artykuł ukazał się w magazynie Delta nr 4 (347) 2003

O unoszeniu się ciał na wodzie

Andrzej Hryczuk, Robert Żak

Już w starożytności stwierdzono, że ciała gęstsze od wody, umieszczone na jej powierzchni, toną. Któż z nas nie widział jednak pływającej igły, monety lub nartnika?

W poniższym tekście chcielibyśmy zająć się statyką pływających ciał, a konkretnie lekkiej, niezwilżalnej karty, o gęstości większej od gęstości wody. Zaczniemy od przedstawienia doświadczenia, które pozwoli nam uzmysłowić sobie kilka wiążących się, a przede wszystkim interesujących w tym zagadnieniu zjawisk. Naczynie z wodą umieszczamy na rzutniku pisma, następnie delikatnie kładziemy na powierzchni wody kartę (w naszym przypadku o wymiarach w milimetrach 86,5 × 53,5 × 0,8 i masie 4,95 *g*, a więc o gęstości ρ około 1,34 g/cm^3). Mimo że gęstość karty jest większa od gęstości wody, to nie tonie ona, ze względu na istnienie dobrze znanych sił napięcia powierzchniowego. Na ekranie zobaczymy cień karty otoczony ciemną obwódką (zdjęcie 2c), spowodowaną meniskiem tworzącym się dookoła karty (rysunek 3). Będziemy teraz stopniowo dociążać kartę, mierząc szerokość obwódki.

Zastanówmy się, jakich wyników należałoby się spodziewać. Szerokość obwódki zależy od krzywizny menisku. Mierzenie tej szerokości pozwala na kontrolowanie zmiany kształtu menisku. Wydawałoby się, że krzywizna menisku, a więc i szerokość obwódki, powinny rosnąć wraz z masą karty, aż do momentu, w którym karta osiągnie masę graniczną, przy której utonie. Okazuje się, że jest inaczej!

Wyniki naszych pomiarów przedstawione są na wykresie (rysunek 4). Widzimy, że istotnie punkty doświadczalne układają się w pewną rosnącą zależność, jednakże po osiągnięciu maksimum (dla masy 11,9 *g*) obserwowana szerokość menisku zaczyna maleć. Dlaczego tak się dzieje? Czyżby, od pewnego momentu, krzywizna menisku rzeczywiście się zmniejszała? Wydaje się to niemożliwe... i tak jest w istocie!

Pozorne zmniejszanie się krzywizny menisku jest spowodowane specyfiką układu pomiarowego. Uzyskany wynik implikuje istnienie sytuacji przedstawionej na rysunku 5. Od pewnego momentu obserwujemy nie cały menisk, ale jedynie jego część nie zasłanianą przez kartę. Powstawanie takiej sytuacji jest faktem zaskakującym, a przez to interesującym.

Zastanówmy się, jakie można stąd wyciągnąć wnioski ilościowe. Rozpatrzmy kartę znajdującą się w położeniu przedstawionym na rysunku 3. Powszechnie wiadomo, że ciśnienie pod powierzchnią wody zależy od głębokości i opisane jest wzorem

$$p_1(y)=p_0+\rho g y \,,$$

gdzie p_0 jest ciśnieniem atmosferycznym, ρ gęstością wody, a y głębokością. Natomiast do ciśnienia zewnętrznego musimy dodać dodatkowe ciśnienie wynikające z napięcia powierzchniowego:

$$\Delta p(y)=\sigma K(y) \,,$$

gdzie σ jest współczynnikiem napięcia powierzchniowego, a $K(y)$ krzywizną (parametrem opisującym "wygięcie" powierzchni w danym punkcie). Tak więc całkowite ciśnienie zewnętrzne wyniesie

$$p_2(y)=p_0+\sigma K(y) \,.$$

Układ jest w równowadze, więc ciśnienie zewnętrzne musi być równe ciśnieniu wewnętrznemu, co prowadzi do warunku:

$$\rho g y = \sigma K(y) .$$

W ten sposób znaleźliśmy związek między głębokością, a krzywizną menisku na tej głębokości. Zastąpienie krzywizny funkcją pokazanego na rysunku 3 kąta φ nie jest trudne, ale wymaga rozwiązania równania różniczkowego. Nie wgłębiając się w przekształcenia matematyczne, podajemy od razu wynik:

$$y = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) .$$

Jak widać, maksymalne zanurzenie otrzymujemy dla $\varphi = \pi$. Przy większym obciążeniu karta musi zatonąć.

Korzystając z prawa Archimedesa, definicji siły napięcia powierzchniowego i warunku równowagi sił, możemy w prosty sposób otrzymać zależność zanurzenia karty y od jej całkowitej masy m (w sytuacji odpowiadającej rysunkowi 5):

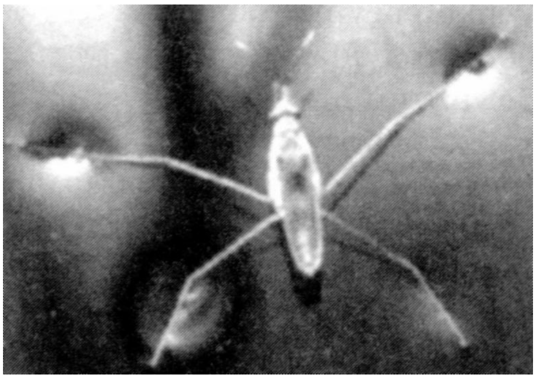
$$\begin{array}{ccccc} F_w & + & F_n & = & F_g \\ ab(y+c)\rho & + & 2(a+b)\sigma \sin(\varphi(y)) & = & mg \end{array}$$

F_w , F_n i F_g są, odpowiednio, siłami wyporu, napięcia powierzchniowego i grawitacji, natomiast a , b , c to wymiary karty.

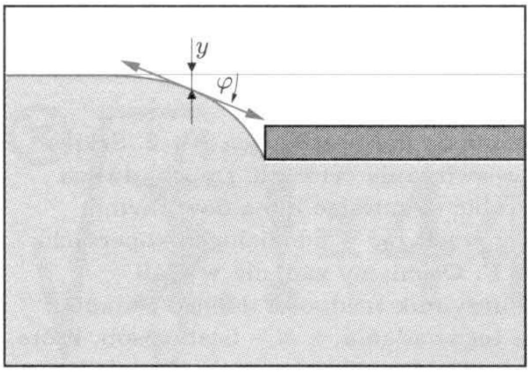
Porównajmy teraz oczekiwane i zmierzone wartości całkowitej masy karty. Maksymalnej szerokości cienia menisku oczekujemy dla $\varphi = \pi/2$, a zatonięcia karty dla $\varphi = \pi$. W doświadczeniu uzyskaliśmy, odpowiednio: 11,9 *g* oraz 14,2 *g*, natomiast po wstawieniu danych liczbowych do powyższego wzoru (napięcie powierzchniowe wody wynosi $\sigma = 0{,}072\ N/m^2$) otrzymujemy wartości 14,4 *g* oraz 16,3 *g*. Uzyskaliśmy zgodność (lub jak kto woli - niezgodność) na poziomie 15%.

Spróbujmy odnaleźć podstawowe źródła tej niezgodności. Po pierwsze, oczywiste jest, że jasność cienia wywołanego krzywizną zmienia się w sposób ciągły, a my obieraliśmy pewien punkt, do którego mierzyliśmy szerokość cienia. Po drugie, pominęliśmy dokładne rozpatrzenie kształtu menisku w rogach karty. Ponadto dotychczas milcząco zakładaliśmy, ze karta obciążana jest równomiernie, co nie do końca zgadza się z rzeczywistością. Karta ulega niewielkiemu przechyleniu, co sprawia, że może ona zatonąć, zanim spełniony będzie warunek $\varphi = \pi$. Wreszcie dociążanie karty w przypadku bliskim masie granicznej nastręcza duże trudności, gdyż niewielkie nawet zachwianie stabilności karty powoduje jej zatonięcie. Ze względu na dwa ostatnie aspekty oczekiwalibyśmy, że karta będzie tonąć przed osiągnięciem obciążenia maksymalnego z punktu widzenia teorii. Jeżeli chodzi natomiast o punkt odpowiadający $\varphi = \pi/2$, to główny błąd może wiązać się z przechodzeniem punktu styku karty z wodą z dolnej (rysunek 3) na górną (rysunek 5) powierzchnię karty. Zważywszy na powyższe czynniki, zgodność teorii z doświadczeniem możemy uznać za satysfakcjonującą.

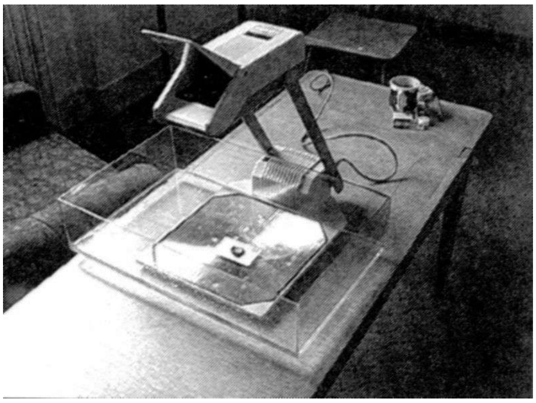
Na zakończenie chcielibyśmy podkreślić pewien, naszym zdaniem, zaskakujący fakt. Na początku stwierdziliśmy, że niektóre małe obiekty (jak nasza karta) położone na wodzie nic toną, ze względu na istnienie sił napięcia powierzchniowego. Jest to oczywiście prawdą. Jednakże nie wystarczy uwzględnić wypadkową sił napięcia powierzchniowego. Po odrobinę bliższym przyjrzeniu się naszej teorii widzimy, iż tak naprawdę silą ta przy maksymalnym zanurzeniu dąży do zera! Na czym więc zasadza się rola napięcia powierzchniowego? Sprawia ono, że powierzchnia wody nie zostaje przerwana, choć karta znajduje się dobre kilka milimetrów poniżej poziomu otaczającej ją wody.



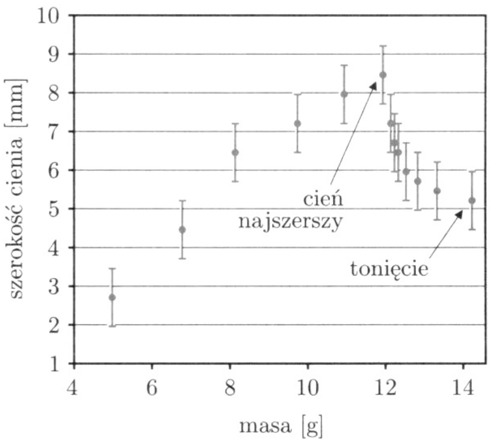
Rys. 1. Nartnik (*nartnikowate Gerridae, poślizgowate Hydrometridae*). Foto: Internet



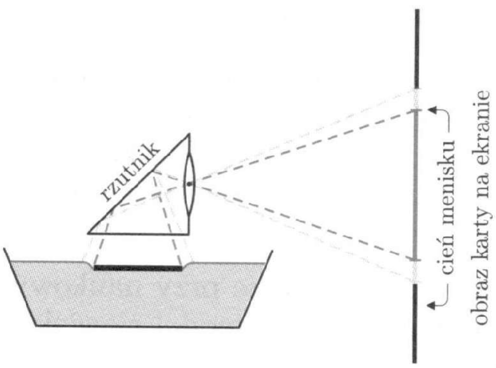
Rys. 3. Utrzymująca się na wodzie karta.



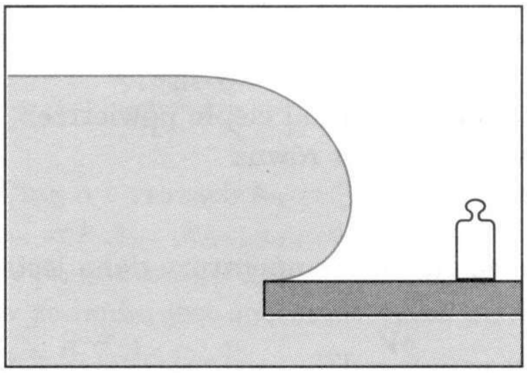
Rys. 2a. Zdjęcie układu doświadczalnego.



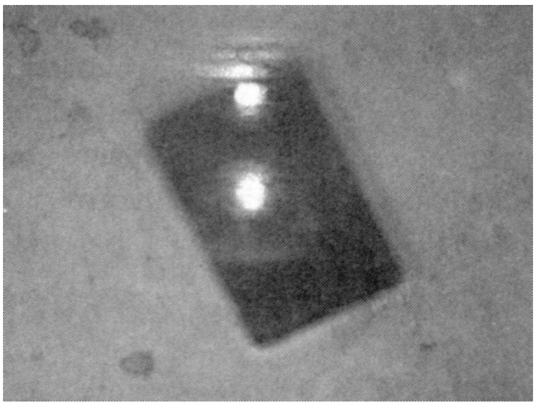
Rys. 4. Zależność szerokości cienia od całkowitej masy karty.



Rys. 2b. Schemat układu doświadczalnego.



Rys. 5. Utrzymująca się na wodzie, maksymalnie obciążona karta.



Rys. 2c. Widok karty na ekranie