Poprawkowy egzamin pisemny z matematyki IIA

2 września 2004 r.

Brak obliczeń pośrednich, uzasadnień i komentarzy wpłynie na obniżenie oceny.

Zadanie 1. (6 pkt)

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ układ wektorów $\{v_1, v_2, v_3\}$ i przekształcenie liniowe A określone są wzorami:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Wykazać, że wektory $\{v_1, v_2, v_3\}$ są liniowo niezależne, i przy użyciu ortonormalizacji Schmidta zbudować z nich bazę ortonormalną $\{u_1, u_2, u_3\}$.

b) Znaleźć postać przekształcenia liniowego A w nowej bazie ortonormalnej $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Zadanie 2. (4 pkt)

a) Wyznaczyć ekstremum warunkowe funkcji $f(x, y) = 4x - 3y$ przy warunku $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

b) Zbadać ekstrema funkcji $y(x)$ zadanej w sposób uwikłany równaniem $x^2 - 2xy + 5y^2 - 4 = 0$.

Zadanie 3. (5 pkt)

a) Obliczyć granicę ciągu $f_n(x) = \frac{nx}{n+x^2}$ i zbadać, czy jest on jednostajnie zbieżny w przedziale $[-1, 1]$.

b) Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n!} x^{2n}.$$

Zadanie 4. (5 pkt)

Znaleźć ogólne i osobliwe rozwiązania równania różniczkowego $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3 + 2y - y^2}\, x^2 \cos x$.

Zadanie 5. (5 pkt)

Znaleźć ogólne rozwiązanie układu równań różniczkowych

$\frac{dy_1}{dx} = 3y_2 + y_3,$

$\frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_3,$

$\frac{dy_3}{dx} = y_1 + 3y_2.$

Powodzenia!