**Egzamin pisemny z mechaniki kwantowej I**
22 stycznia 2004 r.

**Brak obliczeń pośrednich, uzasadnień i komentarzy wpłynie na obniżenie oceny.**

**Zadanie 1.**
Płaskiemu rotatorowi odpowiada hamiltonian $H = \frac{L_z^2}{2I}$, gdzie w reprezentacji położeniowej $L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\phi}$.
a) Wyznaczyć wartości energii i odpowiadające im unormowane funkcje falowe dla tego rotatora.
b) Wyznaczyć funkcję falową $\Psi(\phi, t)$ i prawdopodobieństwa otrzymania w wyniku pomiaru poszczególnych energii, jeśli w chwili $t = 0$ rotator opisany jest następującą funkcją falową $\Psi(\phi, t = 0) = \sqrt{\frac{4}{3\pi}}\sin^2\phi$.
Wskazówka: Płaski rotator ma jeden stopień swobody i funkcja falowa spełnia warunek $\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi)$.

**Zadanie 2.**
Cząstka o masie $\mu$ rozprasza się na potencjale $V(r) = \alpha\delta(r - a)$, gdzie $\alpha > 0$.
a) Wyznaczyć przesunięcie fazowe $\delta_0$ dla rozpraszania w stanie z $l = 0$ (wystartować z równania radialnego dla $\chi(r) = rR(r)$).
b) Wyznaczyć i przedyskutować różniczkowy i całkowity przekrój czynny w granicy $E \to 0$.

**Zadanie 3.**
Dwuwymiarowemu oscylatorowi harmonicznemu odpowiada hamiltonian

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

Dla zaburzenia $H' = \alpha xy$ wyznaczyć pierwsze nieznikające poprawki do energii tego oscylatora w odpowiednim rzędzie rachunku zaburzeń i funkcje falowe w rzędzie o jeden niższym:
a) dla stanu podstawowego,
b) dla pierwszego stanu wzbudzonego.

**Zadanie 4.**
Elektron znajduje się w stanie opisanym spinową funkcją falową
$\psi = \begin{pmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}$.
a) Obliczyć wartość średnią i odchylenie standardowe dla rzutu spinu elektronu na kierunek $\vec{n} = (\sin\beta, 0, \cos\beta)$.
b) Obliczyć prawdopodobieństwa $P_{1/2}$ i $P_{-1/2}$ określonych rzutów spinu na kierunek $\vec{n}$.

*Powodzenia!*

**Użyteczny wzór** dla jednowymiarowego oscylatora z $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$:

$$x\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x) + \sqrt{n}\psi_{n-1}(x)).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

Dla elektronu:

$$s_n \equiv \vec{n}\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{n}\vec{\sigma}.$$