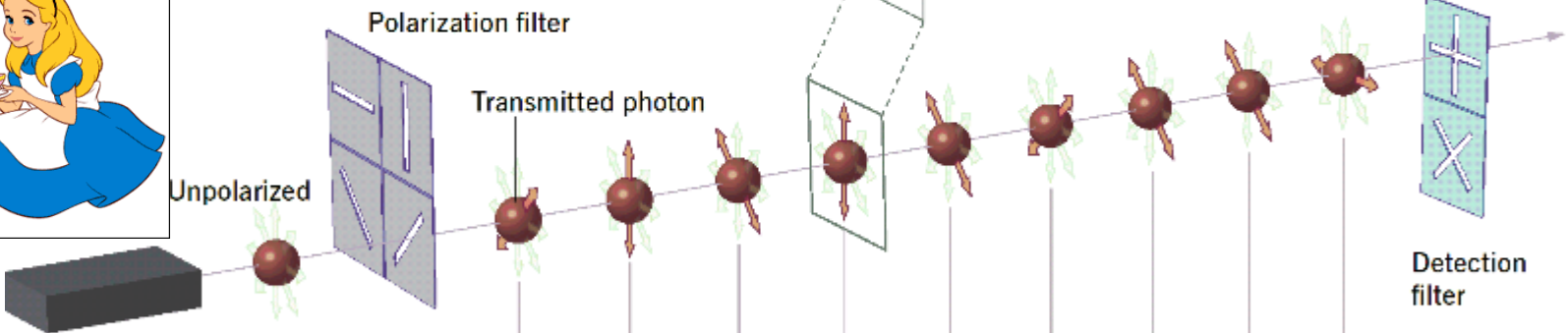
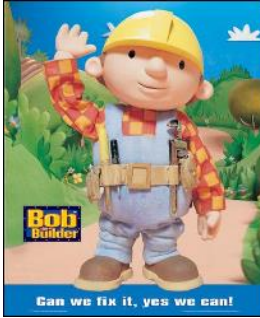
When elementary quantum systems, such as polarized photons, are used to transmit digital information, the uncertainty principle gives rise to novel cryptographic phenomena unachievable with traditional transmission media, e.g. a communications channel on which it is impossible in principle to eavesdrop without a high probability of disturbing the transmission in such a way as to be detected. Such a quantum channel can be used in conjunction with ordinary insecure classical channels to distribute random key information between two users with the assurance that it remains unknown to anyone else, even when the users share no secret information initially. We also present a protocol for coin-tossing by exchange of quantum messages, which is secure against traditional kinds of cheating, even by an opponent with unlimited computing power, but ironically can be subverted by use of a still subtler quantum phenomenon, the Einstein-Podolsky-Rosen paradox.

• principle impossible to counterfeit, and multiplexing two or three messages in such a way that reading one destroys the others. More recently [BBB<sup>w</sup>], quantum coding has been used in conjunction with public key cryptographic techniques to yield several schemes for unforgeable subway tokens. Here we show that quantum coding by itself achieves one of the main advantages of public key cryptography by permitting secure distribution of random key information between parties who share no secret information initially, provided the parties have access, besides the quantum channel, to an ordinary channel susceptible to passive but not active eavesdropping. Even in the presence of active eavesdropping, the two parties can still distribute key securely if they share some secret information initially, provided the eavesdropping is not so active as to suppress communications completely. We also present a protocol for coin tossing by exchange of quantum messages. Except where otherwise noted the protocols

# Kryptografia kwantowa



## Protokół BB84 (Bennett, Brassard, 1984)



Alice's bit sequence:	0	0	1	0	1	0	1	1	1
Alice's filter scheme:	↘	↑	↘	↑	↘	↘	↘	↘	—
Bob's detection scheme:	+	+	+	+	X	+	+	X	+
Bob's bit measurements:	1	0	1	0	1	0	0	1	1
Retained bit sequence (key):	—	0	—	0	1	—	—	1	1

Bolek publicznie informuje Alicję jakiej bazy używał, zaś Alicja informuje go czy była to baza właściwa czy nie.

# Kryptografia kwantowa

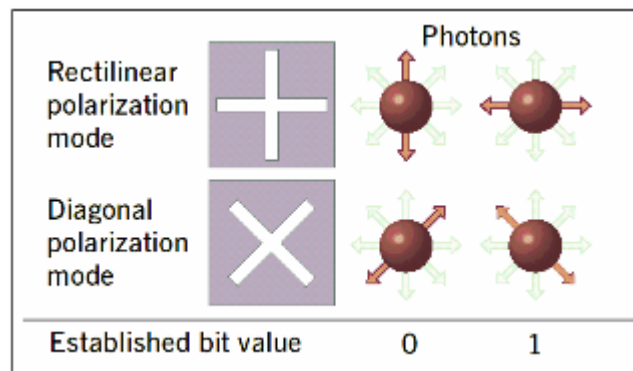
## Uwagi:

Porównując bity wysłane przez Alicję z bitami zarejestrowanymi przez Boleka możemy podzielić bity zarejestrowane przez Boleka na trzy kategorie:

- bity pewne (średnio 50 %) — te dla których Bolek wybrał prawidłową bazę i które mogą być traktowane jako klucz kryptograficzny;
- bity prawidłowe pomimo złego wyboru bazy (średnio 25 %);
- bity nieprawidłowe (średnio 25 %).

Zatem prawdopodobieństwo tego, że zarejestrowany bit będzie prawidłowy (taki sam jak bit wysłany) jest równe  $3/4$

- Prawdopodobieństwo zarejestrowania bitu nieprawidłowego wynosi więc  $1/4$



# Kryptografia kwantowa

## Uwagi:



















Jeśli Ewa podsłuchuje stosując strategię tzw. *nieprzezroczystego podsłuchu*, to wybiera losowo bazę prostą lub ukośną, dokonuje pomiaru polaryzacji w tej bazie i następnie przesyła do Bolka foton o takiej polaryzacji jaką zmierzyła.

- Dokonywane przez Ewę pomiary muszą wprowadzić błędy, które Alicja i Bolek mogą wykryć przy uzgadnianiu klucza.

Takie błędy Alicja i Bolek mogą wykryć wybierając losowo pewną liczbę bitów klucza i porównując publicznym kanałem ich wartości. Te bity oczywiście następnie się wyrzuca.

- Jeśli liczba błędów przekracza założony poziom to uznaje się, że kanał był podsłuchiwany i procedurę uzgadniania klucza rozpoczyna się od nowa.

- **Mechanika kwantowa nie dopuszcza możliwości pasywnego podsłuchu. Bezpieczeństwo kwantowego systemu kryptograficznego gwarantowane jest przez prawa fizyki!**

Alice's bit sequence:	0	0	1	0	1	0	1	1	1
Alice's filter scheme:									
Bob's detection scheme:									
Bob's bit measurements:	1	0	1	0	1	0	0	1	1
Retained bit sequence (key):	—	0	—	0	1	—	—	1	1

# Produkty

**id Quantique**

Products Ordering Support Company News Contact Site Map

Getting Started Latest Headlines Gazeta.pl Murator :: Indeks INT Tabela NBP onet Słownik Ang. onet Słownik Fra. Google Desktop

**Network Security**

Are you protected against industrial espionage?

**DO YOU TRUST THE SECURITY OF YOUR DATA NETWORK?**

Is your sensitive data as secure as you think?

**Latest news**  
**June 05:**  
 A turnkey service to secure communications, based on QC, is now available in Switzerland. Strategic partnership between Fibrelac and idQ (pdf, English or French).

**Quantum Cryptography [QC] Systems**

- **Vectis** [commercial applications]
- **Clavis** [research applications]

Overview of idQ's product offering in the field of QC.

Reasons why QC is the most secure technology.

Understanding QC: an introduction (pdf).

Securing networks with the Vectis Link Encryptor (pdf).

Future-proof data confidentiality with QC (pdf).

**Random Number Generators [RNGs]**

- **Quantis**

Random numbers generation using Quantum Physics (pdf).

Algorithmic randomness, quantum physics and incompleteness (pdf).

Operating Systems supported by Quantis-PCI cards.

What makes Quantis a unique random number generator?

**Optical Instrumentation**

- **Photon counters - VIS**
- **Counter arrays - VIS**
- **Photon counters - NIR**
- **Short pulse laser sources**
- **Products overview**

Besides its strong focus on Network Security applications, id Quantique is also a leading provider of Optical Instrumentation Products. The company's innovative photonic solutions are used in industrial, commercial and research applications.

© copyright 2005 id Quantique SA, All rights reserved

Search

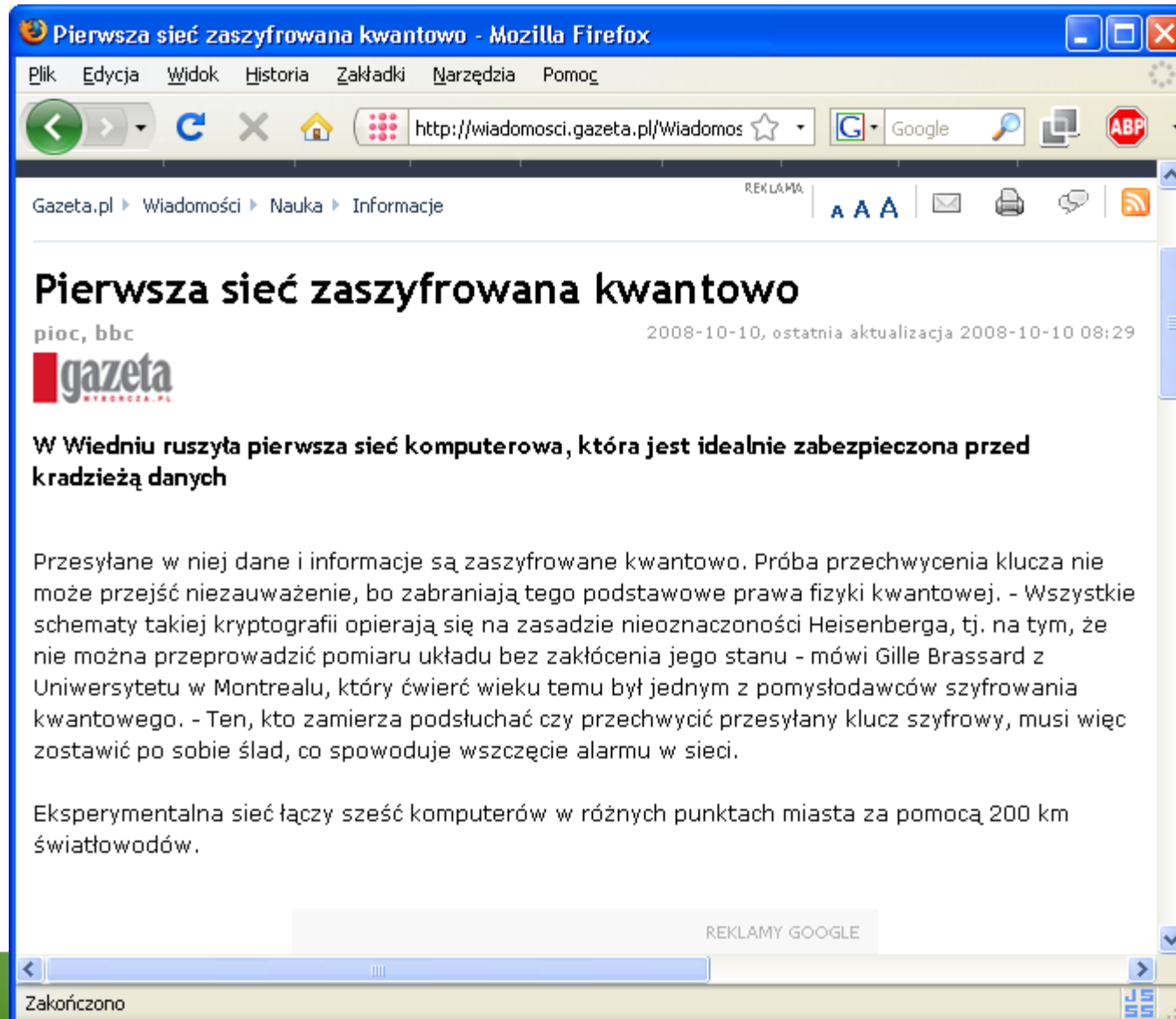
MagiQ at NITSL 2005

MagiQ Celebrates Five Years of Progress

Quantum Cryptography Gets Practical by Bob Gelfond

CIO Ask the Expert: Bob Gelfond

# Produkty



# Produkty

**MagiQ Technologies - Mozilla Firefox**

Plik Edycja Widok Przejdź Zakładki Narzędzia Pomoc

http://www.magiqtech.com/index.php

Getting Started Latest Headlines Gazeta.pl Murator :: Indeks Tabela NBP Slownik Ang. Slownik Fra. Google Desktop

## MagiQ™

Products & Solutions | Research | About MagiQ | Press & Events | Partners

### Quantum Information Solutions for the Real World.

#### News

**CSO**  
Quantum Physics to the Rescue  
[More...](#)

**The Register**  
Quantum crypto moves out of the lab  
[More...](#)

**Forbes.com**  
Next-Generation Networks: The Hacker-Proof Network  
[More...](#)

**CNET News.com**  
Quantum crypto firm charts way to mainstream  
[More...](#)

**Scientific American**  
Best-Kept Secrets: Quantum Cryptography from Theory to Laboratory  
[More...](#)

**The Industrial Physicist**  
Quantum Key Distribution  
[More...](#)

**MagiQ QPN**  
QPN datasheet

**QPN™ Research**  
QPN datasheet

Presenting the **first commercial quantum cryptography** solutions.

#### Press Releases

**MagiQ Solves Quantum Cryptography Geomagnetic Interference Problem**

**MagiQ Announces New, Next Generation Quantum Cryptography Solution**

**MagiQ and Cavium**

#### Product Information

**QPN Overview Presentation**

**New Weapon to Protect Online Privacy**

**QPN Executive Summary**

**QPN Data Sheet**

**QPN White Paper**

#### Company Information

**MagiQ at NITSL 2005**

**MagiQ Celebrates Five Years of Progress**

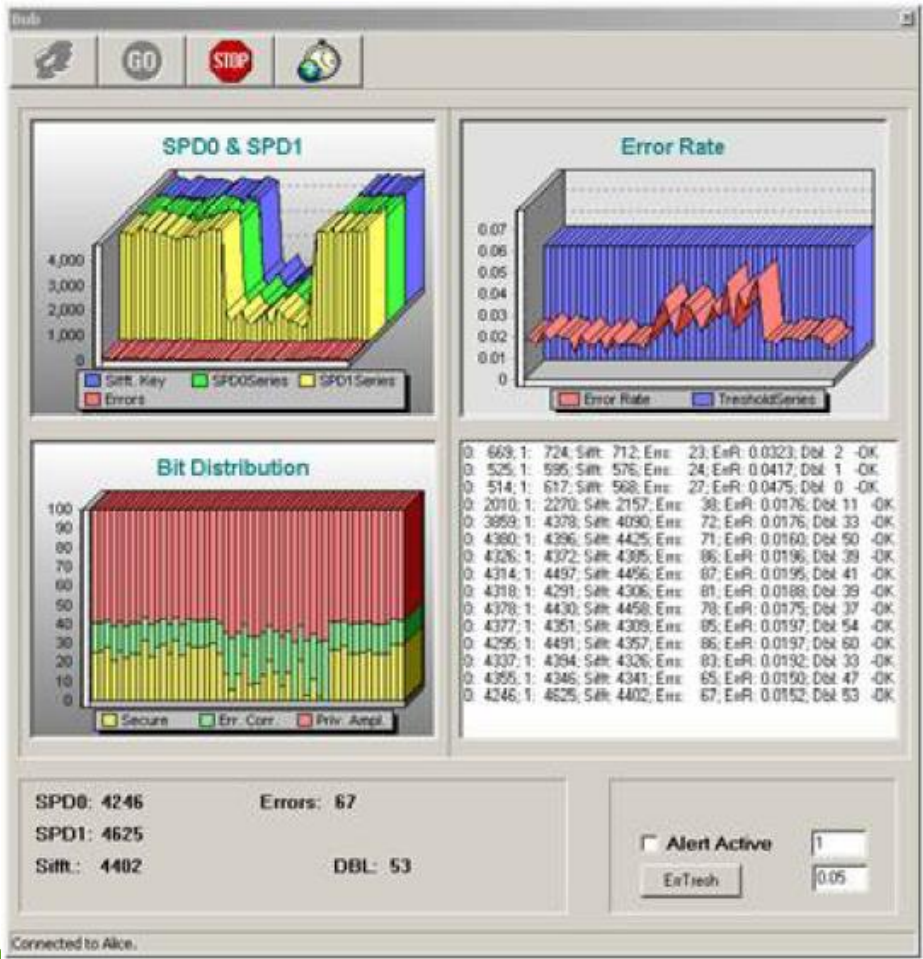
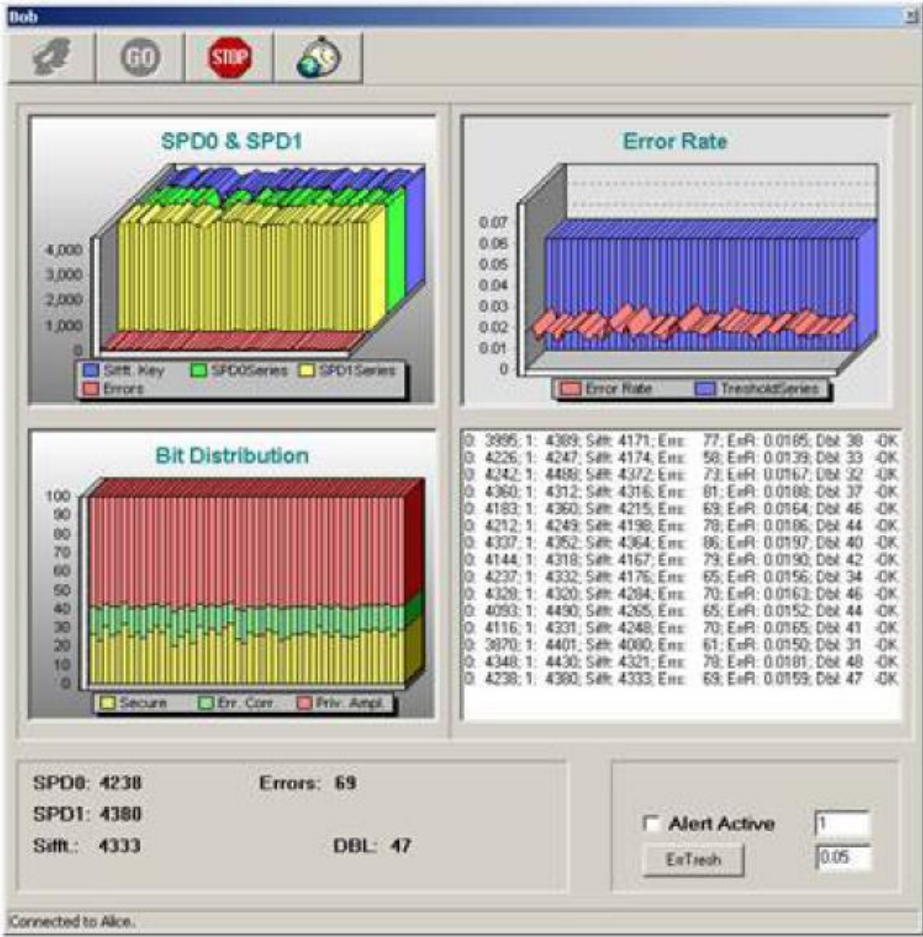
**Quantum Cryptography Gets Practical by Bob Gelfond**

**CIO Ask the Expert: Bob Gelfond**

SCIENTIFIC AMERICAN 50

SPECTRUM

# Produkty





## PHYSICAL REVIEW LETTERS

---

---

VOLUME 67

5 AUGUST 1991

NUMBER 6

---

---

### **Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem**

Artur K. Ekert

*Merton College and Physics Department, Oxford University, Oxford OX1 3PU, United Kingdom*

(Received 18 April 1991)

Practical application of the generalized Bell's theorem in the so-called key distribution process in cryptography is reported. The proposed scheme is based on the Bohm's version of the Einstein-Podolsky-Rosen *gedanken experiment* and Bell's theorem is used to test for eavesdropping.

---

---

VOLUME 67

---

---

---

---

NUMBER 6

---

---

*Merton College and*

Practical application  
tography is reported.  
*Rosen gedanken exper*

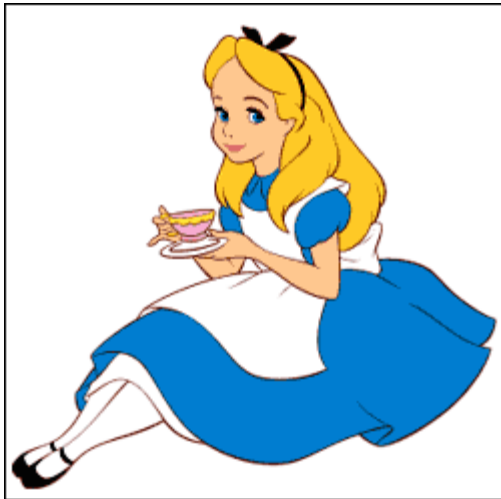
*ed Kingdom*

process in cryp-  
nstein-Podolsky-



Artur Ekert

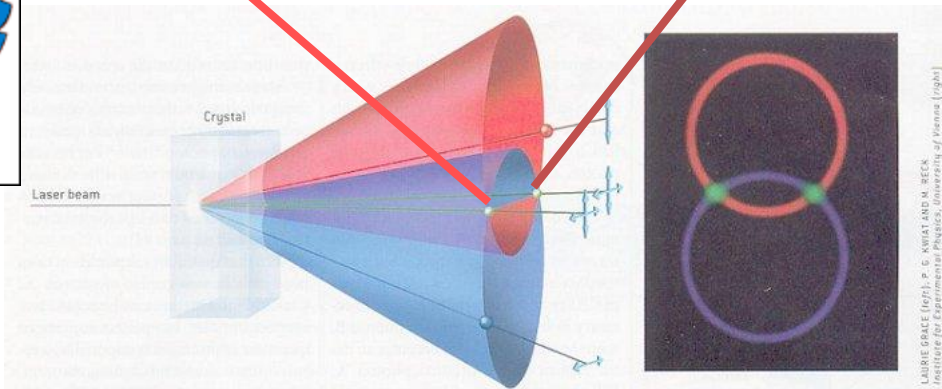
# Kryptografia kwantowa



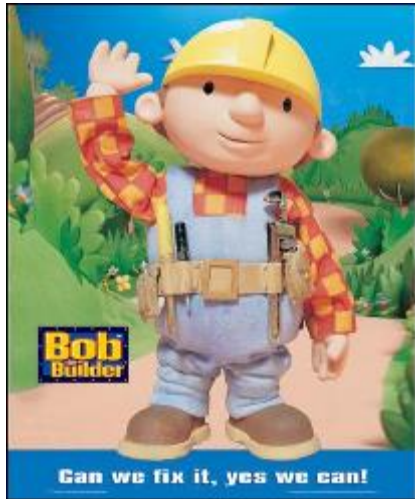
Alice

$a_1$	$0^\circ$	
$a_2$	$45^\circ$	
$a_3$	$90^\circ$	

$b_1$	$45^\circ$	
$b_2$	$90^\circ$	
$b_3$	$135^\circ$	



ENTANGLED PHOTON PAIRS are created when a laser beam passes through a crystal such as beta barium borate. The crystal occasionally converts a single ultraviolet photon into two photons of lower energy, one polarized vertically (on red cone), one polarized horizontally (on blue cone). If the photons happen to travel along the cone intersections (green), neither photon has a definite polarization, but their relative polarizations are complementary; they are then entangled. Colored image (at right) is a photograph of down-converted light. Colors do not represent the color of the light.



Bob

# Kryptografia kwantowa

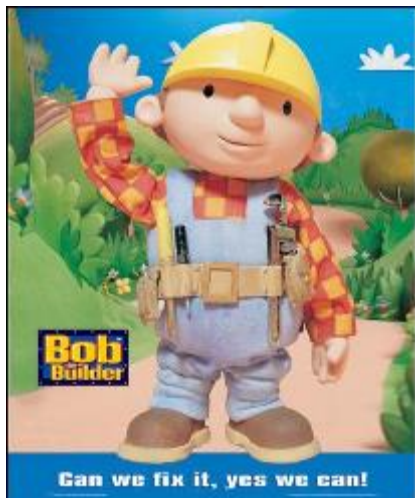
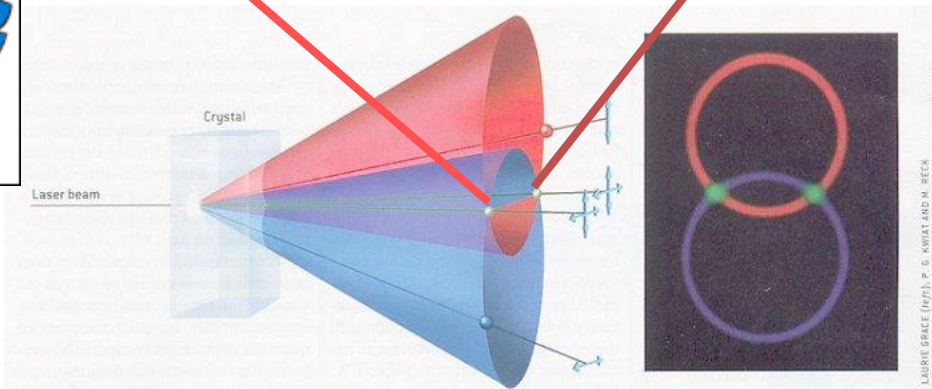
Artur Ekert



Alice

- $a_1$  0°
- $a_2$  45°
- $a_3$  90°

- $b_1$  45°
- $b_2$  90°
- $b_3$  135°



Bob

<b>a</b>																					
	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	x	1	0	1	1	0	0	1	1	0	
<b>b</b>																					
	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
	t	0	1	t	0	0	t	1	0	1	x	t	0	1	t	t	t	1	t	t	t

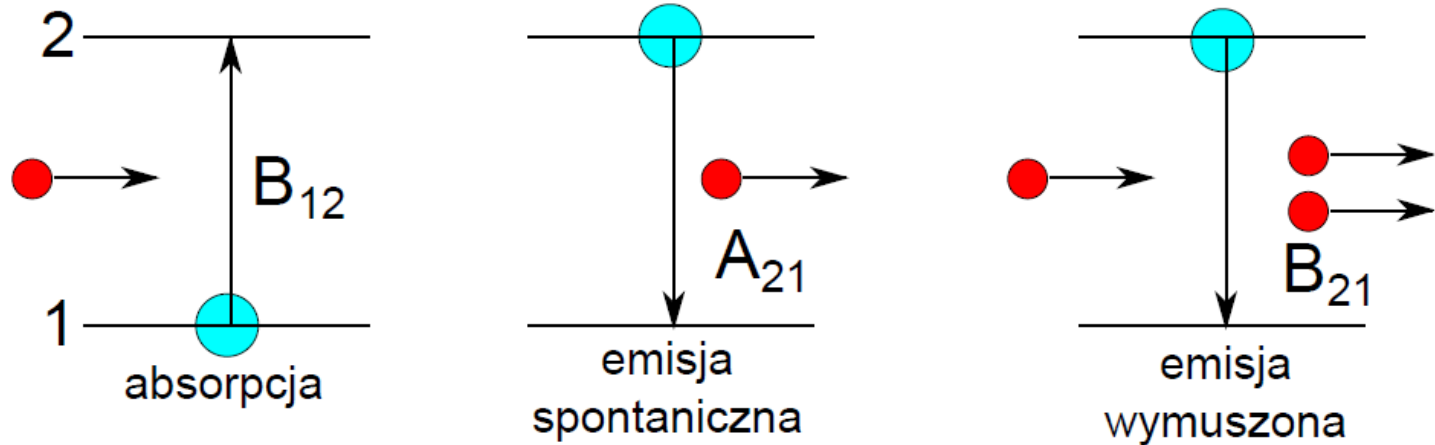
jawne

jawne

test  
(jawny)

Klucz: 0100101011...

# Absorpcja i emisja światła



Relacje między współczynnikami Einsteina:

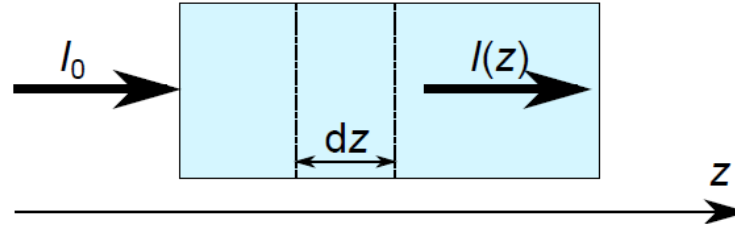
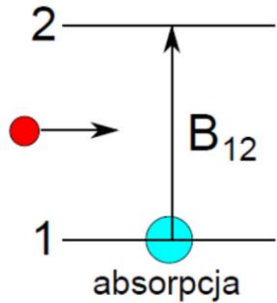
$$B_{12} = B_{21}$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

*(Wyprowadzenie - na ćwiczeniach)*

# Absorpcja i emisja światła

## Prawo Lamberta-Beera



Liczba fotonów pochłoniętych w czasie  $dt$ :

$$dN_{12} = B_{12}(\nu)\rho(\nu)N_1 dt$$

$N_1$  – liczba atomów w objętości, przez którą przechodzi światło:

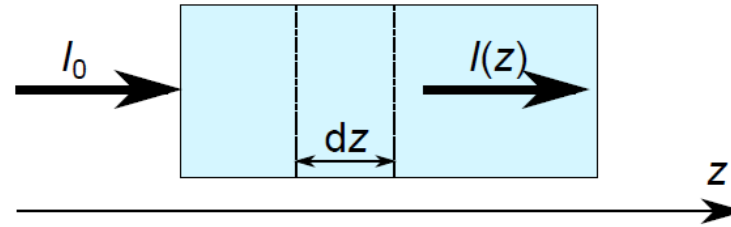
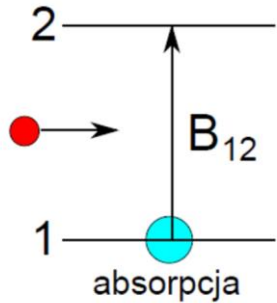
$$N_1 = c_0 \cdot V = c_0 \cdot A \cdot dz$$

Wstawiamy:

$$\frac{dN_{12}}{A \cdot dt} = B_{12}(\nu)\rho(\nu)c_0 dz$$

# Absorpcja i emisja światła

## Prawo Lamberta-Beera



$$\frac{dN_{12}}{A \cdot dt} = B_{12}(\nu) \rho(\nu) c_0 dz$$

Lewa strona jest proporcjonalna do spadku natężenia światła:

$$\frac{dN_{12}}{A \cdot dt} \sim -dI$$

Oraz  $\rho(\nu) \sim I(\nu)$

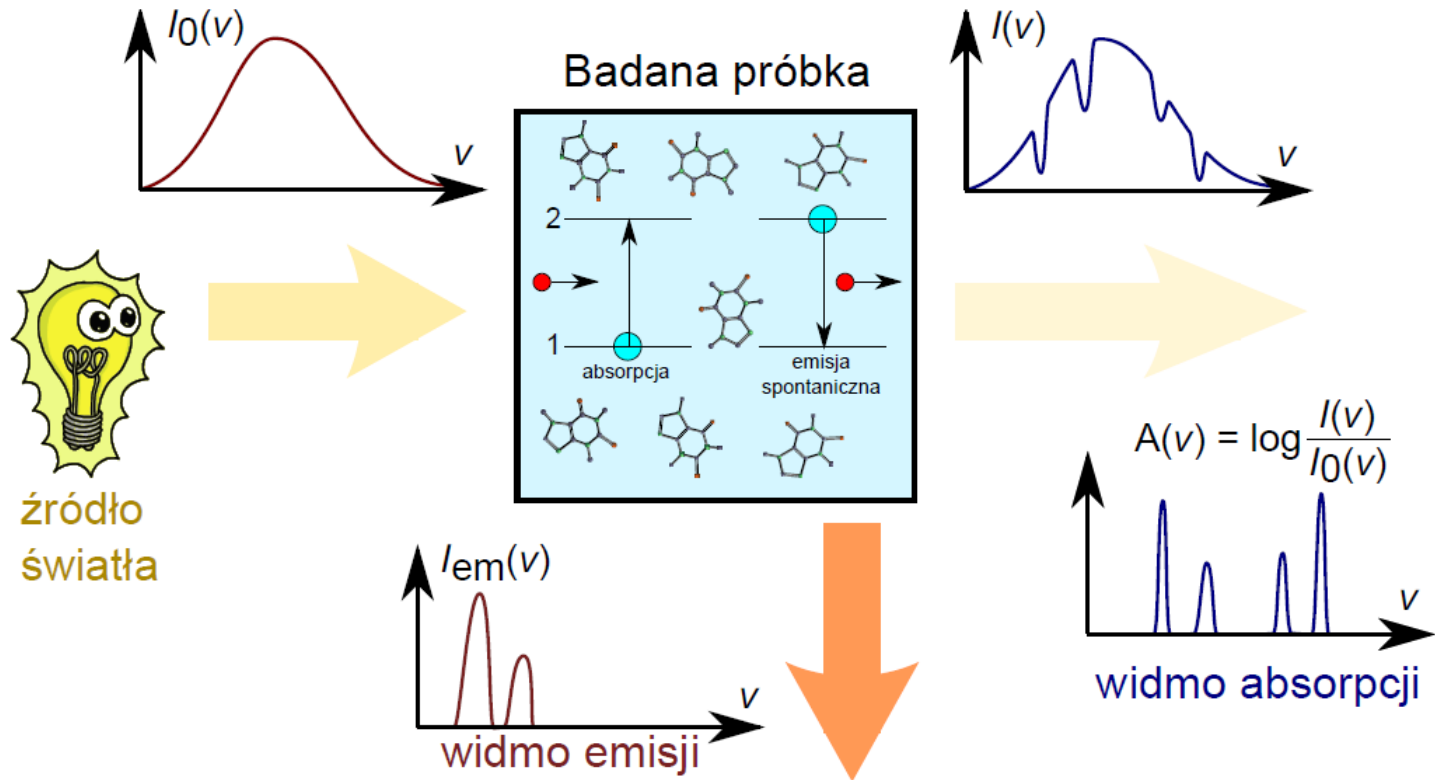
Zbieramy wszystkie stałe do  $\epsilon(\nu)$ :

$$dI = -\epsilon(\nu) I(\nu) c_0 dz$$

$$\frac{dI(\nu)}{dz} = -\epsilon(\nu) c_0 I(\nu)$$

$$I(\nu, z) = I_0(\nu) e^{-\epsilon(\nu) c_0 z} = I_0(\nu) e^{-\alpha(\nu) z}$$

# Spektroskopia emisyjna i absorpcyjna





# Jednostki w spektroskopii

Częstość kołowa:	$\omega$ [1/s]
Częstotliwość:	$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ [Hz]
Długość fali:	$\lambda = \frac{c}{\nu}$ [nm, $\mu\text{m}$ ]
Energia:	$\mathcal{E} = h\nu = \hbar\omega$ [J, eV, meV]
Liczba falowa:	$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ [ $\text{cm}^{-1}$ ]

# Optyka - powtórzenie

## Równania Maxwella

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{sw} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

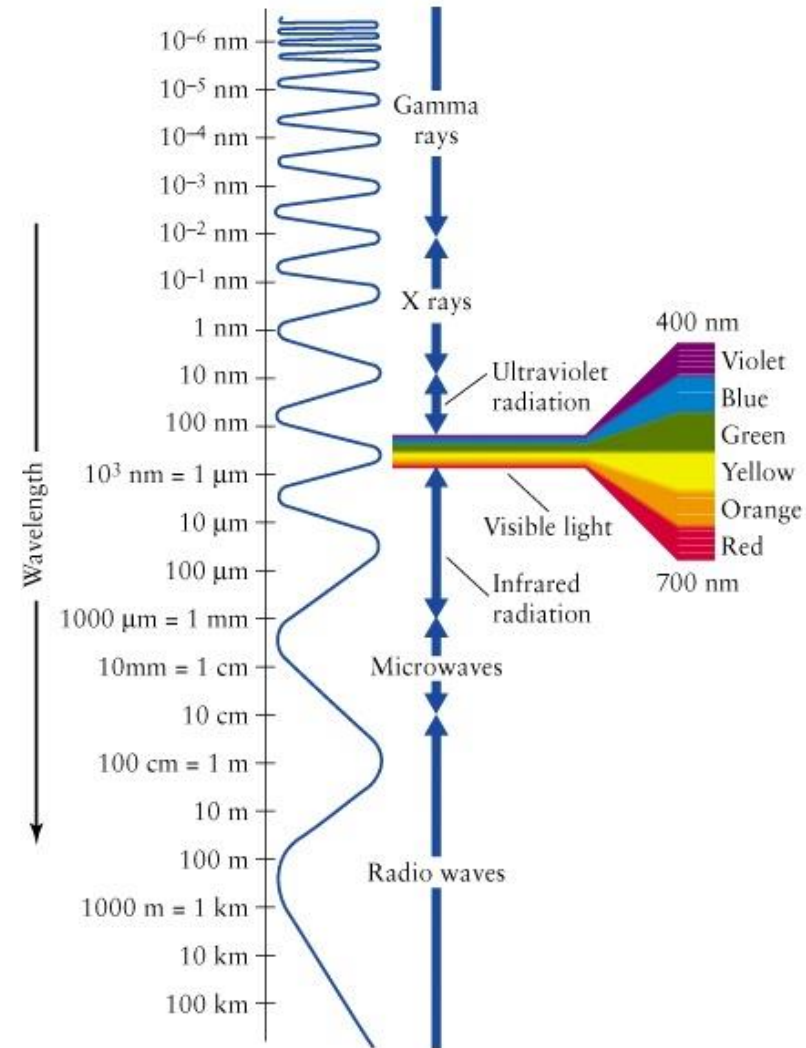
$$\nabla \vec{D} = \rho_{sw}$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j}_{sw} = \sigma \vec{E}$$



# Optyka - powtórzenie

## Electromagnetic wave in vacuum

Maxwell equations:

$$\nabla \times \vec{E} = \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wave equation:

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

The speed of the electromagnetic wave:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Refractive index:

$$n = 1$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

## Electromagnetic wave in dielectric

Maxwell equations:

$$\nabla \times \vec{E} = \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wave equation:

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

The speed of the electromagnetic wave:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}} = \frac{c}{n}$$

Refractive index:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon \mu}$$

$$k = \frac{n\omega}{c}$$

# Optyka - powtórzenie

Electromagnetic wave in vacuum	Electromagnetic wave in dielectric
<p>Maxwell equations:</p> $\nabla \times \vec{E} = \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \vec{B} = \text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	<p>Maxwell equations:</p> $\nabla \times \vec{E} = \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \vec{B} = \text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
<p><b>Wave</b></p> <p><b>But how the medium interacts with an electromagnetic wave? Is <math>\epsilon</math> (so <math>n</math>) constant?</b></p>	
$\Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$	$\Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$
<p>The speed of the electromagnetic wave:</p> $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$	<p>The speed of the electromagnetic wave:</p> $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{c}{n}$
<p>Refractive index:</p> $n = 1$ <div style="background-color: #8ebf42; color: white; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>k = \frac{\omega}{c}</math> </div>	<p>Refractive index:</p> $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon \mu}$ <div style="background-color: #8ebf42; color: white; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>k = \frac{n\omega}{c}</math> </div>

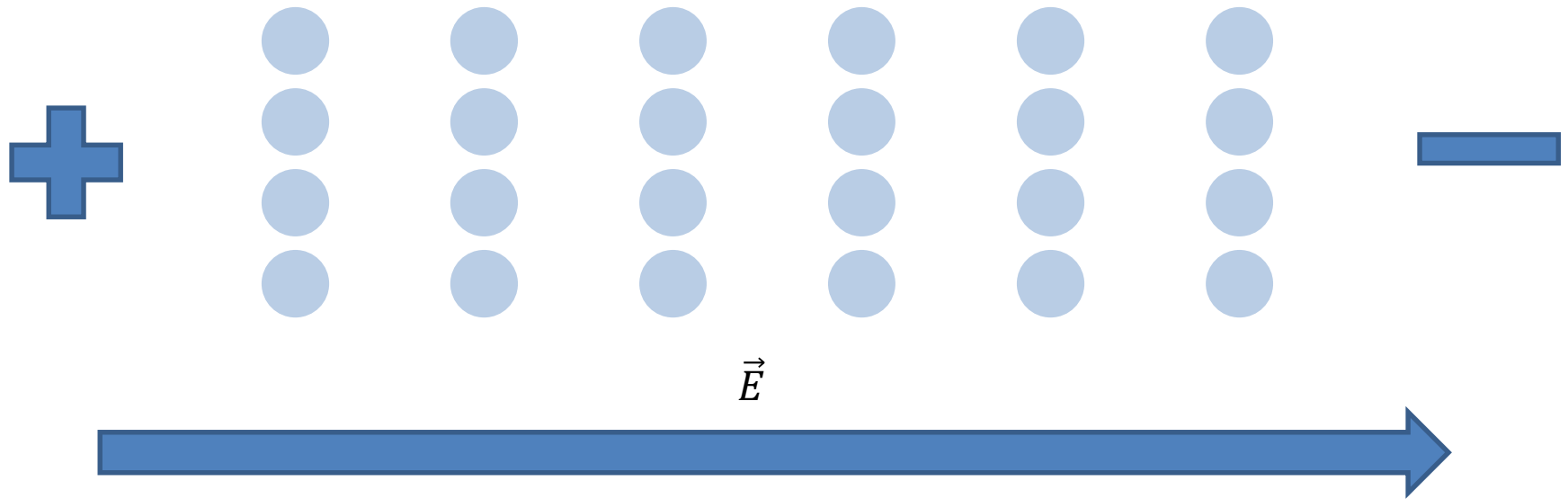
# Klasyczny model współczynnika załamania



# Klasyczny model współczynnika załamania

Fala w ośrodku wypełnionym oscylatorami (model Lorentza):

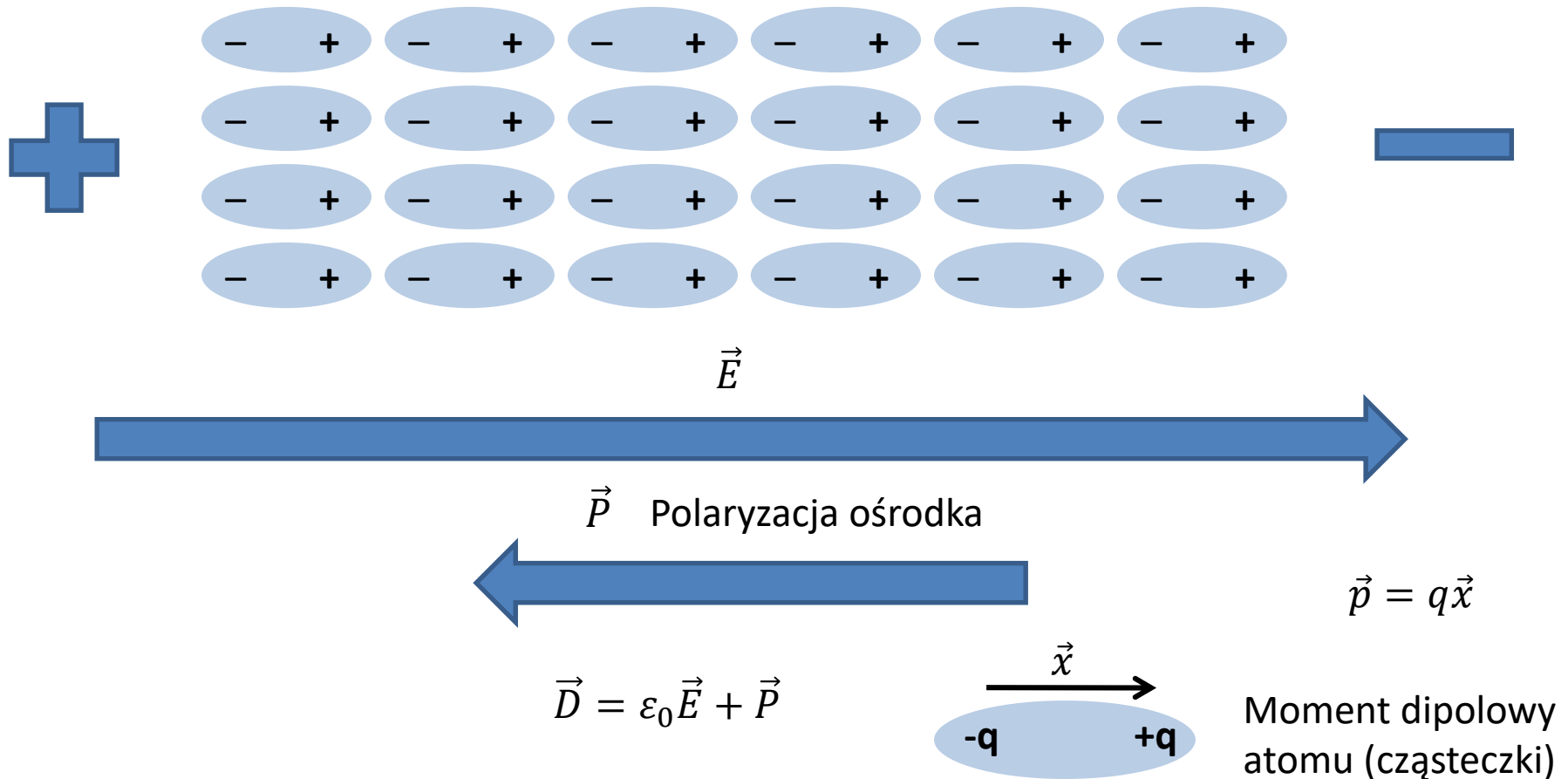
Dielektryk



# Klasyczny model współczynnika załamania

## Fala w ośrodku wypełnionym oscylatorami (model Lorentza):

Dielektryk

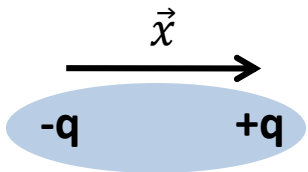


# Klasyczny model współczynnika załamania

## Fala w ośrodku wypełnionym oscylatorami (model Lorentza):

### Rozważamy

- przestrzeń wypełnioną oscylatorami o częstotliwości rezonansowej  $\omega_0$  i współczynniku tłumienia  $\gamma$ ;
- oscylatory mają masę  $m$ , ładunek  $q$
- są poruszane (wzbudzone) przez oscylujące pole elektryczne  $\vec{E}$ .



$$\vec{p} = q\vec{x} \quad \text{Moment dipolowy atomu (cząsteczki)}$$

$$\text{polaryzacja} \quad \vec{P} = N\vec{p} = N(\varepsilon_0\alpha\vec{E}) = \varepsilon_0\chi\vec{E}$$

polarisability  
*polaryzowalność*

dielectric susceptibility  
*podatność dielektryczna*



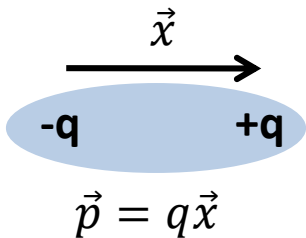
# Klasyczny model współczynnika załamania

## Fala w ośrodku wypełnionym oscylatorami (model Lorentza):

### Rozważamy

- przestrzeń wypełnioną oscylatorami o częstotliwości rezonansowej  $\omega_0$  i współczynniku tłumienia  $\gamma$ ;
- oscylatory mają masę  $m$ , ładunek  $q$
- są poruszane (wzbudzane) przez oscylujące pole elektryczne  $\vec{E}$ .

Szukamy:  
 $n^2 = \epsilon = 1 + \chi$



$$\text{Stąd } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

Polaryzacja  $\vec{P}(t) = N\vec{p}(t) = Nq\vec{x}(t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(t)$

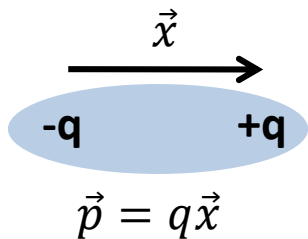
Wystarczy wyznaczyć  $\vec{x}(t)$

# Klasyczny model współczynnika załamania

## The Lorentz Oscillator model

We consider

- A space filled with oscillators of the resonant frequency  $\omega_0$  and damping factor  $\gamma$ ;
- Oscillators have a mass  $m$ , the charge  $q$
- They are moved by the oscillating electric field  $\vec{E}$ .



$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_0^2\vec{x} = \frac{q}{m}\vec{E}e^{i\omega t}$$

damping  
*tłumienie*

the elastic force  
*siła sprężysta*

driving force  
*siła wymuszająca*

the steady state solution:  
*stan ustalony:*

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{i\omega t}$$

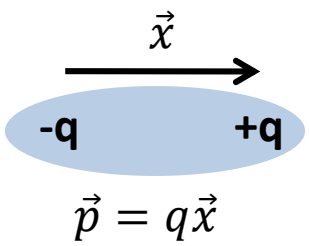
Szukamy:  
 $n^2 = \epsilon = 1 + \chi$

# Klasyczny model współczynnika załamania

## The Lorentz Oscillator model

### Rozważamy

- przestrzeń wypełnioną oscylatorami o częstotliwości rezonansowej  $\omega_0$  i współczynniku tłumienia  $\gamma$ ;
- oscylatory mają masę  $m$ , ładunek  $q$
- są poruszane (wzbudzone) przez oscylujące zewnętrzne  $\vec{E}$ .



Na ćwiczeniach

$$\frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_0^2 \vec{x} = \frac{q}{m} \vec{E} e^{i\omega t}$$

Szukamy:  
 $n^2 = \epsilon = 1 + \chi$

damping  
*tłumienie*

the elastic force  
*siła sprężysta*

driving force  
*siła wymuszająca*

the steady state solution:  
*stan ustalony:*

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{i\omega t}$$

# Klasyczny model współczynnika załamania

Fala w ośrodku (różnym)

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_0^2 \vec{x} = \frac{q}{m} \vec{E} e^{i\omega t} \quad \text{Lorentz model}$$

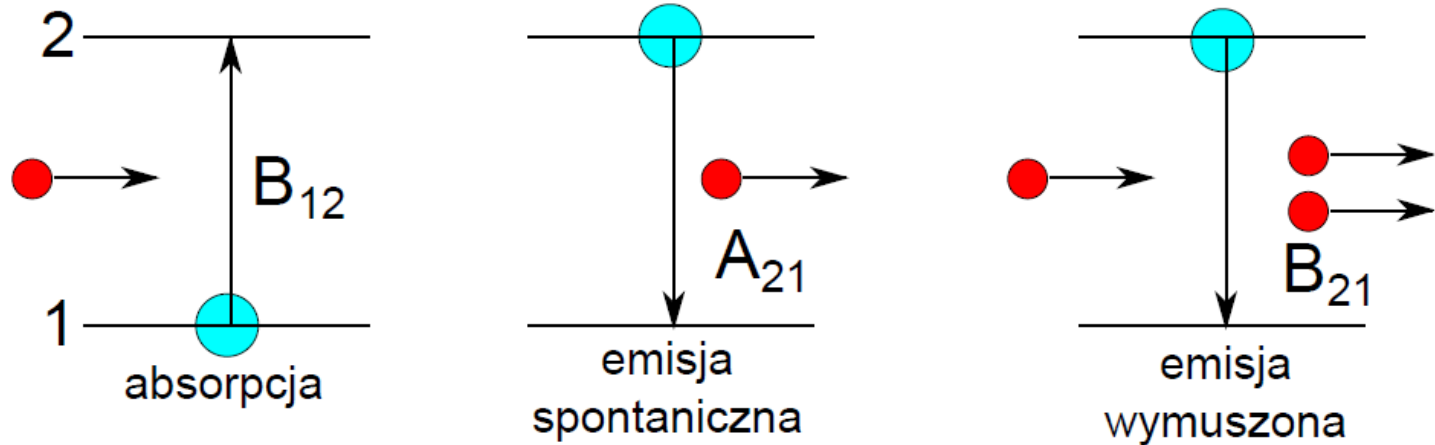
$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_0^2 \vec{x} = 0 \quad \text{Emission spectrum}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + 0 + 0 = \frac{q}{m} \vec{E} e^{i\omega t} \quad \text{Plasma waves}$$

the steady state solution:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{i\omega t}$$

# Absorpcja i emisja światła



Relacje między współczynnikami Einsteina:

$$B_{12} = B_{21}$$

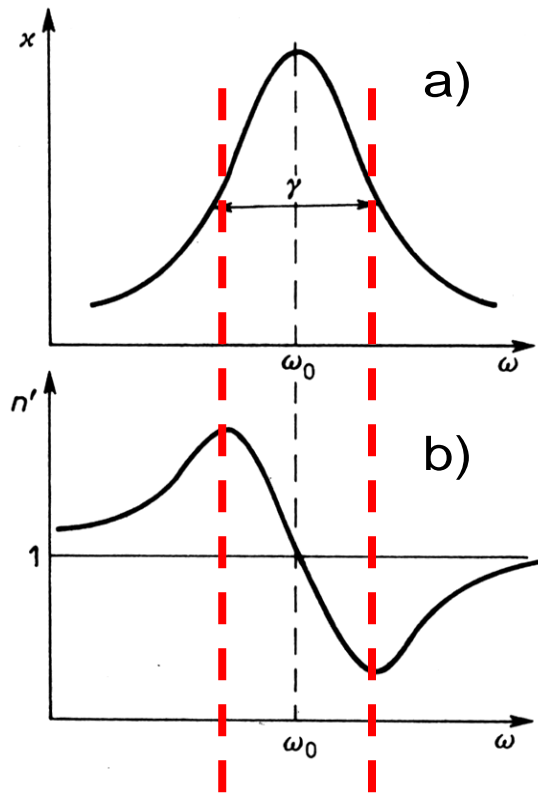
$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

*(Wyprowadzenie - na ćwiczeniach)*

# Klasyczny model współczynnika załamania

## The Lorentz Oscillator model

We obtain:



Kramers – Kronig dispersion relations

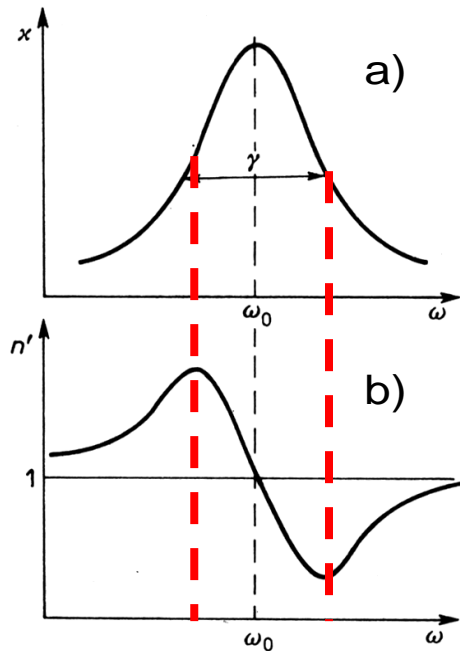
anomalous dispersion

$$\kappa = \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$n' = 1 + \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

# Klasyczny model współczynnika załamania

## Model oscylatorów Lorentza (ośrodek dyspersyjny)



- $n$  is the refractive index and indicates the phase velocity – real refractive index.
- Without absorption  $n' = n$ .
- the imaginary part  $\kappa$  is called the *extinction coefficient* and indicates absorption of the wave propagating through the material
- The quantity  $\frac{dn'}{d\omega}$  is called the *dispersion of the medium*

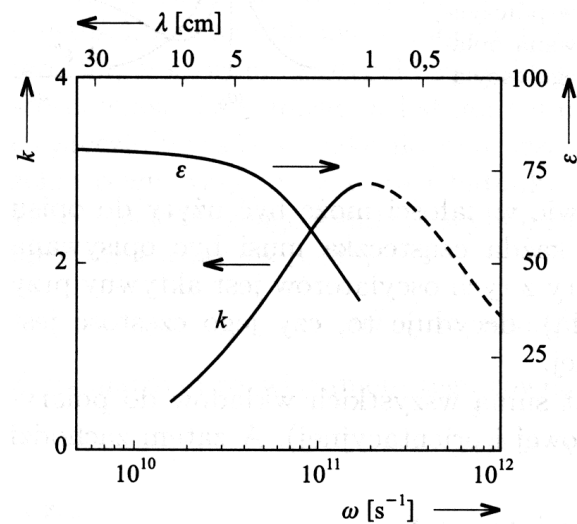
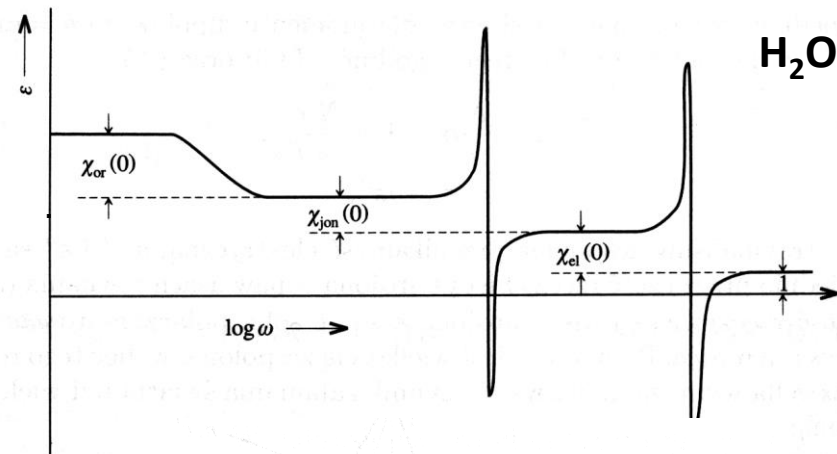
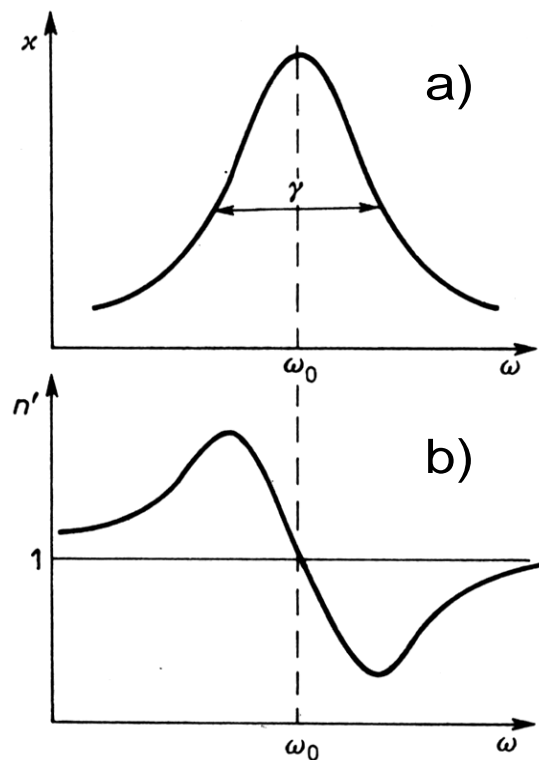
$$\frac{dn'}{d\omega}$$

- Poza rezonansem jest ona funkcją dodatnią - **dyspersja normalna**.
- Dla częstości bliskich częstości rezonansowej dyspersja ma znak ujemny - **dyspersja anomalna**.

# Klasyczny model współczynnika załamania

## Model oscylatorów Lorentza (ośrodek dyspersyjny)

Several resonances in the medium

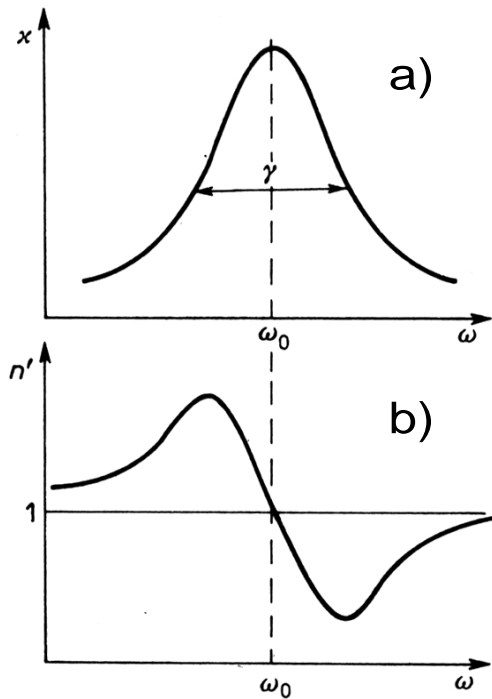




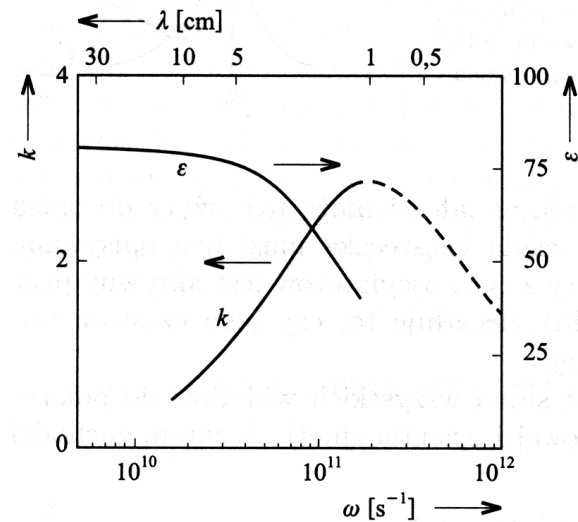
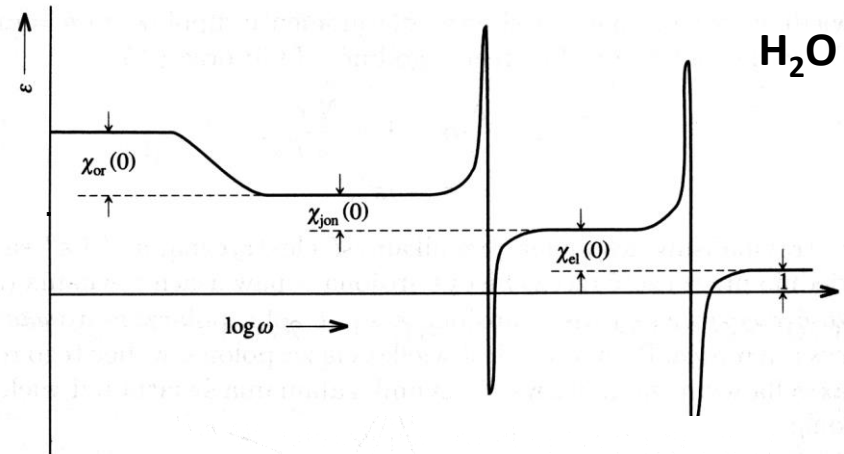
# Klasyczny model współczynnika załamania

## The Lorentz Oscillator model

Several resonances in the medium



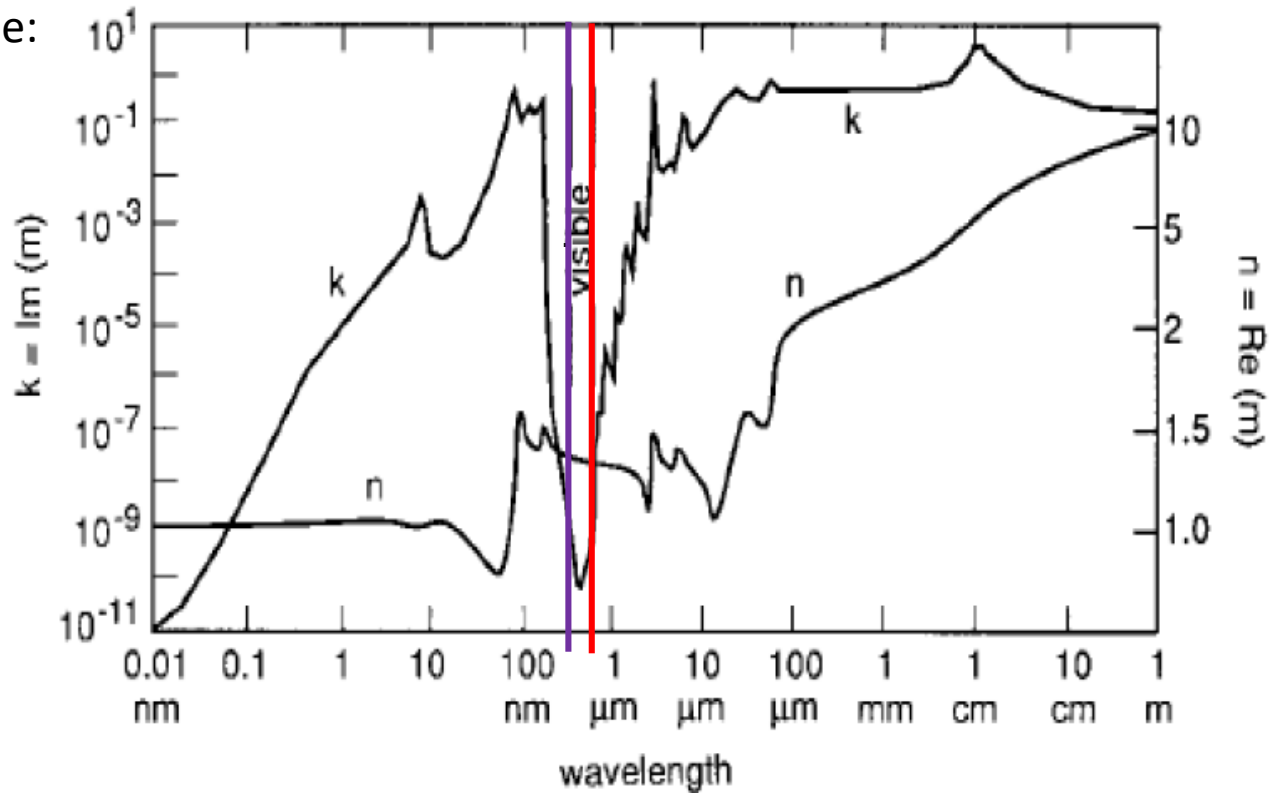
Dla jednej częstości oscylatora  $\omega_0$   
 $\varepsilon_L = 1$   
ale dla wielu jest to w przybliżeniu stała  
suma wkładów od pozostałych.



# Klasyczny model współczynnika załamania

## The Lorentz Oscillator model

Water example:



V. M. Zolotarev and A. V. Demin, "Optical Constants of Water over a Broad Range of Wavelengths, 0.1 Å–1 m," *Opt. Spectrosc. (U.S.S.R.)* **43**(2):157 (Aug. 1977).

# Klasyczny model współczynnika załamania

## The Lorentz Oscillator model

Water example

Roger W

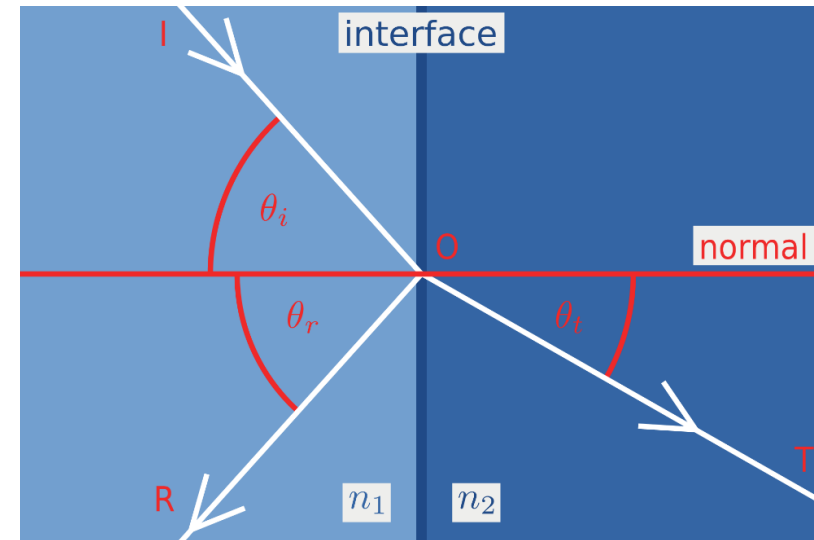


# Odbicie, transmisja, absorpcja

## Wzory Fresnela

$$\theta_i = \theta_r,$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$



$$R_p = \left| \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2} - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2} + n_2 \cos \theta_i} \right|^2.$$

*p*-like (parallel) or TM

$$R_s = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}} \right|^2.$$

*s*-like (from *senkrecht*, German for perpendicular) or TE.

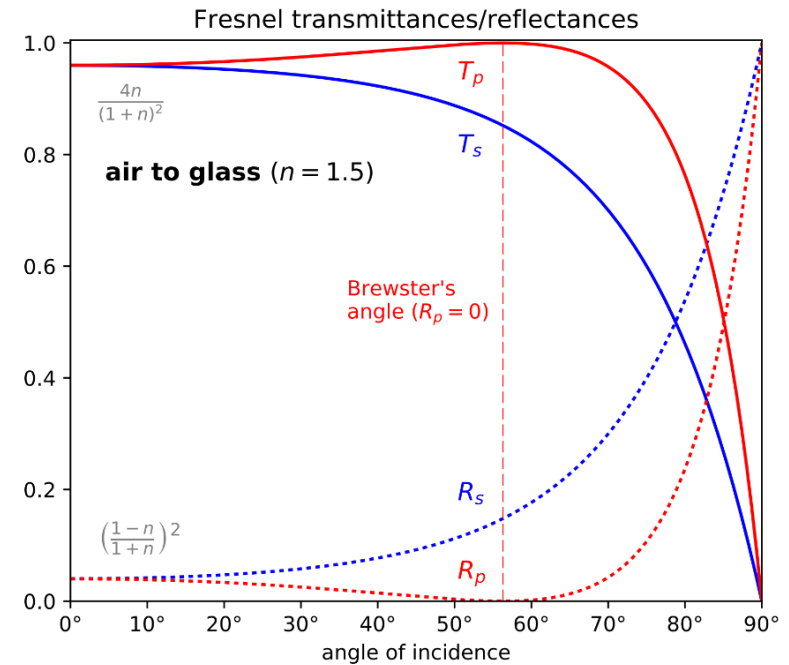
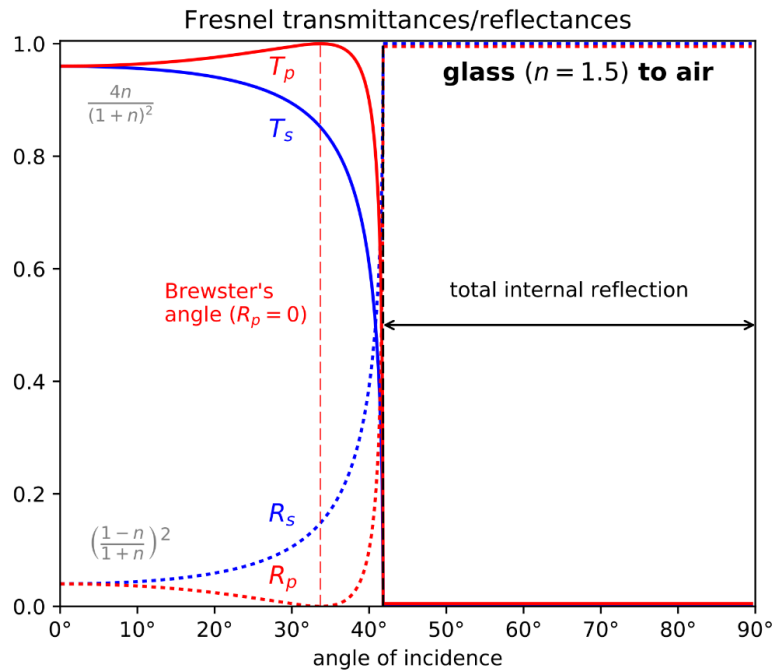
$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t},$$

$$t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t},$$

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t},$$

$$t_p = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}.$$

# Odbicie, transmisja, absorpcja



[https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_equations)