Zadania do wykładu Współczesnej mechaniki teoretycznej. Seria 11.

Zadanie 1.
Dane są dwa punkty: $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$. Znaleźć kształt łaczącej je krzywej takiej, że powierzchnia powstała przez obrót wokół osi x ma najmniejszą powierzchnię.

Zadanie 2.
Po jakiej krzywej płaskiej musi zsuwać się (w jednorodnym polu grawitacyjnym $\mathbf{g} = -g\mathbf{i}_y$) cząstka materialna startująca z punktu $(x = 0, y = h)$ by w jak najkrótszym czasie dojść do pionowej prostej $x = b$?

Zadanie 3.
Znaleźć najkrótszą krzywą leżącą na powierzchni bocznej walca o promieniu podstawy R i łączącą punkty $A = (0, R, 0)$ oraz $B = (R, 0, h)$.

Zadanie dodatkowe. Znaleźć równanie geodetyki, tzn. najkrótszej krzywej łączącej dwa zadane punkty, na sferze o promieniu R.
Wskazówka: Użyć współrzędnych sferycznych i szukać rozwiązania w postaci funkcji $\phi = \phi(\theta)$. W otrzymanym na końcu (dość zawikłanym) równaniu przejść do współrzędnych kartezjańskich i zauważyć, że punkty spełniające to równanie leżą na płaszczyźnie o równaniu $ax + by + cz = 0$ (czyli przechodzącej przez środek układu współrzędnych).

Zadanie dodatkowe. Cząstka materialna porusza się po płaszczyźnie xy z prędkością $\mathbf{v}$, której długość jest zadaną funkcją czasu: $|\mathbf{v}| = v(t)$. W czasie $(0, t_0)$ cząstka zakreśla krzywą zamkniętą. Jaka jest to krzywa jeśli obszar przez nią obejmowany ma mieć maksymalne pole powierzchni?
Wskazówka: Trzeba przekształcić wzór na pole powierzchni $S = \int_S dxdy$ w całkę po konturze, co można osiągnąć korzystając z $\int_S \mathbf{d}\sigma \cdot \mathrm{rot}\mathbf{A} = \oint_\Gamma \mathbf{dl} \cdot \mathbf{A}$; Dla pola powierzchni rot$\mathbf{A}$ musi być stałym wektorem o długości jednostkowej prostopadłym do płaszczyzny xy. Rozpatrzyć następnie pole powierzchni jako funkcjonał $S = \oint_\Gamma (A_x(x, y)dx + A_y(x, y)dy)$ dwu funkcji czasu $x = x(t)$, $y = y(t)$ narzucając jako więzy warunek na prędkość: $g(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - v^2(t) = 0$.

Z. Ajduk
P. Chankowski
K. Rejmer