

# Wstęp do Optyki i Fizyki Materii Skondensowanej

## Część I: Optyka, wykład 6

wykład: Piotr Fita  
pokazy: Jacek Szczytko  
ćwiczenia: Aneta Drabińska, Paweł Kowalczyk,  
Barbara Piętka

Wydział Fizyki  
Uniwersytet Warszawski

2018/19

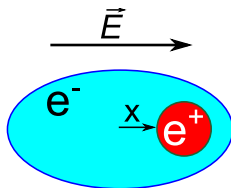
# Plan

- 1 Oscylatorowy model ośrodka
- 2 Półklasyczny model oddziaływania
- 3 Rozpraszanie

# Klasyczny model współczynnika załamania

## Oscylatorowy model ośrodka

- Opisujemy ośrodek przez zbiór klasycznych oscylatorów harmoniczných, o częstości własnej  $\omega_0$  i tłumieniu  $\gamma$
- Oscylatory są pobudzone do drgań polem elektrycznym fali elektromagnetycznej  $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$



- Równanie ruchu oscylatora z siłą wymuszającą:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_0 e^{i\omega t}$$

# Klasyczny model współczynnika załamania

## Rozwiązanie równania ruchu

- Rozwiązanie jest postaci

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t}$$

- z amplitudą zespoloną  $x_0$  zależną od  $\omega$ :

$$x_0 = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\gamma}$$

- Polaryzacja ośrodka o koncentracji atomów  $N$ :

$$\vec{P} = -Ne\vec{x}$$

- Polaryzacja ośrodka o podatności  $\chi$  zależy liniowo od pola  $E$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

# Klasyczny model współczynnika załamania

## Podatność dielektryczna

- Porównanie wyrażeń na  $\vec{P}$  pozwala wyznaczyć  $\chi$ :

$$\chi = -\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\gamma} = \chi' - i\chi''$$

- Część rzeczywista:

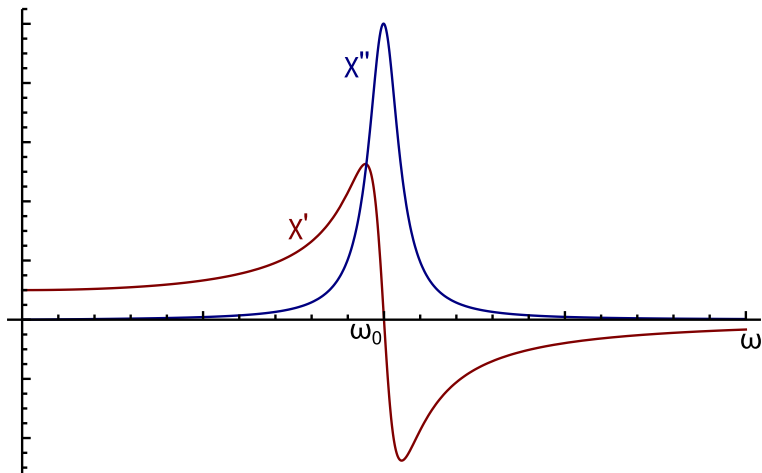
$$\chi' = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

- Część urojona:

$$\chi'' = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega\gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

# Klasyczny model współczynnika załamania

Zależność podatności od częstotliwości fali



# Klasyczny model współczynnika załamania

## Dyspersja i absorpcja

- Względna przenikalność dielektryczna ośrodka:

$$\epsilon = 1 + \chi' - i\chi''$$

- Współczynnik załamania:

$$n = \sqrt{\epsilon} = n' - i\kappa \approx 1 + \frac{\chi'}{2} - i\frac{\chi''}{2}$$

- Pole elektryczne fali w ośrodku:

$$E(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} = E_0 e^{i(\omega t - (n' - i\kappa)\frac{\omega}{c}x)} = E_0 e^{-\kappa\frac{\omega}{c}x} e^{i(\omega t - n'\frac{\omega}{c}x)}$$

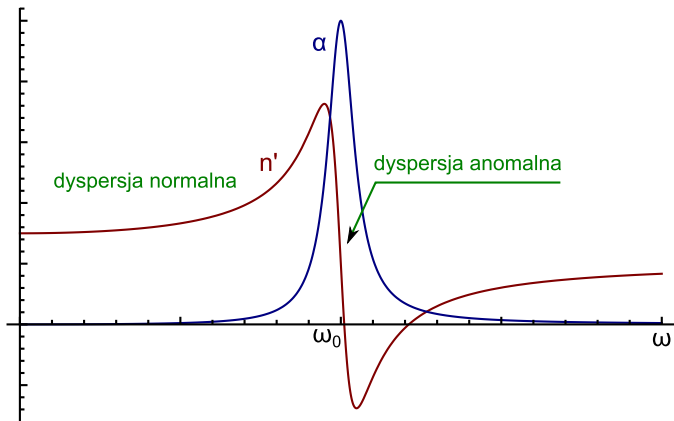
- Amplituda pola zanika wykładniczo - prawo Lamberta-Beera

$$E'_0(x) = E_0 e^{-\kappa\frac{\omega}{c}x} = E_0 e^{-\alpha x}$$

# Klasyczny model współczynnika załamania

## Dyspersja i absorpcja

- $n'$  - decyduje o prędkości fazowej światła w ośrodku (dyspersja)
- $\alpha$  - decyduje o tłumieniu (absorpcja)





# Fale elektromagnetyczne w plazmie

Ośrodek wypełniony ładunkami swobodnymi

Dla fali poprzecznej wynik możemy uzyskać przez podstawienie  $\gamma = 0$  i  $\omega_0 = 0$  w modelu oscylatorowym.

- Względna przenikalność dielektryczna dla ładunków w próżni:

$$\epsilon = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

- Względna przenikalność dielektryczna dla ładunków w ośrodku o przenikalności  $\epsilon_L$ :

$$\epsilon = \epsilon_L \left( 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 \epsilon_L m \omega^2} \right) = \epsilon_L \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

- Częstość plazmowa:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 \epsilon_L m}$$

# Współczynnik załamania plazmy

- Współczynnik załamania

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{\epsilon_L \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}$$

(dla  $\omega < \omega_p$   $n$  jest czysto urojone)

- Współczynnik odbicia (z wzorów Fresnela):

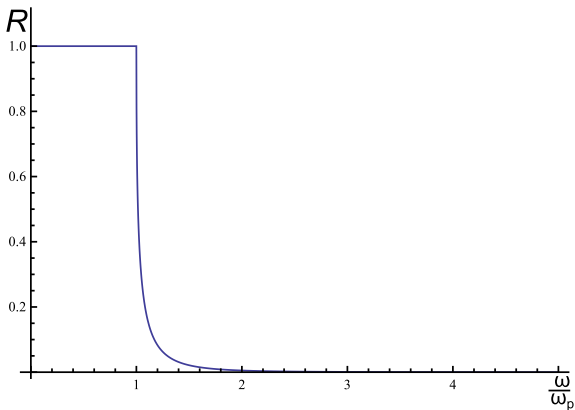
$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

(dla  $\omega < \omega_p$   $R = 1$ , fale nie wnikają do ośrodka)

# Współczynnik odbicia od plazmy

## Jonosfera

$$\epsilon_L = 1$$

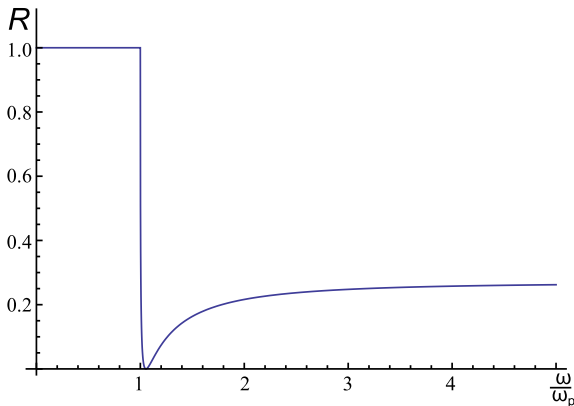


- Odbicie fal radiowych od jonosfery

# Współczynnik odbicia od plazmy

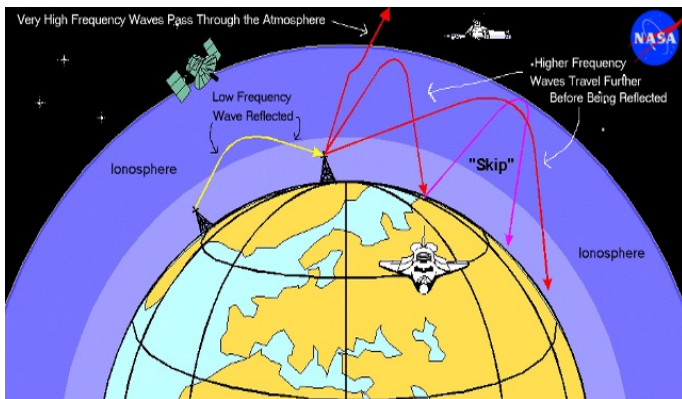
## Metale

$$\epsilon_L = 10$$



- Odbicie światła od metali

# Propagacja fal radiowych w atmosferze



(c) 2007 NASA -- Comical NASA diagram to illustrate ionospheric radiowave propagation

Neatly weaving in four kooky NASA fantasies -

- (i) Space Shuttle;
- (ii) International Space Station;
- (iii) the geostationary man-made satellite; and
- (iv) higher frequency radiowaves "pass through" the ionosphere - the Big Lie to prop up the satellite hoax!

# Półklasyczny model oddziaływania atomu ze światłem

## Opis fali E-M

- Falę elektromagnetyczną opisujemy klasycznie przez potencjał wektorowy  $\vec{A}$  i skalarny  $\phi$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- Hamiltonian atomu w polu fali E-M:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} + e\vec{A})^2 - e\phi + V$$

- Wybieramy cechowanie  $\phi = 0$  i  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , wtedy  $[\vec{p}, \vec{A}] = 0$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V + \frac{e}{m}\vec{p}\vec{A} + \frac{e^2 A^2}{2m}$$

# Półklasyczny model oddziaływania atomu ze światłem

## Zaburzenie wywołane falą E-M

- Przy małych natężeniach pola możemy pominąć wyraz kwadratowy:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V + \frac{e}{m} \vec{p} \vec{A} = H_0 + H'$$

- Hamiltonian zaburzenia wywołanego falą E-M:

$$H' = \frac{e}{m} \vec{p} \vec{A}$$

- Rozwiązania szukamy za pomocą rachunku zaburzeń zależnego od czasu

# Półklasyczny model oddziaływania atomu ze światłem

Rachunek zaburzeń zależny od czasu

- Rozpatrujemy dwa poziomy: dolny  $|1\rangle$  i górny  $|2\rangle$
- Funkcja falowa układu:

$$|\psi\rangle = a_1 e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} |1\rangle + a_2 e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} |2\rangle$$

- Słabe zaburzenie:  $a_1 \approx 1$
- Rachunek zaburzeń:

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \langle 2|H'|1\rangle e^{i\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

- Warunek początkowy:  $a_2(t=0) = 0$
- Całkowanie, przybliżenia...



# Półklasyczny model oddziaływania atomu ze światłem

## Przejścia w atomie dwupoziomowym

- Prawdopodobieństwo przejścia atomu ze stanu podstawowego  $|1\rangle$  do stanu wzbudzonego  $|2\rangle$  (współczynnik Einsteina  $B_{12}$ ) dla atomu dwupoziomowego:

$$B_{12} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2} |\vec{d}_{12}|^2$$

- $\vec{d}_{12}$  – dipolowy moment przejścia:

$$\vec{d}_{12} = \langle 2 | e\vec{r} | 1 \rangle$$

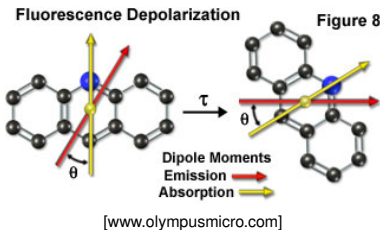
- Z relacji pomiędzy współczynnikami Einsteina:

$$A_{21} = \frac{\omega^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} |\vec{d}_{12}|^2$$

# Moment dipolowy przejścia

- Moment dipolowy przejścia decyduje o prawdopodobieństwie oddziaływania
- Dla światła spolaryzowanego prawdopodobieństwo absorpcji zależy od kierunku pomiędzy kierunkiem polaryzacji światła i kierunkiem momentu dipolowego:

$$p_a \sim |\vec{E} \cdot \vec{d}|^2$$

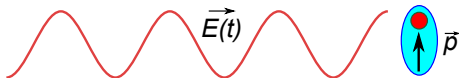


- Prawdopodobieństwo emisji spontanicznej rośnie z  $\omega^3$

# Rozpraszanie Rayleigha

## Promieniowanie wzbudzonego dipola

- Cząstki rozpraszające są dużo mniejsze od długości fali
- W cząstkach indukowany jest elektryczny moment dipolowy  $\vec{p}$



$$\vec{p} = a\vec{E} = a\vec{E}_0 \sin \omega t = \vec{p}_0 \sin \omega t$$

- Oscylujący dipol promieniuje fale E-M. Wektor Poyntinga:

$$S = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \left( \frac{d^2 p}{dt^2} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

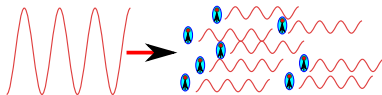
- Po wstawieniu  $p$  i uśrednieniu:

$$\langle S \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

# Rozpraszanie Rayleigha

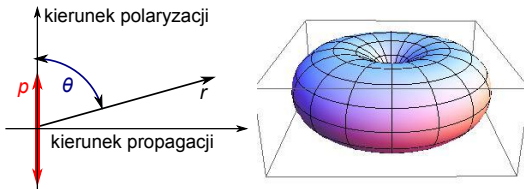
## Rozpraszanie w ośrodku

- Promieniowanie wielu dipoli jest niespójne – dodajemy natężenia



- Natężenie światła rozproszonego zależy od kąta  $\theta$  pomiędzy **kierunkiem polaryzacji światła** a **kierunkiem obserwacji**:

$$I \sim \omega^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

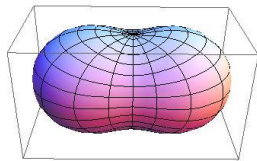
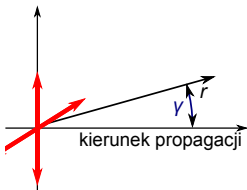


# Rozpraszanie Rayleigha

## Światło niespolaryzowane

- Światło niespolaryzowane rozkładamy na dwie składowe o prostopadłej polaryzacji - np. poziomą i pionową
- Dodajemy rozkłady kątowe promieniowania dla każdej z dwóch polaryzacji
- Wynik zależy od kąta  $\gamma$  **między kierunkiem propagacji a kierunkiem obserwacji:**

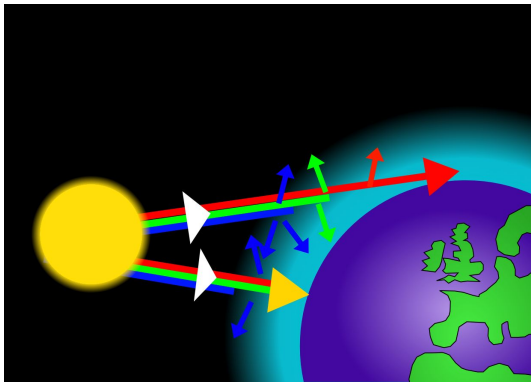
$$I \sim \omega^4 \frac{1 + \cos^2 \gamma}{r^2}$$



# Rozpraszanie w atmosferze

## Kolor nieba

Rozpraszanie Rayleigha na fluktuacjach gęstości w atmosferze jest odpowiedzialne za niebieski kolor nieba i czerwony kolor zachodzącego słońca (wydajność rozpraszania rośnie jak  $\omega^4$ )



[www.daveansell.co.uk]

# Rozpraszanie w atmosferze

## Polaryzacja nieba

Światło nieba jest częściowo spolaryzowane, można je więc osłabić za pomocą polaryzatora



[forums.steves-digicams.com]

# Rozpraszanie Mie

## Duże cząstki

- Dla cząstek porównywalnych z długością fali lub większych trzeba spójnie zsumować wkłady do światła rozproszonego pochodzące od całej objętości (powierzchni) cząstek
- Rozpraszanie Mie słabo zależy od długości fali (chmury są białe!)
- Im większe cząstki tym silniej światło jest rozpraszane do przodu

