Zadania do wykładu Współczesnej mechaniki teoretycznej. Seria 8.

Zadanie 1. Punkt materialny o masie m porusza się w ziemskim polu grawitacyjnym po paraboloidzie obrotowej o równaniu $z = r^2/4a$ (we współrzędnych walcowych). Wypisać lagranżjan oraz równania ruchu, a następnie znaleźć względne (tzn. dotyczące tylko ruchu radialnego) położenia równowagi. Wykorzystując następnie oczywistą całkę ruchu sprowadzić rozwiązanie do kwadratur i znaleźć ruch w przybliżeniu małych drgań wokół (względnego) położenia równowagi.

Zadanie 2. Napisać w dogodnych współrzędnych uogólnionych lagranżjan układu składającego się z trzech identycznych sprężyn o długościach swobodnych d i współczynnikach sprężystości k oraz dwu identycznych kulek o masach m. Dwie ze sprężyn wraz z zaczepionymi na końcu każdej z nich kulkami są swymi wolnymi końcami zamocowane w wierzchołku zrobionego z gładkich prętów kąta $\pi/3$ i ślizgają się po jego ramionach. Trzecia sprężyna łączy ze sobą obie kulki. Znaleźć częstości i mody własne małych drgań takiego układu. (Pole grawitacyjne tu nie występuje.)

Zadanie 3. Na okręgu o promieniu R nawleczone są trzy jednakowe sprężyny o współczynnikach sprężystości k i długościach swobodnych $2\pi/3$. Sprężyny te łączą ze sobą trzy kulki mogące ślizgać się bez tarcia po okręgu. Dwie z kulek mają masy m, a trzecia ma masę $2m$. Znaleźć częstości i mody własne drgań tego układu. Podać przykład warunków początkowych wzbudzających tylko mod drgań o najniższej częstości.

Zadanie nadobowiązkowe. Ciężarek o masie $3m$ ślizga się w płaszczyźnie pionowej bez tarcia po paraboli opisanej równaniem $z = x^2/2d$. Do ciężarka przymocowany jest nieważki pręt o długości d, na którego końcu umieszczona jest masa m. Układ jest płaski, uwzględniamy tylko jedorodne pole grawitacyjne skierowane w dół wzdłuż osi z. Znaleźć częstości i mody własne małych drgań tego układu wokół położenia równowagi trwałej. Podać postać rozwiązania gdy w chwili $t = 0$ oba ciężarki spoczywają, a pręt wychylony jest o kąt α_0.

Uwaga: Kolokwium poprawkowe: piątek 25 kwietnia.

Z. Ajduk
P. Chankowski
K. Rejmer