

Egzamin pisemny z matematyki IIA

8 czerwca 2004 r.

Brak obliczeń pośrednich, uzasadnień i komentarzy wpłynie na obniżenie oceny.

Zadanie 1. (5 pkt)

- a) Udowodnić liniową niezależność układu funkcji $\{\sinh x, \cosh x, \sinh 2x, \cosh 2x\}$. Wskazówka: Wypisać definicję liniowej niezależności i przeanalizować ją wybierając różne wartości x lub wykorzystując pochodne (wrońskian).
- b) Znaleźć postać operatora $P = \frac{d}{dx}$ w bazie złożonej z tych funkcji. Wyznaczyć wektory własne tego operatora i obliczyć, jakim funkcjom odpowiadają.

Zadanie 2. ((4+3) pkt)

- a) Jaka krzywa w kartezjańskim układzie współrzędnych jest opisana równaniem $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 2 = 0$? Określić jej kształt i położenie.
- b) Wyznaczyć ekstrema odległości punktów tej krzywej od początku układu współrzędnych. Wskazówka: Użyć metody ekstremum warunkowego i/lub wykorzystać wyniki z części a).

Zadanie 3. (4 pkt)

- a) Wykazać, że ciąg $f_n(x) = e^{-nx^2}$ nie jest jednostajnie zbieżny w przedziale $(-1, 1)$ i jest jednostajnie zbieżny w przedziale $(1, 2)$.
- b) Znaleźć rozwinięcie funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w szereg Taylora wokół $x = 1$ i określić przedział wartości x , w którym szereg ten jest bezwzględnie zbieżny.

Zadanie 4. (4 pkt)

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania różniczkowego $\frac{dy}{dx} = x^2 e^x (y^2 - 6y + 13)$.

Zadanie 5. (5 pkt)

Znaleźć rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 + \sqrt{2}y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \sqrt{2}y_1 + y_2 + \sqrt{2}y_3,$$

$$\frac{dy_3}{dx} = \sqrt{2}y_2 + y_3$$

spełniające warunek początkowy: $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1$.

Powodzenia!