Zadania z mechaniki kwantowej I dla III roku. Seria 11.

Zadanie 1. Energia kinetyczna dana jest naprawdę wzorem relatywistycznym

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \approx mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3 c^2} + \dots$$

Człon mc^2 jest nieistotny (przesuwa energie wszystkich poziomów atomu wodoru o tę samą wielkość $E_n \to E_n + mc^2$). Traktując trzeci wyraz w powyższym wzorze jak zaburzenie znaleźć związaną z nim poprawkę do energii stanu podstawowego atomu wodoru. **Uwaga:** Poprawka powinna wyjść ujemna. Przy nieostrożnym postępowaniu można jednak dostać dodatnią wartość poprawki...

Zadanie 2. Rozpatrzyć rzeczywistą i symetryczną macierz 2×2 postaci

$$\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}$$

Niech $|d| \ll |a|, |b|$. Znaleźć w rachunku zaburzeń wartości własne tej macierzy oraz jej wektory własne (tj. w języku mechaniki kwantowej - poprawione funkcje falowe). Porównać otrzymane wyniki ze ścisłymi. Co się dzieje z przybliżeniem gdy $|a-b|$ staje się $\lesssim |d|$? Jak należy wtedy stosować zaburzeń by otrzymać dobre wyniki?

Zadanie 3. Rotator przestrzenny, tj. układ o dwu stopniach swobody (θ, ϕ) opisywany hamiltonianem $H = \mathbf{L}^2/2I$ (gdzie L_i są trzema operatorami składowych momentu pędu, a I momentem bezwładności), o momencie dipolowym $\mathbf{d}$ umieszczono w stałym i jednorodnym polu elektrycznym o kierunku osi z. Znaleźć pierwszą nieznikającą poprawkę do energii stanów stacjonarnych rotatora. **Wskazówka**: Zauważyć, że zaburzenie komutuje z L_z wobec czego jeśli pracować w bazie funkcji własnych H i L_z, to można się nie przejmować degeneracją widma niezaburzonego układu.

Zadanie 4. Stosując metodę wariacyjną oszacować energię stanu podstawowego atomu wodoru. Użyć funkcji próbnej postaci

$$\psi(r, \lambda) = \frac{A}{\lambda^2 + (r/a_0)^2} \ .$$

Zadanie 5. Metodą WKB znaleźć poziomy energetyczne jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie m i częstości ω.

Zadanie 6. Metodą WKB znaleźć współczynnik przejścia cząstki o masie m i energii E przez barierę potencjału

$$V(x) = \frac{V_0}{\cosh^2(x/a)} \ ,$$

(obliczając całkę podstawić $\sinh(x/a) = \sqrt{V_0/E - 1}\sin t$). Porównać ten przybliżony wynik ze ścisłym.