Poprawkowy egzamin pisemny z mechaniki kwantowej I
13 lutego 2004 r.

Brak obliczeń pośrednich, uzasadnień i komentarzy wpłynie na obniżenie oceny. Ściąganie będzie karane oceną niedostateczną.

Zadanie 1.
Cząstce o masie m, poruszającej się po okręgu o obwodzie L, odpowiada hamiltonian $H = \frac{p_x^2}{2m}$, gdzie w reprezentacji położeniowej $p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$, x - współrzędna cząstki wzdłuż okręgu.
a) Wyznaczyć wartości energii cząstki i odpowiadające im unormowane funkcje falowe.
b) Wyznaczyć prawdopodobieństwa otrzymania w wyniku pomiaru poszczególnych wartości energii oraz średnią energię w chwili t, jeśli w $t = 0$ cząstka znajduje się w stanie $\Psi(x, t = 0) = \frac{4}{\sqrt{5L}} \sin^3(\frac{2\pi x}{L})$.
Wskazówka: Rozważana cząstka ma jeden stopień swobody i funkcja falowa spełnia warunek $\psi(x + L) = \psi(x)$.

Zadanie 2.
Cząstka o masie m rozprasza się na potencjale $V(r) = \frac{\alpha}{r^2}$, gdzie $\alpha > 0$.
a) Wyznaczyć amplitudę rozpraszania $f(\theta)$ przy użyciu metody fal cząstkowych (parcjalnych). Dlaczego istotne są wkłady od wszystkich l?
b) Obliczyć amplitudę rozpraszania w przybliżeniu Borna.
Wykazać, że wynik z a) jest zgodny z b) dla $\frac{8m\alpha}{\hbar^2} << 1$.

Zadanie 3.
Trójwymiarowemu oscylatorowi harmonicznemu odpowiada hamiltonian

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Dla zaburzenia $H' = \beta xyz^2$ wyznaczyć:
a) poprawki do energii pierwszego poziomu wzbudzonego oscylatora w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń,
b) odpowiadające tym poprawkom unormowane funkcje falowe w zerowym rzędzie (odpowiednie kombinacje liniowe stanów własnych niezaburzonego oscylatora).

Zadanie 4.
Cząstce o spinie $\frac{1}{2}$ i momencie magnetycznym μ w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ odpowiada hamiltonian $H = -\mu\vec{\sigma}\vec{B}$, gdzie $\vec{\sigma}$ - macierze spinowe Pauliego.
a) Wyznaczyć wartości energii cząstki i odpowiadające im unormowane spinowe funkcje falowe, jeśli w kartezjańskim układzie współrzędnych $\vec{B} = B(\sin\delta, 0, \cos\delta)$.
b) Wyznaczyć i przedyskutować $\Psi(t)$, jeśli $\Psi(t = 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Powodzenia!

Użyteczne wzory:
Dla jednowymiarowego oscylatora z $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$:

$$x\,|n> = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\,|n+1> + \sqrt{n}\,|n-1>).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2t\cos\theta + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\cos\theta),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$