Zadania domowe ze współczesnej mechaniki teoretycznej, seria 6

1) Punkt materialny o masie m porusza się po przecięciu gładkiej sfery o promieniu a z gładką, poziomą płaszczyzną poruszającą się zgodnie z zależnością $z = a \sin \omega t$, w jednorodnym polu grawitacyjnym $\vec{g} = g\,\vec{e}_z$. Napisać równania Lagrange'a I-go rodzaju i rozwiązać je. Znaleźć siły reakcji więzów.

2) Punktowa cząstka o masie m i ładunku q porusza się w polu magnetycznym monopola magnetycznego $\vec{B} = \frac{A}{r^2}\vec{e}_r$. Napisać lagranżjan układu we współrzędnych sferycznych. Znaleźć równania ruchu i równanie toru cząstki. **Wskazówki**: sprawdzić (we współrzędnych sferycznych), że równanie $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ jest w tym przypadku spełnione przez potencjał wektorowy $A_r = A_\theta = 0$, $A_\varphi = \frac{f(\theta)}{r}$, znaleźć funkcję f. Wykorzystać całkę ruchu związaną z momentem pędu i pokazać, że tor cząstki leży na powierzchni stożka.

3) Punkt materialny porusza się wzdłuż gładkiego pręta, dolnym końcem zamocowanego w początku układu współrzędnych i odchylonego od osi z 0 kąt $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Pręt obraca się wokół osi z ze stałą prędkością kątową ω. Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjmym $\vec{g} = g\,\vec{e}_z$. Napisać lagranżjan i równania Lagrange'a dla tego układu. Zbadać ruch punktu. Wykorzystać całkę energii.

Zygmunt Ajduk, Piotr Chankowski, Krzysztof Rejmer