Zadania z mechaniki kwantowej I dla III roku. Seria 7.

Zadanie 1.
Znaleźć współczynniki przejścia i odbicia cząstki o masie m padającej z lewej strony na potencjale $V(x) = -V_0/[1 + e^{x/a}]$. Zbadać granice $a \to 0$ oraz $\hbar \to 0$
Wskazówka. W równaniu Schrödingera dokonać podstawień: $\psi(x) = e^{ikx}$ (separującego zachowanie asymptotyczne dla $x \to \infty$), a następnie $\xi = -\exp(-x/a)$. Pamiętać o postaci równania na funkcję hipergeometryczną!

Zadanie 2.
Cząstka o masie m znajduje się w stanie s (tzn. w stanie o $l = 0$) o energii $E = (\hbar^2/2m)(\pi/a)^2 n^2$ w trójwymiarowej nieskończenie głębokiej sferycznej studni potencjału $V(r) = 0$ dla $r \leq a$ i $V(r) = \infty$ dla $r > a$. Obliczyć: a) średnią odległość cząstki od środka, tzn. $\langle r \rangle$, b) najbardziej prawdopodobną odległość cząstki od środka, c) średni kwadrat odległości od środka tzn. $\langle r^2 \rangle$, d) dyspersję odległości od środka.

Zadanie 3.
Znaleźć możliwe ujemne energie cząstki poruszającej się z zerowym momentem pędu w skończonej sferycznie symetrycznej jamie potencjału $V(r) = -V_0$ dla $r \leq a$ i $V(r) = 0$ dla $r > a$. Dla jakich parametrów V_0 i a nie istnieje żaden stan związany?

Zadanie 4. Rozpatrzyć dwuwymiarowy izotropowy oscylator harmoniczny o częstości własnej ω i masie m. Znaleźć widmo jego hamiltonianu i jego degenerację posługując się operatorami

$$T_1 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1), \qquad T_2 = \frac{i}{2}(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2), \qquad T_3 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)$$

gdzie a_1 i a_2 są operatorami anihilacji zbudowanymi odpowiednio z operatorów $\hat{x}$ i $\hat{p}_x$ oraz $\hat{y}$ i $\hat{p}_y$.

Zadanie 5.
Obliczyć komutatory operatorów składowych orbitalnego momentu pędu $\hat{L}_i$ $(i = x, y, z)$ oraz komutator operatora $\hat{\mathbf{L}}^2$ z operatorami składowych położenia $\hat{r}_j$, oraz pędu $\hat{p}_j$ $(j = x, y, z)$. Obliczyć także komutatory $\hat{L}_i$ z $\hat{\mathbf{r}}^2$ i $\hat{\mathbf{p}}^2$, a także z operatorem $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$.