Pierwsze kolokwium z mechaniki kwantowej I
22 listopada 2003 r.

Brak obliczeń pośrednich, uzasadnień i komentarzy wpłynie na obniżenie oceny.

Zadanie 1.
Cząstka znajduje się w stanie opisanym funkcją falową $\psi(x) = Ae^{-\frac{|x|}{a}}$, $a > 0$.
a) Wyznaczyć stałą normalizacyjną A.
b) Obliczyć średnie położenie i średni pęd cząstki.
c) Obliczyć średnie odchylenia standardowe dla położenia i pędu cząstki i sprawdzić zgodność otrzymanych wyników z zasadą nieoznaczoności Heisenberga.

Zadanie 2.
Cząstka o masie m w potencjale
$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & x \geq 0 \end{cases}.$
a) Wyznaczyć poziomy energetyczne cząstki i odpowiadające im unormowane funkcje falowe.
b) Wyznaczyć $\Psi(x,t)$ i prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w stanach o określonej energii, jeśli w chwili $t = 0$ cząstka znajduje się w stanie
$\Psi(x, t = 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 4\sqrt{\frac{\lambda}{15\sqrt{\pi}}}(\lambda x)^3 e^{-\frac{\lambda^2x^2}{2}} & x \geq 0 \end{cases}$, gdzie $\lambda = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$.

Zadanie 3.
Obliczyć współczynniki przejścia i odbicia dla cząstki o masie m padającej z lewej strony w przypadku potencjału $V(x) = \alpha\delta(x)$, $\alpha = \text{const}$. Naszkicować wykres zależności współczynnika przejścia od energii cząstki.

Użyteczne wzory dla "pełnego" oscylatora od ∞ do $+\infty$ z $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2^n n!\sqrt{\pi}}} H_n(\lambda x) e^{-\frac{\lambda^2x^2}{2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

i nie tylko:

$$\int_0^\infty x^n e^{-bx} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{b^{n+1}},$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-bx^2} dx = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2b^{\frac{n+1}{2}}},$$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Powodzenia!