Specjalne geometrie riemannowskie w wymiarach 5, 8, 14 i 26

Paweł Nurowski

Sympozjum Instytutu Fizyki Teoretycznej

Uniwersytet Warszawski

Warszawa, Grudzień 2005

Teoria względności

Teoria względności

- STW: arena zjawisk fizycznych: $\mathbb{R}^4$ wyposażone w płaską metrykę $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ o sygnaturze lorentzowskiej.

Teoria względności

- STW: arena zjawisk fizycznych: $\mathbb{R}^4$ wyposażone w płaską metrykę $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ o sygnaturze lorentzowskiej.

- OTW: arena zjawisk fizycznych: 4-ro wymiarowa rozmaitość M wyposażona w metrykę g_L o sygnaturze lorentzowskiej; wymaga się by g_L spełniała równania Einsteina.

Teoria względności

- STW: arena zjawisk fizycznych: $\mathbb{R}^4$ wyposażone w płaską metrykę $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ o sygnaturze lorentzowskiej.

- OTW: arena zjawisk fizycznych: 4-ro wymiarowa rozmaitość M wyposażona w metrykę g_L o sygnaturze lorentzowskiej; wymaga się by g_L spełniała równania Einsteina.

- TW(teorie wszystkiego): konieczność uwzględnienia innych odziaływań niż grawitacyjne, prowadzi do obiektów wielowymiarowych, takich jak *struny, membrany, etc* i zmusza do dołączenia dodatkowych wymiarów do każdego punktu czasoprzestrzeni M.

Schemat Kaluzy-Kleina

Schemat Kaluzy-Kleina

- arena zjawisk fizycznych: wiązka P nad czasoprzestrzenią (M, g_L), z włóknami będącymi *zwartymi* rozmaitościami X; wymiar tych rozmaitości zależy od modelu

Schemat Kaluzy-Kleina

- arena zjawisk fizycznych: wiązka P nad czasoprzestrzenią (M, g_L), z włóknami będącymi *zwartymi* rozmaitościami X; wymiar tych rozmaitości zależy od modelu

- włókna X są wyposażone w metrykę *riemannowską* g

Schemat Kaluzy-Kleina

- arena zjawisk fizycznych: wiązka P nad czasoprzestrzenią (M, g_L), z włóknami będącymi *zwartymi* rozmaitościami X; wymiar tych rozmaitości zależy od modelu
- włókna X są wyposażone w metrykę *riemannowską* g
- wymaga się, aby rozmaitości riemannowskie (X, g) posiadały dodatkową strukturę, która zależy od modelu

Przykład: Teoria strun Typ II B

Przykład: Teoria strun Typ II B

- rozmaitości riemannowskie (X, g), oprócz koneksji Levi-Civity ∇^{LC}, są dodatkowo wyposażone w:
  - ⋆ $\mathit{metryczną}$ koneksję ∇^T z $\mathit{torsją}$ T_{ijk}, która jest całkowicie $\mathit{antysymetryczna}$
  - ⋆ nietrywialne pole spinorowe Ψ $\mathit{kowariantnie\ stałe}$ względem koneksji ∇^T

Przykład: Teoria strun Typ II B

- rozmaitości riemannowskie (X,g), oprócz koneksji Levi-Civity ∇^{LC}, są dodatkowo wyposażone w:
  - ⋆ $metryczną$ koneksję ∇^T z $torsją$ T_{ijk}, która jest całkowicie $antysymetryczna$
  - ⋆ nietrywialne pole spinorowe Ψ $kowariantnie$ $stałe$ względem koneksji ∇^T

- $specjalna$ struktura riemannowska $(X, g, \nabla^T, T, \Psi)$ spełnia między innymi równania:

$$\nabla^T \Psi = 0, \quad \delta(T) = 0, \quad T \cdot \Psi = \mu \Psi.$$

Przykład: Teoria strun Typ II B

- rozmaitości riemannowskie (X, g), oprócz koneksji Levi-Civity ∇^{LC}, są dodatkowo wyposażone w:
  - $\star$ *metryczną* koneksję ∇^T z *torsją* T_{ijk}, która jest całkowicie *antysymetryczna*
  - $\star$ nietrywialne pole spinorowe Ψ *kowariantnie stałe* względem koneksji ∇^T

- *specjalna* struktura riemannowska $(X, g, \nabla^T, T, \Psi)$ spełnia między innymi równania:

$$\nabla^T \Psi = 0, \quad \delta(T) = 0, \quad T \cdot \Psi = \mu \Psi.$$

Istnienie kowariantnie stałego spinora ze względu na metryczną koneksję z torsją jest ogólną cechą takich modeli.

Rozmaitości (X, g) ze zredukowaną grupą holonomii

Rozmaitości (X, g) ze zredukowaną grupą holonomii

- Gdyby spinor Ψ był kowariantnie stały względem koneksji Levi-Civity ∇^{LC}, wtedy *grupa holonomii* dla (X, g) musiałaby być *zredukowana.*

Rozmaitości (X, g) ze zredukowaną grupą holonomii

- Gdyby spinor Ψ był kowariantnie stały względem koneksji Levi-Civity ∇^{LC}, wtedy *grupa holonomii* dla (X, g) musiałaby być *zredukowana*.

- Koneksja LC miałaby wartości w algebrze Liego $\mathfrak{h}$ grupy holonomii $H \subset \mathbf{SO}(g)$.

Rozmaitości (X, g) ze zredukowaną grupą holonomii

- Gdyby spinor Ψ był kowariantnie stały względem koneksji Levi-Civity ∇^{LC}, wtedy *grupa holonomii* dla (X, g) musiałaby być *zredukowana.*

- Koneksja LC miałaby wartości w algebrze Liego $\mathfrak{h}$ grupy holonomii $H \subset \mathbf{SO}(g)$.

- *Nieredukowalne* struktury riemannowskie (X, g) ze zredukowaną grupą holonomii są sklasyfikowane (Berger).

Rozmaitości (X, g) ze zredukowaną grupą holonomii

- Gdyby spinor Ψ był kowariantnie stały względem koneksji Levi-Civity ∇^{LC}, wtedy *grupa holonomii* dla (X, g) musiałaby być *zredukowana*.

- Koneksja LC miałaby wartości w algebrze Liego $\mathfrak{h}$ grupy holonomii $H \subset \mathbf{SO}(g)$.

- *Nieredukowalne* struktury riemannowskie (X, g) ze zredukowaną grupą holonomii są sklasyfikowane (Berger).

- Albo są to *przestrzenie symetryczne* G/H, z $H \subset \mathbf{SO}(n)$ grupą holonomii, albo znajdują się na *liście Bergera*:

Lista Bergera

Lista Bergera

Grupa holonomii g	Wymiar X	Typ X	Uwagi
$\mathbf{SO}(n)$	n	generic	
$\mathbf{U}(n)$	$2n,\ n \geq 2$	Kähler manifold	Kähler
$\mathbf{SU}(n)$	$2n,\ n \geq 2$	Calabi-Yau manifold	Ricci-flat,Kähler
$\mathbf{Sp}(n) \cdot \mathbf{Sp}(1)$	$4n,\ n \geq 2$	quaternionic Kähler	Einstein
$\mathbf{Sp}(n)$	$4n,\ n \geq 2$	hyperkähler manifold	Ricci-flat,Kähler
$\mathbf{G}_2$	7	$\mathbf{G}_2$ manifold	Ricci-flat
$\mathbf{Spin}(7)$	8	$\mathbf{Spin}(7)$ manifold	Ricci-flat

Specjalne geometrie typu $(X, g, \nabla^T, T, \Psi)$

Specjalne geometrie typu $(X, g, \nabla^T, T, \Psi)$

- Geometrie (X, g) z listy Bergera mają spinor Ψ kowariantnie stały ze wzgledu na koneksję Levi-Civity

Specjalne geometrie typu $(X, g, \nabla^T, T, \Psi)$

- Geometrie (X, g) z listy Bergera mają spinor Ψ kowariantnie stały ze wzgledu na koneksję Levi-Civity
- Dla nich: $\nabla^T \equiv \nabla^{LC}$, więc $T \equiv 0$.

Specjalne geometrie typu $(X, g, \nabla^T, T, \Psi)$

- Geometrie (X, g) z listy Bergera mają spinor Ψ kowariantnie stały ze wzgledu na koneksję Levi-Civity
- Dla nich: $\nabla^T \equiv \nabla^{LC}$, więc $T \equiv 0$.
- Przez to nie są one specjalnie interesujące dla TW.

Jak tworzyć geometrie typu $(X, g, \nabla^T, T, \Psi)$ z $T \neq 0$?

Jak tworzyć geometrie typu $(X, g, \nabla^T, T, \Psi)$ z $T \neq 0$?

- Niech Υ będzie obiektem (np. tensorem), który jest zachowywany przez podgrupę $H \subset \mathbf{SO}(n)$. Oprócz włożenia H w $\mathbf{SO}(n)$ wyznacza on także podalgebrę Liego $\mathfrak{h}$ w $\mathfrak{so}(n)$.

Jak tworzyć geometrie typu $(X, g, \nabla^T, T, \Psi)$ z $T \neq 0$?

- Niech Υ będzie obiektem (np. tensorem), który jest zachowywany przez podgrupę $H \subset \mathbf{SO}(n)$. Oprócz włożenia H w $\mathbf{SO}(n)$ wyznacza on także podalgebrę Liego $\mathfrak{h}$ w $\mathfrak{so}(n)$.

- Na rozmaitości (X, g) wyposażonej w taki tensor Υ możemy rozłożyc formę koneksji Levi-Civity $\overset{LC}{\Gamma} \in \mathfrak{so}(n)$ na część Γ z $\mathfrak{h}$ i resztę:

$$\overset{LC}{\Gamma} = \Gamma + \frac{1}{2}T.$$

- Wtedy pierwsze równania struktury $\mathrm{d}\theta + (\Gamma + \frac{1}{2}T) \wedge \theta = 0$ dla koneksji Levi-Civity zapisujemy jako

$$\mathrm{d}\theta + \Gamma \wedge \theta = Tor$$

i interpretujemy jako pierwsze równanie struktury dla $metrycznej$ koneksji Γ z $antysymetryczną$ torsją Tor.

- Wtedy pierwsze równania struktury $\mathrm{d}\theta + (\Gamma + \frac{1}{2}T) \wedge \theta = 0$ dla koneksji Levi-Civity zapisujemy jako

$$\mathrm{d}\theta + \Gamma \wedge \theta = Tor$$

  i interpretujemy jako pierwsze równanie struktury dla *metrycznej* koneksji Γ z *antysymetryczną* torsją Tor.

- Krzywizna tej koneksji $K \in \mathfrak{h}$ - z drugiego równania struktury:

$$\mathrm{d}\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = K.$$

- Teoria strun sugeruje, że warto rozważac T_{ijk} całkowicie antysymetryczne.

- Teoria strun sugeruje, że warto rozważac T_{ijk} całkowicie antysymetryczne.

- Czy istnieją geometrie (X, g) dopuszczające rozkład

  $\overset{LC}{\Gamma} = \Gamma + \frac{1}{2}T$ z T_{ijk} całkowicie antysymetrycznym?

- Teoria strun sugeruje, że warto rozważac T_{ijk} całkowicie antysymetryczne.

- Czy istnieją geometrie (X, g) dopuszczające rozkład

$$\overset{LC}{\Gamma} = \Gamma + \tfrac{1}{2}T \quad \text{z} \quad T_{ijk} \quad \text{całkowicie antysymetrycznym?}$$

- Dla jakich n i $H \subset \mathbf{SO}(n)$?

- Teoria strun sugeruje, że warto rozważac T_{ijk} całkowicie antysymetryczne.

- Czy istnieją geometrie (X,g) dopuszczające rozkład

$$\overset{LC}{\Gamma} = \Gamma + \tfrac{1}{2}T \quad \text{z} \quad T_{ijk} \quad \text{całkowicie antysymetrycznym?}$$

- Dla jakich n i $H \subset \mathbf{SO}(n)$?

- Jak wygląda dla nich obiekt Υ redukujący $\mathbf{SO}(n)$ do H?

Ostatnie 20 lat

- Każda geometria z holonomią z pierwszej listy Bergera może być uznana za geometrię z antysymetryczną torsją $T \equiv 0$

Ostatnie 20 lat

- Każda geometria z holonomią z pierwszej listy Bergera może być uznana za geometrię z antysymetryczną torsją $T \equiv 0$

- Szuka się (np. grupa Friedricha z Berlina) geometrii z koneksją o wartościach w algebrze Liego grup H z *pierwszej* listy Bergera mających $T \neq 0$:

Ostatnie 20 lat

- Każda geometria z holonomią z pierwszej listy Bergera może być uznana za geometrię z antysymetryczną torsją $T \equiv 0$
- Szuka się (np. grupa Friedricha z Berlina) geometrii z koneksją o wartościach w algebrze Liego grup H z *pierwszej* listy Bergera mających $T \neq 0$:

H	Υ	Nazwa geometrii	Uwagi
$\mathbf{U}(n) \subset \mathbf{SO}(2n)$	J_{ik} s.t. $J_{ik}J_{kj} = -g_{ij}$	nearly Kähler	Bismut $(*)$
$\mathbf{SU}(2) \subset \mathbf{SO}(4)$	two selfdual 2-forms	hyperheaven	Plebański
$\mathbf{SU}(3) \subset \mathbf{SO}(6)$	$\overset{3}{\omega} = (13-24)5-(14+23)6$	$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	Salamon, Hitchin
$\mathbf{G}_2 \subset \mathbf{SO}(7)$	$\overset{3}{\phi} = \overset{3}{\omega} + (12+34)7 + 567$	$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	Bryant, Gray
$\mathbf{Spin}(7) \subset \mathbf{SO}(8)$	spinor	weak Spin(7)	Fernandez

$(*)$ pełna klasyfikacja dla $n \neq 3$, Nagy

Możliwe H dla geometrii z $T \in \Lambda^3\mathbb{R}^n$ spoza pierwszej listy Bergera

Możliwe H dla geometrii z $T \in \Lambda^3\mathbb{R}^n$ spoza pierwszej listy Bergera

- Te podgrupy $H \subset \mathbf{SO}(n)$, które występują jako dzielnik H w *zwartych nieredukowalnych przestrzeniach symetrycznych* G/H sklasyfikowanych przez Cartana.

Możliwe H dla geometrii z $T \in \Lambda^3\mathbb{R}^n$ spoza pierwszej listy Bergera

- Te podgrupy $H \subset \mathbf{SO}(n)$, które występują jako dzielnik H w *zwartych nieredukowalnych przestrzeniach symetrycznych* G/H sklasyfikowanych przez Cartana.

- Pierwsza możliwość na liście Cartana: $G/H = \mathbf{SU}(3)/\mathbf{SO}(3)$.

Możliwe H dla geometrii z $T \in \Lambda^3\mathbb{R}^n$ spoza pierwszej listy Bergera

- Te podgrupy $H \subset \mathbf{SO}(n)$, które występują jako dzielnik H w *zwartych nieredukowalnych przestrzeniach symetrycznych* G/H sklasyfikowanych przez Cartana.

- Pierwsza możliwość na liście Cartana: $G/H = \mathbf{SU}(3)/\mathbf{SO}(3)$.

- Tutaj: rozmaitość $X = \mathbf{SU}(3)/\mathbf{SO}(3)$ ma wymiar 5 i działa na niej $H = \mathbf{SO}(3) \subset \mathbf{SO}(5)$. To działanie w przestrzeni stycznej do X jest *nieredukowalne*.

Możliwe H dla geometrii z $T \in \Lambda^3\mathbb{R}^n$ spoza pierwszej listy Bergera

- Te podgrupy $H \subset \mathbf{SO}(n)$, które występują jako dzielnik H w *zwartych nieredukowalnych przestrzeniach symetrycznych* G/H sklasyfikowanych przez Cartana.

- Pierwsza możliwość na liście Cartana: $G/H = \mathbf{SU}(3)/\mathbf{SO}(3)$.

- Tutaj: rozmaitość $X = \mathbf{SU}(3)/\mathbf{SO}(3)$ ma wymiar 5 i działa na niej $H = \mathbf{SO}(3) \subset \mathbf{SO}(5)$. To działanie w przestrzeni stycznej do X jest *nieredukowalne*.

- Zbadać *nieredukowalną* geometrię $\mathbf{SO}(3)$ w wymiarze $n = 5$.

$\mathbf{SO}(3)$ geometrie w wymiarze 5

$\mathbf{SO}(3)$ geometrie w wymiarze 5

- Tensor Υ łamiący grupę $\mathbf{SO}(5)$ do nieredukowalnej $\mathbf{SO}(3)$ jest 3-tensorem spełniającym następujące warunki (Bobieński+PN):

  i) $\Upsilon_{ijk} = \Upsilon_{(ijk)}$, (całkowicie *symetryczny*)

  ii) $\Upsilon_{ijj} = 0$, (bezśladowy)

  iii) $\Upsilon_{jki}\Upsilon_{lmi} + \Upsilon_{lji}\Upsilon_{kmi} + \Upsilon_{kli}\Upsilon_{jmi} = g_{jk}g_{lm} + g_{lj}g_{km} + g_{kl}g_{jm}$.

$\mathbf{SO}(3)$ geometrie w wymiarze 5

- Tensor Υ łamiący grupę $\mathbf{SO}(5)$ do nieredukowalnej $\mathbf{SO}(3)$ jest 3-tensorem spełniającym następujące warunki (Bobieński+PN):

  i) $\Upsilon_{ijk} = \Upsilon_{(ijk)}$, (całkowicie *symetryczny*)
  ii) $\Upsilon_{ijj} = 0$, (bezśladowy)
  iii) $\Upsilon_{jki}\Upsilon_{lmi} + \Upsilon_{lji}\Upsilon_{kmi} + \Upsilon_{kli}\Upsilon_{jmi} = g_{jk}g_{lm} + g_{lj}g_{km} + g_{kl}g_{jm}$.

- 5-wymiarowa riemannowska rozmaitość (X, g) wyposażona w każdym punkcie w tensor Υ spełniający warunki i)-iii) oraz dopuszczająca rozkład

$$\overset{LC}{\Gamma}_{ijk} = \Gamma_{ijk} + \tfrac{1}{2}T_{ijk}.$$

z $T_{ijk} = T_{[ijk]}$ nazywa się *niemal całkowalną (nearly integrable)*.

- Znamy dużo przykładów takich geometrii.

- Znamy dużo przykładów takich geometrii.

- M. in. mamy 7-mio parametrową rodzinę nierównoważnych przykładów spełniających równania

$$\nabla^T \Psi = 0, \quad \delta(T) = 0, \quad T \cdot \Psi = \mu \Psi$$

teorii strun IIB. Mają one $T \neq 0$ i w każdym punkcie dwie 2-wymiarowe przestrzenie kowariantnie ∇^T-stałych spinorów. Ponadto dla tej rodziny $Ric^{\nabla^T} = 0$.

Pytanie

Pytanie

Dla jakich n w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ może istnieć tensor Υ spełniający warunki:

i) $\Upsilon_{ijk} = \Upsilon_{(ijk)},$ (całkowita *symetria*)

ii) $\Upsilon_{ijj} = 0,$ (brak śladu)

iii) $\Upsilon_{jki}\Upsilon_{lmi} + \Upsilon_{lji}\Upsilon_{kmi} + \Upsilon_{kli}\Upsilon_{jmi} = g_{jk}g_{lm} + g_{lj}g_{km} + g_{kl}g_{jm}$?

W wymiarze $n = 5$

W wymiarze $n = 5$

- tworzymy wielomian $w(a) = \Upsilon_{ijk} a_i a_j a_k$, gdzie $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

W wymiarze $n = 5$

- tworzymy wielomian $w(a) = \Upsilon_{ijk} a_i a_j a_k$, gdzie $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$
- tensor łamiący $\mathbf{SO}(5)$ do $\mathbf{SO}(3)$ daje:

$$w(a) = 6\sqrt{3}a_1 a_2 a_3 + 3\sqrt{3}(a_1^2 - a_2^2)a_4 - \left(\,3a_1^2 + 3a_2^2 - 6a_3^2 - 6a_4^2 + 2a_5^2\,\right)a_5$$

W wymiarze $n = 5$

- tworzymy wielomian $w(a) = \Upsilon_{ijk} a_i a_j a_k$, gdzie $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$
- tensor łamiący $\mathbf{SO}(5)$ do $\mathbf{SO}(3)$ daje:

$$w(a) = 6\sqrt{3} a_1 a_2 a_3 + 3\sqrt{3}(a_1^2 - a_2^2) a_4 - \left(3a_1^2 + 3a_2^2 - 6a_3^2 - 6a_4^2 + 2a_5^2 \right) a_5$$

- warto zauważyć, że:

$$w(a) = \det \begin{pmatrix} a_5 - \sqrt{3} a_4 & \sqrt{3} a_3 & \sqrt{3} a_2 \\ \sqrt{3} a_3 & a_5 + \sqrt{3} a_4 & \sqrt{3} a_1 \\ \sqrt{3} a_2 & \sqrt{3} a_1 & -2a_5 \end{pmatrix}$$

W wymiarach $n = 5$, 8, 14 i 26

- bo ...

W wymiarach $n = 5,\ 8,\ 14$ i 26

- bo … oprócz $\mathbb{R}$, mamy $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$.

W wymiarach $n = 5,\ 8,\ 14$ i 26

- bo ... oprócz $\mathbb{R}$, mamy $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$.
- dla $n = 5$ tensor Υ jest zadany formułą:

$$\Upsilon_{ijk} a_i a_j a_k = w(a) = \det \begin{pmatrix} a_5 - \sqrt{3} a_4 & \sqrt{3} a_3 & \sqrt{3} a_2 \\ \sqrt{3} a_3 & a_5 + \sqrt{3} a_4 & \sqrt{3} a_1 \\ \sqrt{3} a_2 & \sqrt{3} a_1 & -2 a_5 \end{pmatrix}$$

W wymiarach $n = 5,\ 8,\ 14$ i 26

- bo ... oprócz $\mathbb{R}$, mamy $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$.
- dla $n = 5$, 8, 14 i 26 można wziąć:

$$w(a) = \det \begin{pmatrix} a_5 - \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_3 & \sqrt{3}\alpha_2 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_3 & a_5 + \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_1 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_2 & \sqrt{3}\overline{\alpha}_1 & -2a_5 \end{pmatrix}$$

gdzie

W wymiarach $n = 5,\ 8,\ 14$ i 26

- bo … oprócz $\mathbb{R}$, mamy $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$.

- dla $n = 5$, 8, 14 i 26 można wziąć:

$$w(a) = \det \begin{pmatrix} a_5 - \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_3 & \sqrt{3}\alpha_2 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_3 & a_5 + \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_1 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_2 & \sqrt{3}\overline{\alpha}_1 & -2a_5 \end{pmatrix}$$

gdzie dla $n = 5$:

$$\alpha_1 = a_1$$
$$\alpha_2 = a_2$$
$$\alpha_3 = a_3$$

W wymiarach $n = 5,\ 8,\ 14$ i 26

- bo ... oprócz $\mathbb{R}$, mamy $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$.

- dla $n = 5,\ 8,\ 14$ i 26 można wziąć:

$$w(a) = \det \begin{pmatrix} a_5 - \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_3 & \sqrt{3}\alpha_2 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_3 & a_5 + \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_1 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_2 & \sqrt{3}\overline{\alpha}_1 & -2a_5 \end{pmatrix}$$

gdzie dla $n = 8$:

$$\alpha_1 = a_1 + a_6\mathrm{i}$$
$$\alpha_2 = a_2 + a_7\mathrm{i}$$
$$\alpha_3 = a_3 + a_8\mathrm{i}$$

W wymiarach $n = 5,\ 8,\ 14$ i 26

- bo ... oprócz $\mathbb{R}$, mamy $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$.

- dla $n = 5$, 8, 14 i 26 można wziąć:

$$w(a) = \det \begin{pmatrix} a_5 - \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_3 & \sqrt{3}\alpha_2 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_3 & a_5 + \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_1 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_2 & \sqrt{3}\overline{\alpha}_1 & -2a_5 \end{pmatrix}$$

gdzie dla $n = 14$:

$$\alpha_1 = a_1 + a_6\mathrm{i} + a_9\mathrm{j} + a_{10}\mathrm{k}$$
$$\alpha_2 = a_2 + a_7\mathrm{i} + a_{11}\mathrm{j} + a_{12}\mathrm{k}$$
$$\alpha_3 = a_3 + a_8\mathrm{i} + a_{13}\mathrm{j} + a_{14}\mathrm{k}$$

W wymiarach $n = 5,\ 8,\ 14$ i 26

- bo ... oprócz $\mathbb{R}$, mamy $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$.

- dla $n = 5$, 8, 14 i 26 można wziąć:

$$w(a) = \det \begin{pmatrix} a_5 - \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_3 & \sqrt{3}\alpha_2 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_3 & a_5 + \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_1 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_2 & \sqrt{3}\overline{\alpha}_1 & -2a_5 \end{pmatrix}$$

gdzie dla $n = 26$:

$$\alpha_1 = a_1 + a_6\mathrm{i} + a_9\mathrm{j} + a_{10}\mathrm{k} + a_{15}\mathrm{p} + a_{16}\mathrm{q} + a_{17}\mathrm{r} + a_{18}\mathrm{s},$$
$$\alpha_2 = a_2 + a_7\mathrm{i} + a_{11}\mathrm{j} + a_{12}\mathrm{k} + a_{19}\mathrm{p} + a_{20}\mathrm{q} + a_{21}\mathrm{r} + a_{22}\mathrm{s},$$
$$\alpha_3 = a_3 + a_8\mathrm{i} + a_{13}\mathrm{j} + a_{14}\mathrm{k} + a_{23}\mathrm{p} + a_{24}\mathrm{q} + a_{25}\mathrm{r} + a_{26}\mathrm{s}.$$

W wymiarach $n = 5,\ 8,\ 14$ i 26

- bo ... oprócz $\mathbb{R}$, mamy $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$.

- dla $n = 5$, 8, 14 i 26 można wziąć:

$$w(a) = \det \begin{pmatrix} a_5 - \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_3 & \sqrt{3}\alpha_2 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_3 & a_5 + \sqrt{3}a_4 & \sqrt{3}\alpha_1 \\ \sqrt{3}\overline{\alpha}_2 & \sqrt{3}\overline{\alpha}_1 & -2a_5 \end{pmatrix}$$

gdzie dla $n = 26$:

$$\alpha_1 = a_1 + a_6\mathrm{i} + a_9\mathrm{j} + a_{10}\mathrm{k} + a_{15}\mathrm{p} + a_{16}\mathrm{q} + a_{17}\mathrm{r} + a_{18}\mathrm{s},$$
$$\alpha_2 = a_2 + a_7\mathrm{i} + a_{11}\mathrm{j} + a_{12}\mathrm{k} + a_{19}\mathrm{p} + a_{20}\mathrm{q} + a_{21}\mathrm{r} + a_{22}\mathrm{s},$$
$$\alpha_3 = a_3 + a_8\mathrm{i} + a_{13}\mathrm{j} + a_{14}\mathrm{k} + a_{23}\mathrm{p} + a_{24}\mathrm{q} + a_{25}\mathrm{r} + a_{26}\mathrm{s}.$$

- W każdym z czterech przypadków $n = 5, 8, 14$ i 26 tensor Υ określony przez

$$\Upsilon_{ijk} a_i a_j a_k = w(a)$$

spełnia warunki i)-iii)!

Stabilizator H dla Υ

Stabilizator H dla Υ

- Twierdzenie 1
  W wymiarach $n = 5$, 8, 14 i 26 tensor Υ redukuje grupę $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ poprzez $\mathbf{O}(n)$ do jej podgrupy H_n, gdzie:

  $\star$ dla $n = 5$ grupa H_5 jest nieredukowalną $\mathbf{SO}(3)$ w $\mathbf{SO}(5)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(3)/\mathbf{SO}(3)$

Stabilizator H dla Υ

- Twierdzenie 1
  W wymiarach $n = 5$, 8, 14 i 26 tensor Υ redukuje grupę $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ poprzez $\mathbf{O}(n)$ do jej podgrupy H_n, gdzie:

  ⋆ dla $n = 5$ grupa H_5 jest nieredukowalną $\mathbf{SO}(3)$ w $\mathbf{SO}(5)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(3)/\mathbf{SO}(3)$

  ⋆ dla $n = 8$ grupa H_8 jest nieredukowalną $\mathbf{SU}(3)$ w $\mathbf{SO}(8)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(3)$

Stabilizator H dla Υ

- Twierdzenie 1
  W wymiarach $n = 5$, 8, 14 i 26 tensor Υ redukuje grupę $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ poprzez $\mathbf{O}(n)$ do jej podgrupy H_n, gdzie:

  $\star$ dla $n = 5$ grupa H_5 jest nieredukowalną $\mathbf{SO}(3)$ w $\mathbf{SO}(5)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(3)/\mathbf{SO}(3)$

  $\star$ dla $n = 8$ grupa H_8 jest nieredukowalną $\mathbf{SU}(3)$ w $\mathbf{SO}(8)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(3)$

  $\star$ dla $n = 14$ grupa H_{14} jest nieredukowalną $\mathbf{Sp}(3)$ w $\mathbf{SO}(14)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(6)/\mathbf{Sp}(3)$

Stabilizator H dla Υ

- Twierdzenie 1
  W wymiarach $n = 5$, 8, 14 i 26 tensor Υ redukuje grupę $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ poprzez $\mathbf{O}(n)$ do jej podgrupy H_n, gdzie:

  ⋆ dla $n = 5$ grupa H_5 jest nieredukowalną $\mathbf{SO}(3)$ w $\mathbf{SO}(5)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(3)/\mathbf{SO}(3)$

  ⋆ dla $n = 8$ grupa H_8 jest nieredukowalną $\mathbf{SU}(3)$ w $\mathbf{SO}(8)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(3)$

  ⋆ dla $n = 14$ grupa H_{14} jest nieredukowalną $\mathbf{Sp}(3)$ w $\mathbf{SO}(14)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(6)/\mathbf{Sp}(3)$

  ⋆ dla $n = 26$ grupa H_{26} jest nieredukowalną $\mathbf{F}_4$ w $\mathbf{SO}(26)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{E}_6/\mathbf{F}_4$

Stabilizator H dla Υ

- Twierdzenie 1
  W wymiarach $n = 5$, 8, 14 i 26 tensor Υ redukuje grupę $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ poprzez $\mathbf{O}(n)$ do jej podgrupy H_n, gdzie:

  ⋆ dla $n = 5$ grupa H_5 jest nieredukowalną $\mathbf{SO}(3)$ w $\mathbf{SO}(5)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(3)/\mathbf{SO}(3)$
  ⋆ dla $n = 8$ grupa H_8 jest nieredukowalną $\mathbf{SU}(3)$ w $\mathbf{SO}(8)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(3)$
  ⋆ dla $n = 14$ grupa H_{14} jest nieredukowalną $\mathbf{Sp}(3)$ w $\mathbf{SO}(14)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{SU}(6)/\mathbf{Sp}(3)$
  ⋆ dla $n = 26$ grupa H_{26} jest nieredukowalną $\mathbf{F}_4$ w $\mathbf{SO}(26)$;
  model z $T \equiv 0$: $\mathbf{E}_6/\mathbf{F}_4$
- Patrząc na wymiary n i grupy H_n widać, że *wszystkie* są spoza pierwszej listy Bergera

- Twierdzenie 2

- Twierdzenie 2
  - ⋆ Tensory Υ zdefiniowane tu za pomocą liczb z $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ są $jedynymi$ rozwiązaniami równań i)-iii).

- Twierdzenie 2
  - ⋆ Tensory Υ zdefiniowane tu za pomocą liczb z $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ są $jedynymi$ rozwiązaniami równań i)-iii).
- Dowód

- Twierdzenie 2
  - ⋆ Tensory Υ zdefiniowane tu za pomocą liczb z $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ są *jedynymi* rozwiązaniami równań i)-iii).
- Dowód
  - ⋆ Wynika z prac Cartana na temat *powierzchni izoparametrycznych* w sferach $\mathbf{S}^n$.
  - ⋆ Sprowadza się do dowodu tego faktu, że ciało $\mathbb{R}$ można rozszerzyć tylko do $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. Dalsze rozszerzanie prowadzi do dzielników zera.
  - ⋆ Można pokazać, że nasze pytanie o istnienie tensora Υ jest *równoważne* pytaniu o możliwe rozszerzenia $\mathbb{R}$.

Więc co wyróżnia $n_k = 5,\ 8,\ 14$ i 26?

Więc co wyróżnia $n_k = 5,\ 8,\ 14$ i 26?

- To samo co $k = 1$, 2, 4 i 8; bo $n_k = 3k + 2$.

Więc co wyróżnia $n_k = 5$, 8, 14 i 26?

- To samo co $k = 1$, 2, 4 i 8; bo $n_k = 3k + 2$.
- To samo co $l = 0$, 1, 2 i 3; bo $k = 2^l$.

Podziękowania

Podziękowania

- Thomasowi Friedrichowi za inspirację i zwrócenie mojej uwagi na zagadnienia związane z holonomią

- Ilce Agricoli za nieocenioną pomoc merytoryczną i za natychmiastowe odpowiedzi na moje e-maile

- Robertowi Bryantowi za 8, 14 i 26 oraz za skierownaie mnie do prac Cartana o powierzchniach izoparametrycznych

- Andrzejowi Trautmanowi za nieprzywiedlną reprezentację $\mathbf{SO}(3)$ w $\mathbb{R}^5$

- Markowi Demiańskiemu za uwagi na temat tej prezentacji