Zadania z mechaniki kwantowej I Seria 3.

Zadanie 1.
Cząstka o masie m znajduje się w stanie podstawowym w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości a. Jakie jest prawdopobieństwo, że pomiar pędu tej cząstki da wartość zawierającą się w przedziale $(p, p+dp)$?

Zadanie 2.
Rozpatrzyć jednowymiarowy ruch swobodnej cząstki, której funkcja falowa $\psi(x, t_0)$ w chwili t_0 jest dana. Rozkładając tę funkcję na funkcje własne operatora pędu, których ewolucja czasowa jest oczywista, znaleźć jawną postać propagatora, tj. funkcji $K(x-y, t-t_0)$ takiej, że dla $t \neq t_0$

$$\psi(x,t) = \int dy\ K(x-y, t-t_0)\ \psi(y, t_0)\ .$$

i spełniającej oczywisty warunek $K(x-y, 0) = \delta(x-y)$.

Zadanie 3.
Wiadomo, że jeśli nieoznaczoności położenia Δx i pędu Δp cząstki opisywanej funkcją falową $\psi(x)$ są zdefiniowane przez

$$(\Delta x)^2 = \langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle \qquad (\Delta p)^2 = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle\ , \tag{1}$$

gdzie średnia wartość operatora $\hat{A}$ jest dana wzorem

$$\langle \hat{A} \rangle = \int dx\ \psi^*(x) \hat{A} \psi(x)\ , \tag{2}$$

to minimalną wartością jaką może przyjąć iloczyn $\Delta x \Delta p$ jest $\hbar/2$. Posługując się dowodem tego faktu przedstawionym na wykładzie znaleźć najogólniejszą postać funkcji falowej $\psi(x)$, dla której $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.

Zadanie 4.
Cząstka o masie m uwięziona jest w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości a. W chwili $t = 0$ jej funkcja falowa jest superpozycją stanu podstawowego i drugiego stanu wzbudzonego ($n = 1$ i $n = 3$), a średnia energia cząstki wynosi $\langle E \rangle = 4(\hbar^2/2m)(\pi/a)^2$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokonując pomiaru jej energii w chwili $t = 5$ sek. otrzymamy wynik $E = (\hbar^2/2m)(\pi/a)^2$?

Zadanie 5.
Funkcja falowa cząstki o masie m uwięzionej w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości a jest postaci $\psi(x) = -i/\sqrt{a}$ dla $0 \leq x \leq a$ i $\psi(x) = 0$ gdzie indziej. Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia jej w n-tym stanie własnym energii? Jaka jest średnia energia tej cząstki?